

Б. М. СМЕРНОВ

---

# ФИЗИКА СЛАБО- ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА

В ЗАДАЧАХ С РЕШЕНИЯМИ

ИЗДАНИЕ 3-е  
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1985

ББК 22.31  
С 50  
УДК 533.9

*Рекомендовано Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
для использования в учебном процессе в вузах*

**СМИРНОВ Б. М. Физика слабоионизованного газа:** В задачах с решениями.—3-е изд., перераб. и доп.—М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.—424 с.

В форме задач представлены вопросы физики слабоионизованного газа. Исследованы свойства слабоионизованной плазмы, связанные с образованием, уничтожением и движением заряженных частиц и колебаниями плазмы, а также электрические и магнитные свойства плазмы. Рассмотрен перенос излучения в слабоионизованном газе. Представлена физическая кинетика процессов, протекающих в слабоионизованной плазме и газе.

Предыдущее издание вышло в 1978 г.

Книга рассчитана на студентов старших курсов физических и физико-технических факультетов и аспирантов, специализирующихся в области плазмы.

Табл. 13. Ил. 24. Библиогр. 75 назв.

Рецензент:

кафедра прикладной физики МФТИ, проф. Ю. Г. Красников

С  $\frac{1704060000-074}{053(02)-85}$  136-85

© Издательство «Наука»,  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1978;  
переработанное  
и дополненное, 1985

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию . . . . .	5
<b>Глава 1. Кинетическое уравнение Больцмана . . . . .</b>	<b>7</b>
§ 1. Свойства кинетического уравнения . . . . .	8
§ 2. Коэффициенты переноса в газах . . . . .	23
§ 3. Перенос импульса и тепла в газах . . . . .	46
§ 4. Уравнение Фоккера—Планка . . . . .	63
§ 5. Диффузия и направленное движение частиц в газе . . . . .	68
<b>Глава 2. Заряженные частицы в газе . . . . .</b>	<b>85</b>
§ 1. Свойства слабоионизованной плазмы, обусловленные заряженными частицами . . . . .	85
§ 2. Статистическая физика слабоионизованного газа . . . . .	92
§ 3. Движение электронов в газе во внешнем поле . . . . .	105
§ 4. Плазма во внешних полях . . . . .	140
<b>Глава 3. Волны в плазме . . . . .</b>	<b>154</b>
§ 1. Малые колебания в плазме . . . . .	154
§ 2. Затухание и раскачка волн в плазме . . . . .	176
§ 3. Нелинейные явления в плазме . . . . .	202
<b>Глава 4. Процессы с участием заряженных частиц в газе . . . . .</b>	<b>217</b>
§ 1. Движение ионов в газе во внешнем поле . . . . .	217
§ 2. Диффузия заряженных частиц в газе во внешнем поле . . . . .	245
§ 3. Образование заряженных частиц в слабоионизованной плазме . . . . .	257
§ 4. Рекомбинация заряженных частиц в плазме . . . . .	265
<b>Глава 5. Распространение излучения в газе . . . . .</b>	<b>293</b>
§ 1. Равновесие излучения с газом . . . . .	293
§ 2. Перенос резонансного излучения в газе . . . . .	297
§ 3. Перенос инфракрасного излучения в слое молекулярного газа . . . . .	319
<b>Глава 6. Некоторые свойства газового разряда . . . . .</b>	<b>344</b>
§ 1. Положительный столб разряда в диффузионном режиме . . . . .	344
§ 2. Положительный столб разряда низкого давления . . . . .	361
§ 3. Условия зажигания слаботочного разряда . . . . .	378
<b>Приложения . . . . .</b>	<b>394</b>
1. Сечение столкновения атомных частиц . . . . .	394
2. Принцип детального равновесия . . . . .	398
3. Условия газовой системы частиц и идеальности плазмы . . . . .	402

4. Уширение спектральных линий . . . . .	403
5. Справочные данные . . . . .	408
1) Физические константы . . . . .	408
2) Переводные множители для единиц энергии . . . . .	408
3) Простейшие соотношения в удобных единицах . . . . .	409
4) Теплоемкость . . . . .	412
5) Коэффициент теплопроводности . . . . .	412
6) Коэффициент вязкости . . . . .	413
7) Коэффициент взаимной диффузии . . . . .	413
8) Сечение резонансной перезарядки положительного иона на собственном атоме . . . . .	414
9) Подвижность ионов . . . . .	414
10) Параметры электрона, движущегося в постоянном электрическом поле . . . . .	416
11) Работа выхода электрона . . . . .	417
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>418</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>421</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В предлагаемой книге в форме задач представлен курс физики низкотемпературной плазмы. Опыт двух предыдущих изданий показал, что такая форма изложения материала особенно удобна для читателей, самостоятельно изучающих настоящий курс или отдельные его части, и является удобным дополнением к существующим книгам по физике слабоионизованной плазмы.

Вошедшие в книгу задачи делятся на два класса. Они либо посвящены отдельным вопросам общей теории по рассматриваемой теме, либо разъясняют определенные научные проблемы. При такой структуре книги математический аппарат не заслоняет физическую идею и вместе с тем имеется возможность представить совокупность методов и приемов, используемых при решении такого рода задач.

В то же время в решении задач содержится определенная научная информация (немало задач основано на работах, выполненных в последнее время) и в этом смысле они представляют интерес для специалистов, работающих в данной области. Поэтому результаты этих задач обработаны таким образом, чтобы они могли быть использованы и в прикладных целях. Для этой же цели предназначен раздел «Приложения», в котором содержится справочный материал.

Таким образом, круг читателей, на которых рассчитана книга, состоит из двух категорий. С одной стороны, это студенты старших курсов, которые с помощью представленных задач могут ознакомиться с существом данной области и методами теоретической физики, используемыми при решении возникающих в ней проблем. С другой стороны, это специалисты в области физики и техники, объектом исследования которых является слабоионизованная плазма. Они могут воспользоваться научной информацией, содержащейся в книге.

В списке литературы приведены книги (учебные пособия, монографии, обзоры), ознакомившись с которыми, читатель может получить более полную информацию по рассматриваемым вопросам. Некоторые задачи основаны на оригинальных работах. Однако, поскольку такие задачи в первую очередь преследуют учебные цели и отражают отдельные детали рассматриваемых проблем, то ссылки на указанные работы не приводятся.

В приложениях в краткой форме даны определения и получены основные соотношения для сечений соударения частиц и для уширения спектральных линий. Эта информация используется в книге. В конце книги представлен материал справочного характера, который включает в себя данные по физическим единицам и физическим соотношениям, а также значения кинетических коэффициентов и других параметров, представляющих интерес для физики слабоионизованного газа. В предметный указатель вошли основные понятия и определения, относящиеся к физике слабоионизованного газа.

Третье издание книги несколько отличается от предыдущего. Добавлен ряд задач, появились новые параграфы. Особое внимание уделено основным характеристикам и понятиям физики низкотемпературной плазмы.

## КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Рассмотрим идеальный газ. Состояние частицы этого газа в данный момент времени будем характеризовать скоростью частицы  $\mathbf{v}$ , ее координатой  $\mathbf{r}$  и внутренними степенями свободы частицы, которые мы будем описывать обобщенными числами  $I$ . Условие идеальности газа связано с тем, что среднее расстояние между частицами  $N^{-1/3}$  ( $N$ —плотность частиц) много больше радиуса их взаимодействия—характерного расстояния между частицами, при котором потенциал взаимодействия частиц сравнивается с кинетической энергией. Это условие идеальности газа можно записать в виде

$$N\sigma^{3/2} \ll 1, \quad (1.1)$$

где  $\sigma$ —сечение рассеяния частиц, при котором заметно изменяется их состояние.

Если условие идеальности газа (1.1) выполнено, то основное время каждая частица движется как свободная и лишь малую часть времени ( $\sim N\sigma^{3/2}$  от основного) проводит в состоянии взаимодействия с другими частицами. За эти малые времена столкновения состояние рассматриваемой частицы изменяется. При этом одновременное соударение трех частиц—их одновременное сближение на расстояние порядка радиуса взаимодействия—событие более редкое, чем столкновение двух частиц. Поэтому при рассмотрении движения частицы в идеальном газе можно ограничиться парными столкновениями этой частицы с частицами газа.

Состояние газа удобно характеризовать функцией распределения частиц по состояниям  $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{r}, I_1, t)$ ; число частиц, сосредоточенных в единице объема вблизи точки  $\mathbf{r}$  со скоростями от  $\mathbf{v}_1$  до  $\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_1$ , внутреннее состояние которых характеризуется квантовым числом  $I_1$ , равно  $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{r}, t, I_1) d\mathbf{v}_1$ .

Функция распределения частиц является решением уравнения, которое носит название кинетического уравнения Больцмана. Проследим за частицами, которые находятся в точке  $\mathbf{r}$ , движутся со скоростью  $\mathbf{v}_1$ , а их состояние характеризуется внутренними квантовыми числами  $I_1$ . Назовем интегралом столкновений  $I_{ст}$  число частиц, появляющихся в данном состоянии и с данной скоростью в окрестности рассматриваемой точки в единице объема в единицу времени. Тогда изменение функции распределения за промежуток времени  $dt$  равно

$$df = f(\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_1, \mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt, I_1) - f(\mathbf{v}_1, \mathbf{r}, t, I_1) = I_{ст} dt.$$

Так как изменения координаты и скорости пробной частицы равны

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}_1 dt, \quad d\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{F}}{m} dt,$$

где  $\mathbf{F}$ —внешняя сила, действующая на частицу,  $m$ —ее масса, то это уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_1} = I_{\text{ст}}. \quad (1.2)$$

## § 1. Свойства кинетического уравнения

**Задача 1.1.** Выразить интеграл столкновений через дифференциальное сечение столкновения частиц.

Введем  $W(\mathbf{v}_1, I_1; \mathbf{v}_2, I_2 \rightarrow \mathbf{v}'_1, I'_1; \mathbf{v}'_2, I'_2)$ —константу столкновения частиц, находящихся в состояниях  $\mathbf{v}_1, I_1$  и  $\mathbf{v}_2, I_2$ , с переходом их в состояния  $\mathbf{v}'_1, I'_1$  и  $\mathbf{v}'_2, I'_2$ . При этом из принципа детального равновесия (П2.6) следует

$$W(\mathbf{v}_1, I_1; \mathbf{v}_2, I_2 \rightarrow \mathbf{v}'_1, I'_1; \mathbf{v}'_2, I'_2) = W(\mathbf{v}'_1, I'_1; \mathbf{v}'_2, I'_2 \rightarrow \mathbf{v}_1, I_1; \mathbf{v}_2, I_2). \quad (1.3)$$

Если газ состоит из частиц одного сорта, то интеграл столкновений по определению равен

$$I_{\text{ст}} = \int (f_1 f'_2 - f_1 f_2) W d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2, \quad \text{¶}(1.4)$$

где  $f_1 \equiv f(\mathbf{v}_1, \mathbf{r}, I_1, t)$ , и подобным же образом определяются функции распределения  $f_2, f'_1, f'_2$ . В формуле (1.4) подразумевается суммирование по внутренним квантовым числам  $I_2, I'_1, I'_2$ .

Число интегрирований в формуле (1.4) можно сократить, используя законы сохранения импульса и энергии. Эти законы учитываются свойствами вероятности перехода  $W$ . Их можно выделить, введя дифференциальное сечение рассеяния—отношение числа рассеяний на одной рассеивающей частице в элемент телесного угла за единицу времени к потоку падающих частиц. Число рассеяний в единице объема за единицу времени с переходом скорости первой частицы из интервала  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_1$  в  $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_1 + d\mathbf{v}'_1$  и второй—из  $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_2$  в  $\mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_2 + d\mathbf{v}'_2$  и при данном изменении внутренних квантовых чисел равно  $f_1 f_2 W d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2$ . Число рассеивающих частиц в единице объема равно  $f_1 d\mathbf{v}_1$ , а поток рассеиваемых частиц— $|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| f_2 d\mathbf{v}_2$ , так что дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{f_1 f_2 W d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2}{f_1 d\mathbf{v}_1 f_2 |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| d\mathbf{v}_2} = \frac{W d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2}{|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|}.$$



Подставляя это выражение в формулу (1.4), получим кинетическое уравнение Больцмана (1.2) в виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + \frac{F}{m} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_1} = \int (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| d\sigma d\mathbf{v}_2. \quad (1.5)$$

По внутренним степеням свободы  $I'_1, I'_2, I_2$  по-прежнему подразумевается суммирование. Уравнение (1.5) описывает однокомпонентную систему. В случае многокомпонентной системы в интеграле столкновений следует учесть соударение пробной частицы с частицами каждого сорта.

**Задача 1.2.** Показать, что функционал  $[H(t) = \int f(\mathbf{v}_1, t) \times \ln f(\mathbf{v}_1, t) d\mathbf{v}_1]$ , введенный для газа, находящегося вне действия внешних полей, удовлетворяет соотношению  $dH/dt \leq 0$ .

Дифференцируя функционал  $H(t)$  по времени и используя уравнение Больцмана, в котором интеграл столкновений выбран в виде (1.4), получим

$$\frac{dH}{dt} = \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2 W (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) (1 + \ln f_1).$$

Произведя под интегралом замену  $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}_1$ , симметризуем подинтегральное выражение

$$\frac{dH}{dt} = \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2 W (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) \left(1 + \frac{1}{2} \ln f_1 f_2\right).$$

Далее на основе принципа детального равновесия (1.3) находим, произведя в подинтегральном выражении замену  $\mathbf{v}_{1,2} \rightarrow \mathbf{v}'_{1,2}, \mathbf{v}'_{1,2} \rightarrow \mathbf{v}_{1,2}$ :

$$\frac{dH}{dt} = \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2 W (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) \ln \frac{f_1 f_2}{f'_1 f'_2}.$$

Функция вида  $(x-y) \ln(y/x)$  неположительна для любых положительных значений  $x$  и  $y$ . Поэтому функционал  $H(t)$  удовлетворяет соотношению

$$\frac{dH}{dt} \leq 0. \quad (1.6)$$

Это соотношение носит название  $H$ -теоремы Больцмана. Функционал  $H$  с обратным знаком совпадает с энтропией системы, так что соотношение (1.6) подтверждает закон возрастания энтропии для рассматриваемой системы.

**Задача 1.3.** Найти функцию распределения частиц газа по скоростям, если газ находится в термодинамическом равновесии.

В этом случае  $\frac{dH}{dt} = 0$ , что выполняется, если  $\ln \frac{f f_1}{f'_1 f'_1} = 0$ , т. е. если  $\ln f$  является аддитивной функцией интегралов движения.

Используя закон сохранения импульса и энергии при столкновении, можем представить равновесную функцию распределения в виде

$$\ln f = C + C_1 p + C_2 \varepsilon,$$

так что

$$f = A e^{-\alpha(v-v_0)^2},$$

где энергия частицы  $\varepsilon = mv^2/2$ , импульс  $p = mv$  ( $m$  — масса частицы). В полученное выражение вошли три неопределенных константы. Одну из них ( $A$ ) мы можем найти из условия нормировки функции распределения  $\int f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = N$  ( $N$  — плотность частиц). Другую константу мы выразили через скорость направленного движения частиц  $v_0$ . Третью константу  $\alpha$  определим из условия, чтобы в системе координат, в которой нет направленного движения частиц, средняя энергия частиц равнялась  $3/2 T$ . Таким способом мы введем температуру газа. Получим

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} T &= \frac{\int \frac{m}{2} (v - v_0)^2 \exp[-\alpha(v - v_0)^2] dv}{\int \exp[-\alpha(v - v_0)^2] dv} = \\ &= -\frac{m}{2} \frac{d}{d\alpha} \ln \int \exp[-\alpha(v - v_0)^2] dv = -\frac{m}{2} \frac{d}{d\alpha} \ln \alpha^{-3/2} = \frac{3m}{4\alpha}, \end{aligned}$$

откуда  $\alpha = m/2T$ . Таким образом, нормированная на плотность частиц равновесная функция распределения частиц по скоростям, которая носит название функции распределения Максвелла, имеет вид

$$f(\mathbf{v}) = N \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2}{2T} \right] \equiv N \varphi(v_x) \varphi(v_y) \varphi(v_z), \quad (1.7)$$

где

$$\varphi(v_x) = \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{m(v_x - v_{0x})^2}{2T} \right], \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v_x) dv_x = 1. \quad (1.8)$$

Из  $H$ -теоремы Больцмана вытекает весьма важное свойство функции распределения  $f(\mathbf{v}, t)$ : в отсутствие полей система стремится прийти в равновесие, которому соответствует равновесная функция распределения (1.7). Отсюда следует, что функция распределения, которая является решением кинетического уравнения Больцмана (1.2), не удовлетворяет принципу обратимости времени. Действительно, пусть при  $t = -T$  ( $T \rightarrow \infty$ ) система находилась в некотором неравновесном состоянии, которое описывалось функцией распределения  $f_0(\mathbf{v})$ . Согласно  $H$ -теореме Больцмана при  $t = T$  система перейдет в равновесное состояние, описываемое максвелловской функцией (1.7). Если, наоборот, при  $t = -T$  систему поместить в равновесное состояние, то при  $t = T$ , согласно

*H*-теореме Больцмана, она останется в этом состоянии, а не перейдет в состояние, описываемое функцией распределения  $f_0(\mathbf{v})$ , как это следовало бы ожидать на основании принципа обратимости времени (т. е. требования, чтобы при замене  $t \rightarrow -t$  система развивалась в обратном направлении). Отсюда следует, что кинетическое уравнение Больцмана не удовлетворяет принципу обратимости времени, тогда как законы механики, на основании которых они получены, удовлетворяют этому принципу.

Таким образом, мы нашли, что функция распределения, которая является решением кинетического уравнения Больцмана, не в состоянии точно описать систему. Можно видеть, что функция распределения содержит в себе гораздо меньшую информацию, чем та, которая необходима для ее точного описания. Действительно, для точного описания системы мы должны задать начальные состояния для всех частиц, т. е. в этом случае система описывается числом параметров, пропорциональным числу частиц в ней. Когда же мы вводим функцию распределения, которая характеризует вероятность нахождения в данной области пространства частиц с данными параметрами, мы тем самым проводим усреднение по начальным условиям. Поэтому функция распределения, которая является решением кинетического уравнения (1.2), описывает наиболее вероятное состояние системы при заданных макроскопических параметрах.

Для системы, состоящей из большого числа частиц, наиболее вероятное состояние практически совпадает с точным, ибо флуктуации — отклонения от наиболее вероятного состояния — в такой системе малы. К тому же нахождение точного состояния системы, состоящей из большого числа частиц, обычно не представляется практически возможным из-за наличия большого числа параметров, описывающих систему. Число этих параметров увеличивается с ростом частиц в системе. Функция распределения, удовлетворяющая кинетическому уравнению (1.2), зависит от меньшего числа переменных, причем число переменных не изменяется с ростом числа частиц данного сорта. Таким образом, метод описания состояния системы с помощью кинетического уравнения Больцмана (1.2) определяет наиболее вероятное состояние системы и поэтому оказывается точным, если число частиц в системе велико. Удобство метода в том, что, выделяя ограниченное число параметров, характеризующих систему частиц, он дает наиболее важную информацию о развитии этой системы.

**Задача 1.4.** Определить число частиц, находящихся в данном состоянии, если система из большого числа частиц находится в термодинамическом равновесии (распределение Больцмана).

Пусть в системе имеется  $n$  частиц, распределенных по состояниям, причем группе состояний  $k$  отвечает энергия частицы  $\varepsilon_k$ . Тогда, если  $n_k$  — число частиц в данной группе состояний и  $E$  —

полная энергия данной замкнутой системы, то мы имеем следующие соотношения для полного числа частиц и полной энергии системы:

$$n = \sum_k n_k, \quad E = \sum_k \epsilon_k n_k. \quad (1.9)$$

Нас интересует закон распределения частиц по состояниям. При его нахождении мы будем считать, что в каждой группе данных состояний находится большое число частиц,  $n_k \gg 1$ . Кроме того, используем статистику Больцмана, согласно которой вероятность нахождения частицы в данном состоянии не зависит от того, имеются ли в данном состоянии другие частицы. Вероятность данного распределения частиц по состояниям  $P(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$  будет пропорциональна числу способов, которыми можно создать такое распределение.

При нахождении числа таких способов мы отберем сначала от полного числа частиц  $n_1$  частиц, находящихся в состояниях 1. Это можно сделать  $C_n^{n_1}$  способами ( $C_n^{n_1}$  — число сочетаний). Затем из оставшихся  $n - n_1$  частиц мы отберем  $n_2$  частиц, находящихся в состояниях 2, что осуществляется  $C_{n-n_1}^{n_2}$  способами. Продолжая эту операцию, мы находим, что вероятность данного распределения частиц по состояниям  $P(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ , пропорциональная числу способов, на основании которых осуществляется это распределение, равна

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) = A C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_n^{n_k} = A \sum_{i=1}^k \frac{n!}{\prod_i n_i!},$$

где  $A$  — константа нормировки. Вероятность  $P(n_1, \dots, n_k, \dots)$  имеет максимум при некоторых значениях чисел заполнения  $n_k = \bar{n}_k$ , которые и являются наиболее вероятным числом частиц, находящихся в данных состояниях. Используем условие максимума функции распределения. Если число частиц в трех состояниях  $n_i, n_k, n_l$  изменить на малую величину по сравнению с  $\bar{n}_i, \bar{n}_k, \bar{n}_l$  ( $n_i = \bar{n}_i + \delta_i, n_k = \bar{n}_k - \delta_k, n_l = \bar{n}_l + \delta_l$ ), то в первом приближении при разложении по степеням  $\delta_i/n_i$  вероятность  $P$  не изменится, т. е.

$$P(\dots, \bar{n}_i, \bar{n}_k, \bar{n}_l, \dots) = P(\dots, \bar{n}_i + \delta_i, \bar{n}_k - \delta_k, \bar{n}_l + \delta_l, \dots).$$

Это дает  $((n_i + \delta_i)! \approx n_i (n_i)^{\delta_i})$

$$(\bar{n}_i)^{\delta_i} (\bar{n}_l)^{\delta_l} = (\bar{n}_k)^{\delta_k}.$$

Кроме того, из условия баланса частиц и баланса энергии находим следующую связь между величинами  $\delta_i, \delta_k, \delta_l$ :

$$\delta_k = \delta_i + \delta_l, \quad \epsilon_k \delta_k = \epsilon_i \delta_i + \epsilon_l \delta_l.$$

Исключая на основе этих формул величины  $\delta_i$  из полученного ранее соотношения, приведем его к виду

$$\left(\frac{\bar{n}_k}{\bar{n}_i}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_k - \varepsilon_i}} = \left(\frac{\bar{n}_i}{\bar{n}_k}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_i - \varepsilon_k}}.$$

Из этого соотношения следует, что каждое из выражений не зависит от номера выбранных состояний, т. е. при заданных полном числе частиц и энергии системы — есть величина постоянная. Чтобы удовлетворить этому, необходимо зависимость  $\bar{n}_k$  от энергии данного состояния представить в виде

$$\bar{n}_k = B e^{-\varepsilon_k/T}, \quad (1.10)$$

причем константа нормировки  $B$  и температура системы  $T$  определяются из условий (1.9). Формула (1.10) представляет собой равновесное распределение частиц по состояниям и носит название распределения Больцмана. Частным случаем этого распределения является распределение Максвелла, найденное в задаче 1.3. Распределение Больцмана приводит к следующему соотношению между плотностями атомов  $N_i, N_k$ , находящимися в данных состояниях, при наличии термодинамического равновесия:

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{g_i}{g_k} \exp\left(\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_i}{T}\right) \quad (1.11)$$

( $g_i, g_k$  — статистический вес соответствующего состояния).

**Задача 1.5.** Получить формулу для распределения частиц с полужелым спином по состояниям, когда в каждом состоянии может находиться не более одной частицы (распределение Ферми — Дирака).

В том случае, если вероятность нахождения частицы в одном состоянии не мала, распределение Больцмана (1.10) нарушается. Тогда закон распределения частиц по состояниям зависит от статистики этих тождественных частиц. Далее мы определим эту величину в случае, когда в одном состоянии может находиться не более одной частицы.

Пусть энергией  $\varepsilon_k$  обладают частицы, находящиеся в  $g_k$ -состоянии, и пусть  $p(n_k)$  — число вариантов поместить  $n_k$  частиц в состояния с энергией  $\varepsilon_k$ . Вероятность того, что имеет место заданное распределение частиц по состояниям,

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) = C \prod_m p(n_k),$$

причем константа нормировки  $C$  не зависит от конкретного распределения частиц по состояниям.

Как следует из анализа, проведенного в предыдущей задаче, для наиболее вероятных значений чисел заполнения  $n_k = \bar{n}_k$  функ-

ция  $P$  максимальна. При этих значениях чисел заполнения максимальна и величина  $\ln P$ , так что

$$\sum_k \frac{p'(\bar{n}_k)}{p(\bar{n}_k)} \delta n_k = 0,$$

где  $\delta n_k = n_k - \bar{n}_k$  — отклонение числа заполнения от среднего значения ( $|\delta n_k| \ll \bar{n}_k$ ). Наряду с этим следует использовать условия, которые вытекают из формулы (1.9):

$$\sum \delta n_k = 0, \quad \sum \varepsilon_k \delta n_k = 0.$$

Умножим второе из полученных соотношений на  $-\mu/T$ , третье — на  $1/T$  (где  $\mu$  и  $T$  — некоторые константы) и сложим эти соотношения. Получим

$$\sum_k \delta n_k \left[ \frac{p'(\bar{n}_k)}{p(\bar{n}_k)} - \frac{\mu}{T} + \frac{\varepsilon_k}{T} \right] = 0.$$

Поскольку величины  $\delta n_k$  могут принимать произвольные значения, то для удовлетворения данного соотношения необходимо, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль. Это и дает выражение для наиболее вероятных значений чисел заполнения

$$\frac{p'(\bar{n}_k)}{p(\bar{n}_k)} - \frac{\mu}{T} + \frac{\varepsilon_k}{T} = 0.$$

В частности, для распределения Фёрми—Дирака, когда в  $g_k$ -состояниях с энергией  $\varepsilon_k$  находится  $n_k$  частиц, причем в каждом состоянии — не более одной частицы ( $n_k \leq g_k$ ), имеем, что  $p(n_k)$  равно числу сочетаний из  $g_k$  по  $n_k$ . Отсюда

$$\ln p(n_k) = \ln(g_k!) - [\ln(n_k!) - \ln(g_k - n_k)!],$$

и так как при  $n \gg 1$   $\ln(n!) \approx \int_0^n \ln n \, dn$ , то в данном случае

$$\frac{d \ln p(n_k)}{dn_k} = \ln \frac{n_k}{g_k - n_k}$$

и

$$\bar{n}_k = g_k \left[ \exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}\right) + 1 \right]^{-1}.$$

В одном состоянии с энергией  $\varepsilon_k$  находится в среднем  $\left[ \exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}\right) + 1 \right]^{-1}$  частиц. При этом константы ( $T$  — температура частиц и  $\mu$  — химический потенциал распределения) могут быть найдены из условий нормировки (1.9):

$$\begin{aligned} \sum_k g_k \left[ \exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}\right) + 1 \right]^{-1} &= n, \\ \sum_k \varepsilon_k g_k \left[ \exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}\right) + 1 \right]^{-1} &= E. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Вычислим, к примеру, химический потенциал свободных ферми-частиц массой  $m$ , плотность которых равна  $N$ . Энергия частиц в промежутке от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$  (здесь  $\varepsilon = p^2/2m$ ), соответствует  $\int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3} = V \frac{m^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}}$  состояний, где  $V$  — объем выделенной системы. При температуре, стремящейся к нулю, ферми-частицы занимают все низшие состояния. Введем величину  $\varepsilon_F$  — энергию Ферми, такую, что при нулевой температуре все состояния с энергией  $\varepsilon \leq \varepsilon_F$  заполнены, а все состояния с более высокой энергией свободны. Тогда энергию Ферми определим из соотношения

$$V \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = NV,$$

откуда

$$\varepsilon_F = \frac{\pi\hbar^2}{m} \left( \frac{9\pi N^2}{2} \right)^{1/3}.$$

Обратимся теперь к распределению Ферми — Дирака. Как видно, при нулевой температуре  $\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}\right)$  обращается в нуль для  $\varepsilon_k < \mu$  и в бесконечность для  $\varepsilon_k > \mu$ . Отсюда следует, что числа заполнения равны единице для состояний с энергией  $\varepsilon_k < \mu$  и нулю для состояний с энергией  $\varepsilon_k > \mu$ . Таким образом, величина химического потенциала при нулевой температуре совпадает со значением ранее найденной энергии Ферми.

**Задача 1.6.** Получить распределение Больцмана и распределение Максвелла из распределения Ферми — Дирака.

Распределение Больцмана отвечает предельному случаю распределения Ферми — Дирака (если мы имеем частицы с полуцелым спином), когда вероятность нахождения частицы в одном состоянии мала. Рассмотрим газ свободных ферми-частиц с массой  $m$ , плотностью  $N$ , находящихся при температуре  $T$ . Ограничим объем, занимаемый частицами, величиной  $V$ . Число состояний в элементе фазового объема равно  $\frac{d\mathbf{p} d\mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3}$ , где  $d\mathbf{r}$  и  $d\mathbf{p}$  — трехмерный элемент координатного и импульсного пространства, причем энергия частицы  $\varepsilon = p^2/2m$ . Отсюда находим число состояний, соответствующее интервалу энергий от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ , которое равно

$$\int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3} = V \frac{m^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}}.$$

Поскольку полное число частиц в выделенном объеме равно  $NV$ , а характерная энергия порядка  $T$ , то условие справедливости распределения Больцмана (вероятность нахождения частицы

в заданном состоянии мала) имеет вид:

$$\frac{1}{N} \left( \frac{mT}{\hbar^2} \right)^{3/2} \gg 1.$$

В рассматриваемом случае условие нормировки для распределения Ферми—Дирака имеет вид

$$\sum_k \frac{g_k}{\left[ \exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}\right) + 1 \right]} \equiv \int \frac{dp dr}{(2\pi\hbar)^3 \left[ \exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{T}\right) + 1 \right]} = NV.$$

Используя выражение для плотности состояний и вводя новую переменную  $x = \varepsilon/T$ , приведем это соотношение к виду

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{\left[ \exp\left(x - \frac{\mu}{T}\right) + 1 \right]} = V \bar{2} \pi^2 N \left( \frac{\hbar^2}{mT} \right)^{3/2}.$$

Правая часть этого соотношения в рассматриваемом пределе много меньше единицы. Поскольку основной вклад в интеграл вносят значения  $x \sim 1$ , то это возможно, если  $e^{-\mu/T} \gg 1$ . Полагая это соотношение выполненным, получим

$$e^{\mu/T} = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{3/2} N \ll 1,$$

что оправдывает использованное предположение.

С учетом найденного соотношения для  $\mu$  находим, что вероятность нахождения частицы в одном состоянии с энергией  $\varepsilon$  равна

$$W_k = \left[ \exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}\right) + 1 \right]^{-1} \approx \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{3/2} N \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{T}\right).$$

Это дает два числа частиц, находящихся в объеме  $V$  в интервале энергий от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ :

$$\bar{n}_k = \frac{g_k}{\exp\left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}\right) + 1} = \int \frac{dp dr}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{T}\right) = \frac{NV dp_x dp_y dp_z e^{-\varepsilon/T}}{(2\pi mT)^{3/2}}.$$

Полученная формула и является распределением Максвелла.

**Задача 1.7.** Вывести уравнение состояния для идеального газа.

Уравнение состояния газа устанавливает связь между его параметрами—температурой и давлением. Определим давление в газе—силу, действующую на единицу поверхности в единицу времени. Поместим внутрь газа воображаемый элемент поверхности и определим силу, действующую на него с каждой стороны. Атомы упруго отражаются от этой поверхности, так что при отражении сохраняется касательная к поверхности компонента их скорости, а нормальная изменяет знак. Пусть нормаль



к поверхности направлена по оси  $x$ . Тогда изменение импульса атома, отраженного от данной поверхности, равно  $2mv_x$ . Поток атомов, падающих слева на воображаемую поверхность, равен  $Nv_x$ . Поэтому изменение импульса воображаемой поверхности в единицу времени, приходящееся на единицу поверхности, которое отвечает давлению и обусловлено ударами атомов слева от поверхности, равно

$$P = \int_{v_x > 0} 2mv_x Nv_x f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}.$$

Здесь функция распределения атомов по скоростям  $f(\mathbf{v})$  нормирована на единицу. Если давление газа относить к ударам атомов справа от поверхности, оно будет определяться формулой

$$P = \int_{v_x < 0} 2mv_x \cdot Nv_x f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}.$$

Так как функция  $f(\mathbf{v})$  четна относительно  $v_x$  (\*), то оба определения совпадают.

Таким образом, имеем

$$P = \int_{v_x > 0} 2mv_x^2 N f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = N \int mv_x^2 f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = N \langle mv_x^2 \rangle,$$

где знак  $\langle \rangle$  означает усреднение по функции распределения. Если функция распределения изотропна, что во всяком случае имеет место при термодинамическом равновесии в рассматриваемой системе координат, то

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle.$$

Вводя температуру газа как  $T = \frac{1}{3} \langle mv^2 \rangle$ , получаем уравнение состояния

$$P = NT.$$

**Задача 1.8.** Вывести из кинетического уравнения Больцмана основные макроскопические уравнения переноса.

Умножим кинетическое уравнение Больцмана (1.5), записанное в виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \nabla f_1 + \frac{F}{m_1} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} = I_{\text{ст}}(f_1),$$

\*) Если средняя скорость атомов отлична от нуля, то определение давления следует производить в системе координат, где газ покоится как целое. В этой же системе координат определяют и температуру газа.

на произвольную функцию  $\Psi_1$  от скорости частиц данного сорта и проинтегрируем по скоростям. Имеем

$$\int \Psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} d\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \int \Psi_1 f_1 d\mathbf{v}_1 - \int f_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} d\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t} (N_1 \langle \Psi_1 \rangle) - N_1 \left\langle \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right\rangle.$$

Здесь операция  $\langle \rangle$  означает усреднение соответствующей характеристики по скоростям,  $N_1$  — плотность частиц данного сорта. Далее

$$\begin{aligned} \int \Psi_1 v_{1x} \frac{\partial f_1}{\partial x} d\mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \int \Psi_1 v_{1x} f_1 d\mathbf{v}_1 - \int f_1 v_{1x} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} d\mathbf{v}_1 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (N_1 \langle \Psi_1 v_{1x} \rangle) - N_1 \left\langle v_{1x} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right\rangle, \\ \int \Psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial v_{1x}} d\mathbf{v}_1 &= \int \frac{\partial \Psi_1 f_1}{\partial v_{1x}} d\mathbf{v}_1 - \int f_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_{1x}} d\mathbf{v}_1 = -N_1 \left\langle \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_{1x}} \right\rangle. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial (N_1 \langle \Psi_1 \rangle)}{\partial t} + \text{div} (N_1 \langle \Psi_1 \mathbf{v}_1 \rangle) - \\ - N_1 \left[ \frac{\partial \langle \Psi_1 \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_1 \text{grad} \Psi_1 \rangle + \frac{F_1}{m_1} \left\langle \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{v}_1} \right\rangle \right] = \langle I_{\text{ст}} \Psi_1 \rangle. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Усредним это уравнение по внутренним степеням свободы частиц данного сорта. Эта операция не изменит вида полученного уравнения, если под знаком  $\langle \rangle$  понимать теперь усреднение по скоростям и по внутренним степеням свободы частиц. Уравнение (1.13) носит название общего уравнения переноса Энскогога.

Докажем важную теорему, на основании которой можно значительно упростить правую часть уравнения (1.13). Пусть  $\Psi$  — интеграл движения, так что для двух сталкивающихся частиц  $i$ -го сорта

$$\Psi_i(\mathbf{v}_1) + \Psi_i(\mathbf{v}_2) = \Psi_i(\mathbf{v}'_1) + \Psi_i(\mathbf{v}'_2), \quad (1.14)$$

где  $\mathbf{v}_{1,2}$  — скорости частиц до столкновения,  $\mathbf{v}'_{1,2}$  — их скорости после столкновения. Тогда для интеграла столкновений между частицами одинакового сорта справедливо соотношение

$$\langle I_{\text{ст}} \Psi_i \rangle = 0. \quad (1.15)$$

Действительно, согласно определению интеграла столкновения (1.4), имеем

$$\langle I_{\text{ст}} \Psi_1 \rangle = \int \Psi(\mathbf{v}_1) (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) W(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2.$$

Проводя замену  $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}_1$  в подынтегральном выражении, получим

$$\langle I_{\text{ст}} \Psi_1 \rangle = \frac{1}{2} \int [\Psi(\mathbf{v}_1) + \Psi(\mathbf{v}_2)] (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) W d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2.$$

Далее, так как  $W \equiv W(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2) = W(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2 \rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ , то произведя замену  $\mathbf{v}_{1,2} \rightarrow \mathbf{v}'_{1,2}$ ,  $\mathbf{v}'_{1,2} \rightarrow \mathbf{v}_{1,2}$  в подынтегральном выражении, получим

$$\langle I_{\text{ст}} \Psi_1 \rangle = \frac{1}{4} \int [\Psi(\mathbf{v}_1) + \Psi(\mathbf{v}_2) - \Psi(\mathbf{v}'_1) - \Psi(\mathbf{v}'_2)] \times \\ \times (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) W d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2.$$

Отсюда на основании формулы (1.14) и вытекает соотношение (1.15).

Используя уравнение (1.13), выведем основные уравнения переноса для газа, состоящего из частиц одного сорта. Положим в уравнении (1.13)  $\Psi = 1$ . Получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \text{div}(N\mathbf{v}_0) = 0, \quad (1.16)$$

где  $\mathbf{v}_0$  — средняя скорость атомов в данной точке пространства в данный момент времени.

Положим в уравнении (1.13) в качестве функции  $\Psi_1$  импульс частицы  $m\mathbf{v}$ . Введем тензор давлений газа

$$P_{jk} = Nm \langle (v_j - v_{0j})(v_k - v_{0k}) \rangle, \quad (1.17)$$

где индексы  $j, k$  характеризуют соответствующие компоненты вектора скорости. В случае совпадающих индексов величина  $P_{jj}$ , как это следует из результата задачи 1.5, совпадает с давлением газа в данном направлении. Учитывая определение (1.17) для тензора давлений, получим для  $j$ -й компоненты уравнения переноса импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}(mNv_{0j}) + \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}(mNv_{0j}v_{0k}) - NF_j = 0.$$

По двум повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Воспользовавшись уравнением непрерывности  $\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(Nv_{0k}) = 0$ , получим отсюда уравнение движения газа — уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v_{0j}}{\partial t} + v_{0k} \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_k} + \frac{1}{mN} \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k} - \frac{F_j}{m} = 0. \quad (1.18)$$

При выводе уравнения для переноса энергии введем тепловой поток

$$q_j = \frac{1}{2} mN \langle (v - v_0)^2 (v_j - v_{0j}) \rangle. \quad (1.19)$$

Далее, положив в качестве  $\Psi$  в уравнении переноса (1.13) величину  $\Psi = mv^2/2$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( N \frac{mv_0^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( N \left\langle \frac{m(v - v_0)^2}{2} \right\rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( N \frac{mv_0^2}{2} v_{0k} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} v_{0j} P_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( N v_{0k} \left\langle \frac{m(v - v_0)^2}{2} \right\rangle \right) + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} - NF_k v_{0k} = 0.$$

Это выражение приведем к виду

$$\begin{aligned} \frac{mv_0^2}{2} \left\{ \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N v_{0k}}{\partial x_k} \right\} + N m v_{0j} \left\{ \frac{\partial v_{0j}}{\partial t} + v_{0k} \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_k} + \frac{1}{Nm} \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k} - \frac{F_j}{m} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left[ N \left\langle \frac{m(v-v_0)^2}{2} \right\rangle \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ N v_{0k} \left\langle \frac{m(v-v_0)^2}{2} \right\rangle \right] + \\ + P_{jk} \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = 0. \end{aligned}$$

Выражения в фигурных скобках, согласно уравнениям переноса массы (1.16) и импульса (1.14), равны нулю. Вводя температуру газа  $T = \langle \frac{1}{3} m (v-v_0)^2 \rangle$ , получим уравнение для переноса энергии — уравнение теплопроводности

$$\frac{3}{2} N \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla T \right) = - P_{jk} \left[ \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right]. \quad (1.20)$$

**Задача 1.9.** Получить уравнение Эйлера для невязкого газа.

В идеальном невязком газе нет корреляции между движениями в разных направлениях. Поэтому тензор давлений (1.17) имеет вид

$$P_{jk} = \delta_{jk} N m \langle (v_k - v_{0k})^2 \rangle,$$

где  $N$  — плотность частиц,  $m$  — их масса,  $\mathbf{v}_0$  — средняя скорость газа. Учтем, что в системе координат, где газ покоится как целое, функция распределения частиц сферически симметрична. Это дает, что давление во всех направлениях одинаково. Используя определения давления

$$p = N m \langle (v_x - v_{0x})^2 \rangle = N m \langle (v_y - v_{0y})^2 \rangle = N m \langle (v_z - v_{0z})^2 \rangle,$$

получим для тензора давления

$$P_{jk} = p \delta_{jk}. \quad (1.21)$$

Подставляя это выражение в уравнение Эйлера (1.18), преобразуем уравнение Эйлера к виду

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + \frac{1}{Nm} \nabla p - \frac{\mathbf{F}}{m} = 0.$$

**Задача 1.10.** Вывести уравнения переноса импульса и энергии для ионов, движущихся в газе в постоянном электрическом поле.

Кинетическое уравнение для функции распределения ионов при учете упругого рассеяния иона на атоме, согласно (1.5), имеет вид

$$\frac{eE}{M} \frac{\partial f}{\partial v_x} = N \int [f(\mathbf{v}') \varphi(\mathbf{v}_1') - f(\mathbf{v}) \varphi(\mathbf{v}_1)] |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| d\sigma d\mathbf{v}_1,$$

где  $E$  — напряженность электрического поля,  $M$  — масса иона,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_1$  — скорости иона и атома до столкновения,  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{v}_1'$  — их ско-

рости после столкновения,  $f(v)$  — функция распределения ионов,  $\varphi(v)$  — максвелловская функция распределения атомов,  $N$  — плотность атомов. Считаем, что функции распределения  $f(v)$ ,  $\varphi(v)$  нормированы на единицу.

Умножим кинетическое уравнение на  $Mv_x$  и проинтегрируем по скоростям ионов. Получим

$$-eE = \int M(v'_x - v_x) f(v) \varphi(v_1) N |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| d\sigma d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1.$$

Слева мы имеем импульс, получаемый ионом в единицу времени от поля, справа — импульс, отдаваемый ионом в единицу времени атомом газа. Упростим выражение в правой части уравнения. Имеем

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_c + \frac{m}{m+M} \mathbf{g}, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}_c + \frac{m}{m+M} \mathbf{g}', \quad \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \frac{m}{m+M} (\mathbf{g} - \mathbf{g}'),$$

где  $m$  — масса атома,  $\mathbf{v}_c$  — скорость центра инерции сталкивающихся иона и атома,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g}'$  — их относительная скорость до и после столкновения, причем при упругом столкновении  $\mathbf{g} = \mathbf{g}'$ .

Пусть  $\theta$  — полярный,  $\Phi$  — азимутальный углы рассеяния. Тогда  $\mathbf{g}' = \mathbf{g} \cos \theta + \mathbf{k} g \sin \theta$ , где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, перпендикулярный  $\mathbf{g}$ . Так как

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{k} d\Phi = 0, \quad \text{то} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (v_x - v'_x) d\Phi = \frac{m}{m+M} g_x (1 - \cos \theta)$$

и

$$eE = \mu N \int f(\mathbf{v}) \varphi(\mathbf{v}_1) g g_x \sigma^*(g) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1, \quad (1.22)$$

где  $\mu = mM/(m+M)$  — приведенная масса иона и атома,  $\sigma^*(g) = \int (1 - \cos \theta) d\sigma$  — транспортное сечение рассеяния иона на атоме.

Для вывода уравнения переноса энергии умножим кинетическое уравнение на  $Mv^2/2$  и проинтегрируем его по скоростям иона. Получим

$$eEw = \int f(\mathbf{v}) \varphi(v_1) \frac{M(v_1^2 - v'^2)}{2} N g d\sigma d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v},$$

где  $w$  — дрейфовая скорость ионов. Поскольку  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \frac{m}{m+M} \mathbf{g}$ ,

$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_c + \frac{m}{m+M} \mathbf{g}'$ , то  $v^2 - v'^2 = \frac{2m}{m+M} \mathbf{v}_c (\mathbf{g} - \mathbf{g}')$ . Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathbf{g} - \mathbf{g}') d\Phi = \mathbf{g} (1 - \cos \theta),$$

то получаем соотношение

$$eEw = \int f(\mathbf{v}) \varphi(v_1) \mathbf{v}_\perp g N g \sigma^* d\mathbf{v} dv_1, \quad (1.23)$$

причем  $\mathbf{v}_\perp = (M\mathbf{v} + m\mathbf{v}_1)/(m + M)$ ,  $g = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ .

Соотношение (1.22) описывает обмен импульсом, соотношение (1.23) описывает обмен энергией между ионом, атомами и электрическим полем. В левую часть соотношения (1.22) входит импульс, который в единицу времени передается от поля иону, в правую часть — импульс, отдаваемый ионом в единицу времени атомам газа. Левая часть соотношения (1.23) представляет энергию, получаемую в единицу времени ионом от поля, правая часть этого соотношения — энергия, которую ион отдает в единицу времени атомам газа.

**Задача 1.11.** Определить среднюю скорость ионов, движущихся в газе в постоянном электрическом поле. Плотность ионов много меньше плотности частиц газа и мало меняется на длине свободного пробега ионов, частота столкновений ионов с частицами газа не зависит от относительной скорости соударений.

Кинетическое уравнение для функции распределения ионов по скоростям  $f$  в пренебрежении неупругими столкновениями имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \frac{eE}{M} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = I_{\text{ст}}(f), \quad (1.24)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость иона,  $M$  — масса иона,  $E$  — напряженность электрического поля,  $I_{\text{ст}}$  — интеграл столкновений ионов с частицами газа. Поскольку характерный размер изменения плотности ионов велик по сравнению с длиной свободного пробега, то функция распределения пропорциональна плотности ионов в рассматриваемой точке пространства. Считая, что, зависимость функции распределения от координат определяется плотностью ионов  $N_i$ , преобразуем кинетическое уравнение к виду

$$(\mathbf{v}_x - \langle \mathbf{v}_x \rangle) \frac{\partial \ln N_i}{\partial x} f + \frac{eE}{M} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = I_{\text{ст}}(f), \quad (1.25)$$

здесь  $x$  — направление, в котором изменяется плотность ионов,  $\langle \mathbf{v}_x \rangle$  — средняя скорость иона в этом направлении.

Теперь умножим уравнение на  $M\mathbf{v}_x$  и проинтегрируем по скоростям ионов. Эта операция для всех членов, кроме первого, была проделана в предыдущей задаче. Используя ее результаты, получим на основе указанной операции

$$(\langle M\mathbf{v}_x^2 \rangle - M \langle \mathbf{v}_x \rangle^2) \frac{\partial \ln N_i}{\partial x} - eE\mathbf{n} = -\mu N \langle g g_x \sigma^*(g) \rangle,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении оси  $x$ ,  $\mu$  — приведенная масса иона и частицы газа,  $g$  — относительная скорость соударения,  $\sigma^*(g)$  — диффузионное сечение рассеяния иона на частице газа.

Согласно условию данной задачи частота столкновения иона с частицами газа  $\nu = Ng\sigma^*(g)$  не зависит от относительной скорости соударения. Учитывая это и то, что средняя скорость частиц газа равна нулю, получим

$$\mu\nu \langle v_x \rangle = -(\langle Mv_x^2 \rangle - M \langle v_x \rangle^2) \frac{\partial \ln N_i}{\partial x} + eE_x.$$

В частности, если напряженность электрического поля и градиент плотности направлены в одном направлении, то

$$\langle v_x \rangle = -\frac{M(\langle v_x^2 \rangle - \langle v_x \rangle^2)}{\mu\nu} \frac{\partial \ln N_i}{\partial x} + \frac{eE}{\mu\nu}. \quad (1.26a)$$

В случае, когда эти два вектора оказываются перпендикулярными друг другу,

$$\langle v_x \rangle = -\frac{\overline{M} \langle v_x^2 \rangle}{\mu\nu} \frac{\partial \ln N_i}{\partial x}. \quad (1.26b)$$

## § 2. Коэффициенты переноса в газах

При малых градиентах плотности частиц данного сорта, температуры и направленной скорости частиц возникают потоки частиц, энергии и импульса соответственно, которые пропорциональны этим градиентам. Коэффициенты пропорциональности между потоками и градиентами носят название кинетических коэффициентов или коэффициентов переноса. При этом коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$  вводится как коэффициент пропорциональности между потоком частиц  $\mathbf{j}$  и градиентом концентрации  $c$  частиц данного сорта:

$$\mathbf{j} = -\mathcal{D}N\nabla c,$$

где  $N$  — полная плотность частиц. Если концентрация частиц данного сорта мала ( $c \ll 1$ ), т. е. если эти частицы являются малой примесью в газе, то выражение для потока частиц этого сорта принимает вид

$$\mathbf{j} = -\mathcal{D}\nabla N_1,$$

где  $N_1$  — плотность частиц данного сорта.

Коэффициент теплопроводности  $\kappa$  вводится как коэффициент пропорциональности между тепловым потоком  $\mathbf{q}$  и градиентом температуры:

$$\mathbf{q} = -\kappa\nabla T.$$

Коэффициент вязкости  $\eta$  является коэффициентом пропорциональности между силой трения, действующей на струи движущейся

гося газа, и градиентом направленной скорости движения газа. Пусть скорость газа  $\mathbf{v}_0$  направлена по оси  $x$  и изменяется в направлении  $z$  (см. рис. 1.2). Тогда возникает сила, направленная по оси  $x$  и стремящаяся выровнять скорости соседних слоев. Эта сила пропорциональна  $\partial v_{0x}/\partial z$  и приложена к площадке  $xy$ , перпендикулярной к направлению градиента. Вводя силу  $F$ , действующую на единицу площади слоя, определяем коэффициент вязкости  $\eta$  посредством соотношения

$$F = -\eta \frac{\partial v_{0x}}{\partial z}$$

(см. также задачу 1.20).

Явления переноса как стационарный процесс можно рассматривать в случае, когда макроскопические параметры газа заметно изменяются на расстояниях  $L$ , значительно превышающих длину свободного пробега  $\lambda$  частиц в газе:

$$\lambda/L \ll 1. \quad (1.27)$$

При выполнении этого условия времена, за которые будут выровнены макроскопические параметры в разных областях газа, значительно превышают столкновительные времена молекул газа, за которые устанавливается равновесная функция распределения молекул. Поэтому имеется область времен, за которые устанавливается локальное термодинамическое равновесие в каждой области пространства, но сохраняются неизменными градиенты макроскопических параметров и соответствующие им потоки. Практически эта область времен оказывается достаточно широкой, и именно в ней обычно рассматриваются процессы переноса. С математической точки зрения такое ограничение соответствует разложению по малому параметру (1.27).

**Задача 1.12.** Получить кинетическое уравнение, описывающее явления переноса в одноатомном газе при наличии только упругого соударения частиц газа.

Равновесие в рассматриваемой системе устанавливается за времена, за которые частицы газа перемещаются на расстояния порядка  $L$ , и в силу условия (1.27) эти времена значительно превышают время соударения частиц газа (характерное время, через которое происходит очередное соударение пробной частицы с частицей газа). Поскольку локальное равновесие в данной точке пространства устанавливается за времена порядка времени соударения частиц, то можно считать, что в процессе переноса в каждой точке пространства имеет место локальное равновесие и функция распределения частиц по скоростям в данной точке имеет вид

$$f^{(0)} = N(\mathbf{r}) \left[ \frac{m}{2\pi T(\mathbf{r})} \right]^{3/2} \exp \left[ -\frac{m [\mathbf{v} - \mathbf{v}_0(\mathbf{r})]^2}{2T(\mathbf{r})} \right]. \quad (1.28)$$



Здесь  $N(\mathbf{r})$ ,  $T(\mathbf{r})$  — плотность частиц и их температура в данной точке пространства,  $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$  — скорость направленного движения газа.

Разложим функцию распределения частиц по скоростям по малому параметру (1.27):

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + \dots$$

Пусть плотность частиц, температура газа и скорость его направленного движения определяются нулевой функцией распределения (1.28). Тогда для  $i \neq 0$

$$\int f^{(i)} d\mathbf{v} = 0, \quad (1.29a)$$

$$\int f^{(i)} \mathbf{v} d\mathbf{v} = 0, \quad (1.29b)$$

$$\int f^{(i)} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 d\mathbf{v} = 0. \quad (1.29b)$$

Представим поправку к функции распределения в виде  $f^{(1)} = f^{(0)} \theta$ , где множитель  $\theta$  характеризует отклонение функции распределения от максвелловской. Подставим это соотношение в кинетическое уравнение. Рассматриваемое приближение соответствует случаю, когда равновесие между частицами в данной области пространства устанавливается гораздо быстрее, чем равновесие частиц с внешней средой. Поэтому в нулевом приближении можно пренебречь наличием неоднородностей и кинетическое уравнение принимает вид

$$I_{\text{ст}}(f^{(0)}) = 0.$$

Отсюда следует  $f_1^{(0)} f_2^{(0)} = f_1^{(0)'} f_2^{(0)'}$ , что приводит к решению (1.28) для функции распределения частиц по скоростям. Учитывая следующие члены разложения по степеням  $\lambda/L$  в кинетическом уравнении, получим

$$\mathbf{v}_1 \nabla f_1^{(0)} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{v}_1} = \int f_1^{(0)} f_2^{(0)} (\theta_1' + \theta_2' - \theta_1 - \theta_2) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| d\sigma d\mathbf{v}_2. \quad (1.30)$$

**Задача 1.13.** Вычислить коэффициент теплопроводности одноатомного газа, считая, что внешние поля и стационарный поток газа отсутствуют.

При заданных условиях задачи в левой части кинетического уравнения остается лишь член  $\mathbf{v} \nabla f^{(0)}$ , и так как отличны от нуля лишь градиенты температуры, то кинетическое уравнение (1.30) принимает вид

$$f_1^{(0)} \left( \frac{mv_1^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v}_1 \nabla \ln T = \int f_1^{(0)} f_2^{(0)} (\theta_1' + \theta_2' - \theta_1 - \theta_2) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| d\sigma d\mathbf{v}_2. \quad (1.31)$$

При этом мы считаем, что давление  $p = NT$  постоянно по всему объему газа. Решение этого линейного неоднородного интегрального уравнения при учете условий (1.29а, б, в) может быть представлено в виде  $\theta = -A \nabla \ln T$ . При этом в случае малых градиентов вектор  $A$  не зависит от градиентов температуры, плотности и скорости и может быть построен на векторах, которые имеются при отсутствии градиентов этих макроскопических величин. Единственным таким вектором является вектор скорости атома  $v$ , так что, положив  $A = A(v) v$ , получим  $\theta = -v \nabla \ln T A(v)$ . Запишем уравнение (1.31) в безразмерных переменных, введя приведенную скорость  $u = \sqrt{m/2T} v$ , где  $m$  — масса частицы. Получим

$$f_1^{(0)} \left( u_1^2 - \frac{5}{2} \right) u_1 \left( \frac{2T}{m} \right)^{1/2} = \\ = \int f_1^{(0)} f_2^{(0)} [A'_1 u'_1 + A'_2 u'_2 - A_1 u_1 - A_2 u_2] |u_1 - u_2| d\sigma du_2, \quad (1.32)$$

где

$$f^{(1)} = -f^{(0)} v \nabla \ln T A(v) \quad \text{и} \quad \int f^{(0)} du = N.$$

Как видно, задача сводится к нахождению скалярной величины  $A(v)$ , которая является решением интегрального неоднородного уравнения (1.32). Для нахождения этой величины удобно использовать приближенный метод Чепмена—Энскога. Этот метод основан на разложении функции  $A(v)$  по полиномам Сонина:

$$A(u) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m S_n^m(u^2).$$

Полиномы Сонина имеют вид

$$S_n^m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+k+1) k! (m-k)!}, \quad S_n^0 = 1, \quad S_n^1 = n+1-x,$$

и с точностью до постоянного множителя совпадают с обобщенными полиномами Лагерра:

$$S_n^m(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(m+n+1)} L_n^m(x).$$

Условие ортогональности полиномов Сонина:

$$\int_0^{\infty} S_n^m(x) S_n^p(x) e^{-x} x^n dx = \frac{\Gamma(n+m+1)}{m!} \delta_{mp},$$

где  $\delta_{mp}$  — символ Кронекера ( $\delta_{mp} = 0$ ,  $m \neq p$ ;  $\delta_{mp} = 1$ ,  $m = p$ ).

Разложение скалярных величин, характеризующих явления переноса, по полиномам Сонина удобно, ибо это позволяет автоматически удовлетворить условиям (1.29) в каждом члене разложения. В частности, в случае теплопроводности удобно выбрать

$n = 3/2$ . При этом получим, что  $a_0 = 0$ , и условие (1.29б) выполняется для каждого из остальных членов разложения величины  $A$  по полиномам Сонина:

$$A(u) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m S_{3/2}^m(u^2).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \int f^{(0)} \left( u^2 - \frac{5}{2} \right) S_{3/2}^m(u^2) u^2 du = \\ &= \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} S_{3/2}^1(x) S_{3/2}^m(x) x^{3/2} dx = \frac{15}{4} N \delta_{m1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{km} &= \int f_1^{(0)} f_2^{(0)} [u_1 S_{3/2}^k(u_1^2) + u_2 S_{3/2}^k(u_2^2) - u_1' S_{3/2}^k(u_1'^2) - \\ &\quad - u_2' S_{3/2}^k(u_2'^2)] u_1 S_{3/2}^m(u_1^2) |u_1 - u_2| d\sigma du_1 du_2 \sqrt{2T/m}. \end{aligned}$$

Умножив уравнение (1.32) на  $u_1 S_{3/2}^m(u_1^2)$  и проинтегрировав его по  $du_1$ , получим систему уравнений для коэффициентов  $a_k$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \beta_{km} = \frac{15}{4} N \delta_{m1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Решая эту бесконечную систему уравнений, мы можем определить величины коэффициентов  $a_k$ .

Выразим коэффициент теплопроводности газа через величины  $a_k$ . Для теплового потока — плотности потока энергии имеем

$$\begin{aligned} q &= \int \frac{mv^2}{2} v f dv = \int \frac{mv^2}{2} v \theta f^{(0)} dv = -\frac{2T^2}{m} \int u^2 u (u \nabla \ln T) A f^{(0)} du = \\ &= -\frac{2T^2}{3m} \int u^4 \nabla \ln T \sum_{m=1}^{\infty} a_m S_{3/2}^m(u^2) f^{(0)} du = -\kappa \nabla T, \end{aligned} \quad (1.33)$$

где коэффициент теплопроводности  $\kappa$  равен

$$\kappa = \frac{4TN}{3\sqrt{\pi}m} \int_0^{\infty} e^{-z} z^5 dz \sum_{m=1}^{\infty} a_m S_{3/2}^m(z) = \frac{5}{2} a_1 \frac{T}{m} N.$$

Как следует из системы уравнений (1.33), коэффициент  $a_1$  равен

$$a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{15}{4} N \begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} & \dots & \beta_{2n} \\ \beta_{32} & \beta_{33} & \dots & \beta_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n2} & \beta_{n3} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{15}{4} N}{\beta_{11} + \beta_{12} \frac{D_2}{D} + \beta_{13} \frac{D_3}{D} + \dots},$$

где

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{vmatrix} \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{vmatrix} \beta_{21} & \dots & \beta_{2, i-1} & \beta_{2, i+1} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{n, i-1} & \beta_{n, i+1} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

С хорошей точностью можно ограничиться лишь первыми членами разложения в знаменателе данного выражения, что соответствует первому приближению Чепмена—Энскога при разложении искомой величины по малому численному параметру. В первом приближении Чепмена—Энскога получаем  $a_1 = 15N/4\beta_{11}$ ,

$$\text{так что } \kappa = \frac{75T}{8m} \frac{N^2}{\beta_{11}}.$$

Вычислим  $\beta_{11}$ :

$$\sqrt{\frac{m}{2T}} \beta_{11} = \int f_1^{(0)} f_2^{(0)} \left[ \mathbf{u}_1 \left( u_1^2 - \frac{5}{2} \right) + \mathbf{u}_2 \left( u_2^2 - \frac{5}{2} \right) - \mathbf{u}'_1 \left( u_1'^2 - \frac{5}{2} \right) - \right. \\ \left. - \mathbf{u}'_2 \left( u_2'^2 - \frac{5}{2} \right) \right] \mathbf{u}_1 \left( u_1^2 - \frac{5}{2} \right) |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| d\sigma du_1 du_2.$$

Как видно, интеграл не изменяется при перемене местами частиц 1 и 2. Поэтому в подынтегральном выражении можно провести замену  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{u}_1$ . Кроме того, в силу обратимости законов механики при отражении времени  $t \rightarrow -t$ , интеграл не изменится при замене  $\mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{u}' \rightarrow -\mathbf{u}$ . Учитывая это, представим искомое выражение в симметричном виде, заменив в подынтегральном выражении величину  $\mathbf{u}_1 \left( u_1^2 - \frac{5}{2} \right)$  на

$$\frac{1}{4} \left[ \mathbf{u}_1 \left( u_1^2 - \frac{5}{2} \right) + \mathbf{u}_2 \left( u_2^2 - \frac{5}{2} \right) - \mathbf{u}'_1 \left( u_1'^2 - \frac{5}{2} \right) - \mathbf{u}'_2 \left( u_2'^2 - \frac{5}{2} \right) \right].$$

Имеем ,

$$\sqrt{\frac{m}{2T}} \beta_{11} = \int f_1^{(0)} f_2^{(0)} \frac{1}{4} \left[ \mathbf{u}_1 \left( u_1^2 - \frac{5}{2} \right) + \mathbf{u}_2 \left( u_2^2 - \frac{5}{2} \right) - \right. \\ \left. - \mathbf{u}'_1 \left( u_1'^2 - \frac{5}{2} \right) - \mathbf{u}'_2 \left( u_2'^2 - \frac{5}{2} \right) \right]^2 |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| d\sigma du_1 du_2.$$

Используем закон сохранения импульса и энергии, считая сталкивающиеся частицы одинаковыми. Введем  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{w}'$ —безразмерную относительную скорость частиц до и после столкновения,  $\mathbf{G}$ —безразмерную скорость их центра инерции. Из закона сохранения импульса следует  $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$ , а из закона сохранения энергии при упругом рассеянии частиц  $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$ . На основе этого имеем:  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{G} + \frac{\mathbf{w}}{2}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{G} - \frac{\mathbf{w}}{2}$ ,  $\mathbf{u}'_1 = \mathbf{G} + \frac{\mathbf{w}'}{2}$ ,  $\mathbf{u}'_2 = \mathbf{G} - \frac{\mathbf{w}'}{2}$ , так что

$$\left[ \mathbf{u}_1 \left( u_1^2 - \frac{5}{2} \right) + \left( u_2^2 - \frac{5}{2} \right) \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}'_1 \left( u_1'^2 - \frac{5}{2} \right) - \mathbf{u}'_2 \left( u_2'^2 - \frac{5}{2} \right) \right] = \\ = [\mathbf{w} (\mathbf{w}\mathbf{G}) - \mathbf{w}' (\mathbf{w}'\mathbf{G})].$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{N^2} \sqrt{\frac{m}{2T}} \beta_{11} = \exp\left(-2G^2 - \frac{\omega^2}{2}\right) [\omega(\omega G) - \omega'(\omega' G)]^2 \omega d\sigma \frac{d\omega dG}{4\pi^3}.$$

Введем  $\theta$  — угол рассеяния, так что  $\omega\omega' = \omega^2 \cos \theta$ . Выберем в качестве полярной оси направление  $G$ . Положение вектора  $\omega$  характеризуется полярным углом  $\vartheta$ , так что  $\omega G = \omega G \cos \vartheta$ ,  $\omega' G = \omega G (\cos \vartheta \cos \theta + \sin \vartheta \sin \theta \cos \Phi)$ , причем  $d\omega = \omega^2 d\omega d \cos \vartheta d\Phi$ . Получим

$$\beta_{11} = 12 \sqrt{\frac{T}{\pi m}} N^2 \bar{\sigma}_2,$$

где

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{1}{48} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) \omega^7 \sigma_2(\omega) d\omega, \quad \sigma_2 = \int (1 - \cos^2 \theta) d\sigma. \quad (1.34)$$

Отсюда коэффициент теплопроводности

$$\kappa = \frac{25 \sqrt{\pi T}}{32 \bar{\sigma}_2 \sqrt{m}}. \quad (1.35)$$

В случае, если процесс рассеяния атомов можно описать на основе модели твердой сферы, имеем  $d\sigma = \frac{1}{2} \pi r_0^2 d \cos \theta$ , где  $r_0$  — радиус шарика. В этом случае  $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2 = \frac{2}{3} \pi r_0^2$  и

$$\kappa = \frac{75 \sqrt{T}}{64 \sqrt{\pi m} r_0^2}. \quad (1.36)$$

Как следует из формулы (1.35), коэффициент теплопроводности  $\kappa$  не зависит от плотности частиц. Действительно, с изменением плотности частиц пропорционально ей изменяется число носителей, а длина свободного пробега носителей изменяется обратно пропорционально плотности. Поэтому при парных столкновениях частиц эти два эффекта полностью компенсируют друг друга.

**Задача 1.14.** Вычислить коэффициент теплопроводности в одноатомном газе при условии, что частота столкновений] атомов не зависит от относительной скорости частиц.]

Воспользуемся кинетическим уравнением (1.31), которое описывает перенос тепла в рассматриваемом случае. Представим его в виде

$$f_1^{(0)} \left( \frac{m v_1^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) v_{1x} \frac{\partial \ln T}{\partial x} = \int (f_1' f_2' - f_1 f_2) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| d\sigma' d\mathbf{v}_2,$$

где  $f_1^{(0)}$  — максвелловская функция распределения атомов по скоростям,  $f_1, f_2$  — точная функция распределения, учитывающая перенос тепла; температура газа  $T$  изменяется в направлении

оси  $x$ . Умножим это уравнение на  $v_{1x}v_1^2$  и проинтегрируем по скоростям атомов. В левой части уравнения, используя выражение (1.28) для максвелловской функции распределения атомов по скоростям, получим

$$\int v_{1x}v_1^2 dv_1 f_1^{(0)} \left( \frac{\bar{v}mv_1^2}{2} - \frac{5}{2} \right) v_{1x} \frac{\partial \ln T}{\partial x} = \frac{5T}{m^2} \frac{\partial T}{\partial x} N,$$

$N$  — плотность атомов. В правой части используем замену  $v_{1,2} \rightarrow v'_{1,2}$ ,  $v_{1,2} \rightarrow v_{1,2}$  и воспользуемся принципом детального равновесия для дифференциального сечения упругого рассеяния. Это дает для правой части соотношения

$$\int (v'_{1x}v_1'^2 - v_{1x}v_1^2) f_1 f_2 |v_1 - v_2| d\sigma dv_1 dv_2.$$

Далее учтем, что сталкивающиеся частицы — одного сорта, так что дифференциальное сечение упругого рассеяния  $d\sigma$  инвариантно относительно замены номера частиц  $v_1 \rightleftharpoons v_2$ . Сделав эту операцию, приведем правую часть этого соотношения к симметричному виду. В результате получим

$$\frac{5T^2}{m^2} \frac{\partial T}{\partial x} N = \frac{1}{2} \int (v'_{1x}v_1'^2 + v'_{2x}v_2'^2 - v_{1x}v_1^2 - v_{2x}v_2^2) |v_1 - v_2| d\sigma dv_1 dv_2.$$

Вычислим интеграл по углам рассеяния:

$$\int (v'_{1x}v_1'^2 + v'_{2x}v_2'^2 - v_{1x}v_1^2 - v_{2x}v_2^2) d\sigma.$$

Введем относительную скорость столкновения  $g = v_1 - v_2$  и скорость системы центра инерций  $v_{ц.и.} = (v_1 + v_2)/2 = (v'_1 + v'_2)/2$ . Относительная скорость атомов после рассеяния равна

$$g' = g \cos \theta + n g \sin \theta,$$

где  $\theta$  — угол рассеяния,  $n$  — единичный вектор в направлении, перпендикулярном  $g$ . С учетом этого имеем:

$$\begin{aligned} \int (v'_1 v_1'^2 + v'_2 v_2'^2 - v_1 v_1^2 - v_2 v_2^2) d\sigma &= \int [g' (v_{ц.и.} g') - g (v_{ц.и.} g)] d\sigma = \\ &= -g (v_{ц.и.} g) \int (1 - \cos^2 \theta) d\sigma + g \int \cos \theta (v_{ц.и.} n) g \sin \theta d\sigma + \\ &+ g \int n \sin \theta (v_{ц.и.} g) \cos \theta d\sigma + g \int n \sin \theta (v_{ц.и.} n) \cdot g \sin \theta d\sigma. \end{aligned}$$

Поскольку все направления единичного вектора  $n$  в плоскости, перпендикулярной вектору  $g$ , равновероятны, то усреднение по направлению этого вектора обращает в нуль второе и третье слагаемые. В последнем слагаемом разложим вектор  $v_{ц.и.}$  на две компоненты: вдоль  $g$  и перпендикулярно ему (рис. 1.1).

Первая часть обратится в нуль, ибо вектор  $n$  по определению перпендикулярен  $g$ . Вторая часть определит направление искомого вектора. Учитывая это и усредняя по компонентам единич-

ного вектора, получим окончательно

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{v}'_1 v_1'^2 + \mathbf{v}'_2 v_2'^2 - \mathbf{v}_1 v_1^2 - \mathbf{v}_2 v_2^2) d\sigma = \\ = -\mathbf{g} (\mathbf{v}_{ц.и} \mathbf{g}) \sigma^{(2)}(g) - \frac{n_0}{2} \mathbf{v}_{ц.и} g^2 \sigma^{(2)}(g) = \\ = -\frac{1}{2} [\mathbf{g} (\mathbf{v}_{ц.и} \mathbf{g}) + \mathbf{v}_{ц.и} g^2] \sigma_2(g). \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_2(g) = \int (1 - \cos^2 \theta) d\sigma$  — усредненное по углам сечение рассеяния атомов,  $\mathbf{n}_0$  — единичный вектор, перпендикулярный

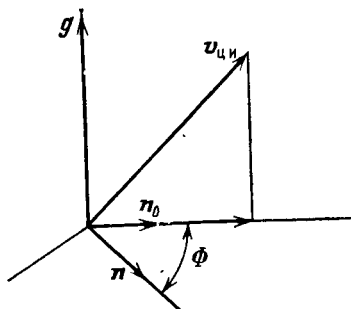


Рис. 1.1. Усреднение  $g^2 \overline{\mathbf{n} (\mathbf{v}_{ц.и} \mathbf{n})} = g^2 v_{ц.и} n_0 \cos^2 \Phi = 1/2 g^2 v_{ц.и} n_0 = 1/2 v_{ц.и} g^2 - 1/2 g (\mathbf{v}_{ц.и} \mathbf{g})$ ,  $\Phi$  — азимутальный угол в направлении, перпендикулярном  $\mathbf{g}$ .

вектору  $\mathbf{g}$  и лежащий в плоскости векторов  $\mathbf{v}_{ц.и}$  и  $\mathbf{g}$ . Это приводит искомое соотношение к виду

$$\frac{5T}{m^2} \frac{\partial T}{\partial x} N = -\frac{1}{4} \int [g_x (\mathbf{v}_{ц.и} \mathbf{g}) + (\mathbf{v}_{ц.и})_x g^2] g \sigma_2(g) f_1 f_2 d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2.$$

Используем условие задачи, согласно которому константа скорости  $\kappa^{(2)} = g \sigma_2(g)$  не зависит от скорости частиц. Выражая относительную скорость и скорость центра инерции через скорости сталкивающихся частиц  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  и пользуясь симметрией подинтегрального выражения относительно номера частицы, приведем его к виду

$$\frac{5T}{m^2} \frac{\partial T}{\partial x} N = -\frac{\kappa^{(2)}}{2} \int [v_{1x} v_1^2 - v_{1x} (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)] f_1 f_2 d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2. \quad (1.37)$$

Второе слагаемое в подинтегральном выражении — более высокого порядка малости, чем первое. Действительно, в нулевом приближении функции распределения сферически симметричны, так что второе слагаемое должно учитывать члены второго порядка малости. Пренебрегая им и используя определение для потока тепла  $\mathbf{q} = \int \mathbf{v}_1 \frac{1}{2} m v_1^2 f_1 d\mathbf{v}_1$ , из рассматриваемого соотношения получим

$$\frac{5T}{m^2} \frac{\partial T}{\partial x} N = -\frac{\kappa^{(2)}}{m} N q_x.$$

Сравнивая это соотношение с определением коэффициента теплопроводности ( $q = -\kappa \nabla T$ ), находим отсюда

$$\kappa = \frac{5T}{m\kappa^{(2)}}. \quad (1.38)$$

Это точный результат, ибо при его получении мы не делаем дополнительных предположений относительно зависимости добавки к функции распределения от скорости. Однако при данном условии ( $\kappa^{(2)} = \text{const}$ ) приближение Чепмена—Энскога (1.35) дает тот же результат.

**Задача 1.15.** Для смеси двух газов получить связь потоков частиц с градиентом соответствующих параметров.

Введем молярную концентрацию частиц данного сорта  $c$ —отношение числа частиц данного сорта к полному числу частиц:  $c = N_1/N$ ,  $N_1$ —плотность частиц первого сорта,  $N = N_1 + N_2$ —полная плотность частиц. На основе этого получим для первого члена левой части кинетического уравнения (1.30)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \nabla f_1^{(0)} &= \mathbf{v}_1 f_1^{(0)} \left[ \nabla \ln p_1 + \left( \frac{mv_1^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) \nabla \ln T \right] = \\ &= \mathbf{v}_1 f_1^{(0)} \left[ \nabla \ln p + \nabla \ln c + \left( \frac{mv_1^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) \nabla \ln T \right], \end{aligned}$$

так как  $\nabla \ln p_1 = \nabla \ln N c T = \nabla \ln p + \nabla \ln c$ .

Определим силу, которая действует на объем газа и поддерживает его в равновесии. Пренебрегая вязкостью газа, воспользуемся для этого уравнением Эйлера (1.18). Имеем

$$M \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = 0 = -M \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{M}{(m)_c} [c \mathbf{F}_1 + (1-c) \mathbf{F}_2] + M \mathbf{f},$$

где  $\langle \rangle$  означает усреднение по скоростям частиц. Здесь  $M$ —масса выделенного объема газа;  $\rho = N_1 m_1 + N_2 m_2 = N m_c$ —плотность газа (масса единицы объема);  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ —сила, действующая на частицы данного сорта со стороны внешних полей;  $m_c = m_1 c + m_2 (1-c)$ , так что  $M/m_c$ —число частиц в выделенной части газа, обладающей массой  $M$ ;  $\mathbf{f}$ —сила, действующая на единицу массы газа, которая необходима для поддержания равновесия в системе. С учетом этой силы получаем для второго члена левой части кинетического уравнения (1.30)

$$\begin{aligned} \frac{F}{m_1} \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{v}_1} &= \left( \frac{F_1}{m_1} + \mathbf{f} \right) \frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \mathbf{v}_1} = \\ &= -\frac{m_1 \mathbf{v}_1}{T} f_1^{(0)} \left[ \frac{F_1}{m_1} + \frac{\nabla p}{N m_c} - \frac{c F_1 + (1-c) F_2}{m_c} \right], \end{aligned}$$

так что левая часть кинетического уравнения (1.30) имеет вид

$$f_1^{(0)} \left[ \frac{\mathbf{v}_1 \mathbf{d}_1}{c} + \left( \frac{mv_1^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v}_1 \nabla \ln T \right].$$



Здесь

$$\mathbf{d}_1 = \nabla c + \frac{c(1-c)(m_2 - m_1)}{m_c} \nabla \ln p + \frac{c(1-c)}{T m_c} (m_1 \mathbf{F}_2 - m_2 \mathbf{F}_1). \quad (1.39)$$

Решение кинетического уравнения в данном случае выполним так же, как и в случае теплопроводности. Для функций  $\theta_i = f_i^{(1)}/f_i^{(0)}$  получаем систему линейных интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{f_i^{(0)}}{c} \mathbf{v}_i \mathbf{d}_i + f_i^{(0)} \mathbf{v}_i \left( \frac{m v_i^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) \nabla \ln T = \\ = \sum_{k=1, 2} \int f_i^{(0)} f_k^{(0)} (\theta_i + \theta_k - \theta'_i - \theta'_k) |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k| d\sigma_{ik} d\mathbf{v}_k, \end{aligned} \quad (1.40)$$

где  $i=1, 2$ , вектор  $\mathbf{d}_1$  дается формулой (1.39), а  $\mathbf{d}_2 = -\mathbf{d}_1$ . Решение уравнения (1.40) можно представить в виде  $\theta_i = \mathbf{B}_i \mathbf{d} + L_i \nabla \ln T$  ( $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1$ ), причем в силу малости градиентов векторы  $\mathbf{B}_i, L_i$  направлены по скорости частиц данного сорта  $\mathbf{v}_i$ . При выборе решений в виде

$$\theta_i = B_i(v_i) \mathbf{v}_i \mathbf{d} + L_i(v_i) \mathbf{v}_i \nabla \ln T \quad (1.41)$$

оказываются автоматически выполненными условиями (1.29а, в), ибо функция распределения  $f_i^{(1)}$  нечетна относительно  $\mathbf{v}_i$ .

Воспользуемся системой координат, в которой отсутствует массовый поток частиц ( $\rho_1 \mathbf{v}_{10} + \rho_2 \mathbf{v}_{20} = 0$ ). Тогда вместо (1.29б) будем использовать условие

$$m_1 \int f_1^{(0)} \theta_1 \mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_1 + m_2 \int f_2^{(0)} \theta_2 \mathbf{v}_2 d\mathbf{v}_2 = 0. \quad (1.42)$$

Разложим функции  $B_i, L_i$  в выражении (1.41) по полиномам Сонина:

$$B_i = \sum_{m=0}^{\infty} b_i^m S_{3/2}^m(u_i^2), \quad L_i = \sum_{m=0}^{\infty} l_i^m S_{3/2}^m(u_i^2).$$

Выбор базиса  $S_{3/2}^m$  удобен, ибо условие (1.42) в этом случае сводится к простым соотношениям:

$$\begin{aligned} c b_1^{(0)} + (1-c) b_2^{(0)} &= 0, \\ c l_1^{(0)} + (1-c) l_2^{(0)} &= 0. \end{aligned}$$

Вычислим среднюю скорость частиц данного сорта в системе координат, где отсутствует массовый поток. Имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_i \rangle &= \frac{1}{N_i} \int f_i^{(0)} [B_i \mathbf{d} + L_i \nabla \ln T] \mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i = \\ &= \frac{1}{N_i} \int f_i^{(0)} \mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i \sum_m [ \mathbf{v}_i d b_i^m S_{3/2}^m(u_i^2) + \mathbf{v}_i \nabla \ln T l_i^m S_{3/2}^m(u_i^2) ] = \\ &= \frac{T}{m_i} [ b_i^{(0)} \mathbf{d} + l_i^{(0)} \nabla \ln T ]. \end{aligned}$$

На основе этого вычислим диффузионный поток — поток частиц данного сорта в системе координат, где отсутствует поток газа как целого (массовый поток). Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= N_1 \langle \mathbf{v}_1 \rangle - c(N_1 \langle \mathbf{v}_1 \rangle + N_2 \langle \mathbf{v}_2 \rangle) = Nc(1-c)(\langle \mathbf{v}_1 \rangle - \langle \mathbf{v}_2 \rangle) = \\ &= Nc(1-c) \left[ \frac{T}{m_1} b_1^{(0)} \mathbf{d} + \frac{T}{m_1} l_1^{(0)} \nabla \ln T - \frac{T}{m_2} b_2^{(0)} \mathbf{d} - \frac{T}{m_2} l_2^{(0)} \nabla \ln T \right] = \\ &= NcT \frac{m_c}{m_1 m_2} [b_1^{(0)} \mathbf{d} + l_2^{(0)} \nabla \ln T]. \end{aligned}$$

В случае отсутствия градиентов температуры и давления имеем только диффузионный поток, который по определению равен  $\mathbf{j} = -\mathcal{D}_{12} N \nabla c$ . Поскольку в этом случае  $\mathbf{d} = \nabla c$ , то коэффициент разложения функции  $B$

$$\mathcal{D}_{12} = -\frac{T m_c c}{m_1 m_2} b_1^{(0)}.$$

Коэффициент пропорциональности между потоком  $\mathbf{j}$  и градиентом  $\nabla \ln T$  носит название коэффициента термодиффузии  $\mathcal{D}_T$ . С помощью этих коэффициентов поток частиц данного сорта удобно представить в виде

$$\mathbf{j} = -\mathcal{D}_{12} N \mathbf{d} - \mathcal{D}_T \nabla \ln T. \quad (1.43)$$

Как видно, коэффициенты диффузии и термодиффузии выражаются через первые коэффициенты разложения функции распределения по полиномам Сонина. Поэтому решение кинетического уравнения дает возможность определить коэффициенты диффузии и термодиффузии.

**Задача 1.16.** Получить выражение для коэффициента диффузии в приближении Чепмена—Энскога.

Будем следить за движением группы выделенных пробных частиц, плотность которых мала по сравнению с плотностью частиц газа. Поэтому столкновениями между этими частицами можно пренебречь, концентрация их мала и диффузионный поток равен

$$\mathbf{j} = -\mathcal{D} \nabla N_1, \quad (1.44)$$

здесь  $\mathcal{D}$  — коэффициент диффузии,  $N_1$  — плотность пробных частиц. Кинетическое уравнение (1.30) для функции распределения пробных частиц с учетом их диффузии имеет вид

$$\mathbf{v}_1 f_1^{(0)} \frac{\nabla N_1}{N_1} = \int (f_1' f_2' - f_1 f_2) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| d\sigma d\mathbf{v}_2,$$

где  $f_1^{(0)}$  — максвелловская функция распределения пробных частиц,  $f_1$  — функция распределения пробных частиц с учетом диффузии,  $f_2$  — максвелловская функция распределения частиц газа.

Пусть градиент плотности направлен по оси  $x$ . Умножим полученное уравнение на импульс пробной частицы в этом направ-

лении  $Mv_{1x}$  и проинтегрируем по скоростям. В левой части соотношения получим  $T \frac{\partial N_1}{\partial x}$ . Учитывая полученный в ней результат, представим искомое соотношение в виде

$$T \frac{\partial N_1}{\partial x} = -\mu \int f_1 f_2 g_x g \sigma^*(g) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2, \quad (1.45)$$

где  $\mathbf{g} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  — относительная скорость столкновения,  $\sigma^*(g)$  — диффузионное сечение столкновения пробной частицы с частицей газа,  $\mu$  — приведенная масса пробной частицы и частицы газа.

В приближении Чепмена—Энскога представим функцию распределения пробных частиц в виде

$$f(\mathbf{v}_1) = f^{(0)}(\mathbf{v}_1) \left[ 1 - v_{1x} \frac{\partial \ln N_1}{\partial x} h(\mathbf{v}_1) \right].$$

Подставляя это выражение в правую часть соотношения (1.45) и считая в первом приближении, что  $h(v_1) = \text{const}$ , получим:

$$T \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\mu m_2}{m_1 + m_2} \langle g_x^2 g \sigma^*(g) \rangle h.$$

Мы использовали соотношение  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{ц.и} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{g}$ , где  $\mathbf{v}_{ц.и}$  — скорость центра инерции,  $m_1, m_2$  — масса пробной частицы и частицы газа. Здесь скобки означают усреднение с максвелловской функцией распределения, причем было использовано, что  $\langle \mathbf{v}_{ц.и} \rangle = 0$ . Из этого соотношения находим величину  $h$ :

$$h = \frac{3Tm_1}{\mu^2 N \langle g^3 \sigma^* \rangle}.$$

Поток пробных частиц в рассматриваемом случае равен

$$j_x = \int v_{1x} f(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1 = - \frac{\partial \ln N_1}{\partial x} h \int v_{1x}^2 f_1^{(0)} d\mathbf{v}_1 = - \frac{[hT}{m_1} \frac{\partial N_1}{\partial x}.$$

Подставляя сюда выражение для величины  $h$  и сравнивая полученное соотношение с определением коэффициента диффузии, для коэффициента диффузии в первом приближении Чепмена—Энскога можно записать

$$\mathcal{D}_{12} = \frac{3T^2}{\mu^2 \langle g^3 \sigma^*(g) \rangle N} = \frac{3 \sqrt{\pi T^3}}{8N \sqrt{2\mu} \bar{\sigma}}, \quad (1.46)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{8} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) w^5 \sigma^*(w) dw,$$

где  $\sigma^*(w) = \int (1 - \cos \theta) d\sigma$  — диффузионное сечение рассеяния при столкновении атомов разного сорта,  $w = g/\sqrt{2T/\mu}$  — приведенная относительная скорость столкновения,  $N$  — плотность частиц газа.

В случае модели твердой сферы  $\bar{\sigma} = \sigma^* = \pi r_0^2$ , так что

$$\mathcal{D}_{12} = \frac{3}{8Nr_0^2} \left( \frac{T}{2\pi\mu} \right)^{1/2}.$$

**Задача 1.17.** Получить выражение для коэффициента диффузии в случае, когда частота столкновений частиц не зависит от скорости столкновений.

Будем, как и ранее, считать, что плотность пробных частиц мала по сравнению с плотностью частиц газа. Тогда поток пробных частиц равен

$$j_x = -\mathcal{D} \frac{\partial N_1}{\partial x} = N_1 \langle v_{1x} \rangle,$$

где  $x$  — направление, в котором медленно меняется плотность пробных частиц. Используем выражение для средней скорости частиц (1.26а), полученное в задаче 1.11 при рассматриваемом предположении:

$$\langle v_{1x} \rangle = - \frac{m_1 (\langle v_{1x}^2 \rangle - \langle v_{1x} \rangle^2)}{\mu\nu} \frac{\partial \ln N_1}{\partial x},$$

где  $\nu = Ng\sigma^*(g)$  — частота столкновения пробной частицы с частицами газа ( $N$  — плотность частиц газа,  $\sigma^*(g)$  — диффузионное сечение столкновения частиц). Частота столкновения  $\nu$  в рассматриваемом случае не зависит от скорости соударения.

Используя приведенные соотношения, получим для коэффициента диффузии пробных частиц в газе:

$$\mathcal{D} = \frac{m_1 (\langle v_x^2 \rangle - \langle v_x \rangle^2)}{\mu\nu}. \quad (1.47)$$

Это соотношение получено без дополнительных предположений и справедливо в общем случае, в том числе и при условиях, когда функция распределения сферически несимметрична (движение заряженных частиц во внешних полях). В случае, когда невозмущенная функция распределения близка к максвелловской (движение пробных частиц в газе при условиях, близких к равновесию), это соотношение принимает вид

$$\mathcal{D} = T/\mu\nu.$$

Оно совпадает с результатом первого приближения Чепмена — Энскога, если в формуле (1.46) считать, что частота столкновения частиц не зависит от относительной скорости соударения.

**Задача 1.18.** Определить коэффициент вязкости одноатомного газа при наличии только упругих соударений между его атомами.

Рассмотрим направленное движение газа, в котором отсутствуют градиенты температуры и давления. В этом случае левая часть

кинетического уравнения (1.30) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \nabla f^{(0)} &= v_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = v_i \frac{m(v_k - v_{0k})}{T} \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} f^{(0)} = \\ &= \frac{m(v_i - v_{0i})(v_k - v_{0k})}{T} \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} f^{(0)} + \frac{m(v_k - v_{0k})}{T} f^{(0)} v_{0i} \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Здесь индексы  $i, k$  характеризуют соответствующие проекции векторов, причем по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Для функции распределения  $f^{(0)}$  было использовано выражение (1.28). Воспользуемся уравнением Эйлера, согласно которому

$$v_{0i} \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k}.$$

Поскольку давление постоянно в пространстве, второе слагаемое в полученном выражении равно нулю. Представим левую часть кинетического уравнения в более симметричном виде:

$$v_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = \left[ (u_i u_k - \frac{u^2}{3} \delta_{ik}) \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} u^2 \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \right] f^{(0)},$$

где  $u_i = (v_i - v_{0i}) \sqrt{m/2T}$ . Из уравнения непрерывности имеем:  $\operatorname{div} N \mathbf{v}_0 = N \operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \nabla N = 0$ , и так как по условию задачи градиенты давления и температуры равны нулю, то  $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$ . Учитывая это, получим для кинетического уравнения в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} (u_i u_k - \frac{u^2}{3} \delta_{ik}) \left( \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} \right) f^{(0)} &= \\ &= \int f^{(0)} f_{1i}^{(0)} (\theta' + \theta'_k - \theta - \theta_1) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| d\sigma d\mathbf{v}_1. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Решение этого уравнения следует искать в виде

$$\theta = -C_{ik} \left( \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} \right),$$

причем тензор  $C_{ik}$  построен на векторах  $v_i$ . Тензор  $C_{ik}$  симметричен, так что он является комбинацией тензоров  $v_i v_k$  и  $\delta_{ik}$ . Однако чтобы соотношения (1.29а, в) оказались выполненными, он должен быть пропорционален следующей комбинации этих тензоров:

$$C_{ik} = C(u) \left( u_i u_k - \frac{u^2}{3} \delta_{ik} \right), \quad \mathbf{u} = \sqrt{m/2T} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0).$$

Отсюда

$$\theta = -C(u) \left( u_i u_k - \frac{u^2}{3} \delta_{ik} \right) \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} \right). \quad (1.49)$$

Представим  $C(u)$  в виде разложения по полиномам Сонина:

$$C(u) = \sum c_m S_{5/2}^m(u^2). \quad (1.50)$$

Удобство выбора базиса  $S_{5/2}^m$  обусловлено тем, что коэффициент вязкости в этом случае выражается через первый коэффициент

разложения. Покажем это. Тензор давления

$$P_{ik} = \langle m (v_i - v_{0i}) (v_k - v_{0k}) \rangle$$

может быть представлен в виде суммы ( $\text{div } \mathbf{v}_0 = 0$ )

$$P_{ik} = p \delta_{ik} - \eta \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} \right),$$

где  $p$  — давление газа,  $\eta$  — вязкость газа. С другой стороны, имеем в случае  $i \neq k$

$$\begin{aligned} P_{ik} &= m \int (v_i - v_{0i}) (v_k - v_{0k}) f d\mathbf{v} = \\ &= -2T \int u_i u_k f^{(0)} d\mathbf{v} C(u) \left( u_i u_j - \frac{u^2}{3} \delta_{ij} \right) \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_i} \right) = \\ &= -4T \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} \right) \int u_i^2 u_k^2 C(u) f^{(0)} d\mathbf{v}, \end{aligned}$$

ибо в сумме по индексам  $l$  и  $j$  отличны от нуля только те слагаемые, для которых  $l=i$ ,  $j=k$  или  $l=k$ ,  $j=i$ . Для других слагаемых при интегрировании по углам получаем нуль. При нахождении данного выражения мы учитывали, что  $i \neq k$ . На основании этого выражения получаем для коэффициента вязкости

$$\eta = 4T \int u_i^2 u_k^2 C(u) f^{(0)} d\mathbf{v} = \frac{4T}{15} \int u^4 C(u) f^{(0)} d\mathbf{v}.$$

Используем для функции  $C(u)$  разложение (1.50). Тогда

$$\eta = \frac{4T}{15} \frac{2N}{V\pi} \sum_m c_m \int_0^\infty z^{5/2} e^{-z} S_{5/2}^m(z) dz = TNc_0, \quad (1.51)$$

т. е. коэффициент вязкости выражается через нулевой коэффициент разложения функции  $C(u)$  по полиномам Сонина.

Кинетическое уравнение для вязкости (1.48) будем решать тем же методом, что и в случае теплопроводности. Умножим уравнение (1.48) слева на тензор  $S_{5/2}^m(u^2) u_{jl}$ , где использовано обозначение  $u_{jl} = u_j u_l - \frac{1}{3} u^2 \delta_{jl}$  и  $j \neq l$ , и проинтегрируем по скоростям. Введем обозначения:

$$\beta_q = \int u_{ik} u_{ikl} f^{(0)} S_{5/2}^q(u^2) d\mathbf{u} = N \int u_i^2 u_k^2 S_{5/2}^q(u^2) e^{-u^2} \frac{4}{V\pi} u^2 du = \frac{N}{4} \delta_{q0}$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_{qp} &= \int f^{(0)} f_1^{(0)} [S_{5/2}^p(u^2) u_{ik} + S_{5/2}^p(u_1^2) u_{1ik} - \\ &\quad - S_{5/2}^p(u'^2) u'_{ik} - S_{5/2}^p(u_1'^2) u'_{1ik}] | \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 | d\sigma S_{5/2}^q(u^2) u_{ik} d\mathbf{u} d\mathbf{u}_1. \end{aligned}$$

По индексам  $i$  и  $k$  ( $i \neq k$ ) здесь суммирование не производится.

Для коэффициентов разложения (1.50) получаем систему уравнений

$$\beta_q = \sum_p c_p \gamma_{qp}.$$

Интересующий нас коэффициент  $c_0$ , найденный в результате решения этой системы уравнений, равен

$$c_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_0 / \left( \gamma_{00} + \frac{1}{D_n} \sum_{s=1}^n D_{ns} \right),$$

где детерминант  $D_n = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix}$ , а детерминант  $D_{ns}$  получается из детерминанта

$$\begin{vmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} & \cdots & \gamma_{0n} \\ \gamma_{10} & \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n0} & \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix}$$

в результате вычеркивания нулевой строки и  $s$ -го столбца. Согласно приближению Чепмена—Энскога при решении данной системы уравнений с хорошей точностью можно ограничиться первым членом разложения в знаменателе. Поэтому в первом приближении Чепмена—Энскога интересующий нас коэффициент  $c_0$  равен

$$c_0 = \frac{\beta_0}{\gamma_{00}} = \frac{N}{4\gamma_{00}}.$$

Вычислим величину

$$\gamma_{00} = \int f^{(0)} f_1^{(0)} (u_{ik} + u_{1ik} - u'_{ik} - u'_{1ik}) u_{ik} | \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 | d\sigma d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}.$$

Используя симметрию подынтегрального выражения относительно замены  $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \leftrightarrow \mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_1$ , а также симметрию относительно замены  $\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{u}', \mathbf{u}_1 \leftrightarrow \mathbf{u}'_1$ , приведем это выражение к виду

$$\gamma_{00} = \frac{1}{4} \int f^{(0)} f_1^{(0)} (u_{ik} + u_{1ik} - u'_{ik} - u'_{1ik})^2 | \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 | d\sigma d\mathbf{u} d\mathbf{u}_1.$$

Проведем вычисления в системе координат, в которой полярная ось  $z$  соответствует индексу  $i$ , а направление  $x$  отвечает индексу  $k$ . Введем приведенные относительную скорость  $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$  и скорость центра инерции  $\mathbf{G} = (\mathbf{u} + \mathbf{u}_1)/2$ . Так как  $d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u} =$

$= d\mathbf{w} d\mathbf{G} \left( \mathbf{u} = \mathbf{G} + \frac{\mathbf{w}}{2}, \mathbf{u}_1 = \mathbf{G} - \frac{\mathbf{w}}{2} \right)$ , получим

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= \frac{1}{4} \int f^{(0)} f_1^{(0)} \left[ \left( G_z + \frac{w_z}{2} \right) \left( G_x + \frac{w_x}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( G_z - \frac{w_z}{2} \right) \left( G_x - \frac{w_x}{2} \right) - \left( G_z + \frac{w_z}{2} \right) \left( G_x + \frac{w'_x}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( G_z - \frac{w'_z}{2} \right) \left( G_x - \frac{w'_x}{2} \right) \right]^2 \sqrt{\frac{2T}{m}} w d\sigma d\mathbf{w} d\mathbf{G} = \\ &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{2T}{m}} \int f^{(0)} f_1^{(0)} (w_x w_z - w'_x w'_z)^2 w d\sigma d\mathbf{w} d\mathbf{G}, \end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{w}'$  — относительная скорость движения частиц после рассеяния. Имеем

$$|\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w} \cos \theta + \boldsymbol{k} w \sin \theta,$$

где  $\theta$  — угол рассеяния,  $\boldsymbol{k}$  — единичный вектор, перпендикулярный  $\boldsymbol{w}$ , который с равной вероятностью может принимать любое направление в плоскости, перпендикулярной  $\boldsymbol{w}$ . Получаем

$$\begin{aligned} \overline{(\omega_z \omega_x - \omega'_z \omega'_x)^2} &= 2\overline{\omega_z^2 \omega_x^2} - 2\overline{\omega_x \omega_z \omega'_x \omega'_z} = \\ &= 2\overline{\omega_x^2 \omega_z^2} \sin^2 \theta - 2w^2 \sin^2 \theta \overline{\omega_x \omega_z k_x k_z}, \end{aligned}$$

здесь черта сверху означает усреднение по углам относительной скорости  $\boldsymbol{w}$  и по азимутальному углу рассеяния. Таким образом,

$$\gamma_{00} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2T}{m}} \int f^{(0)} f_1^{(0)} (\omega_x^2 \omega_z^2 - \omega^2 \omega_x \omega_z k_x k_z) \sigma_2 w \, dw \, d\boldsymbol{G},$$

где  $\sigma_2 = \int (1 - \cos^2 \theta) \, d\sigma$ .

Далее

$$f^{(0)} f_1^{(0)} = \frac{N^2}{\pi^3} \exp(-u^2 - u_1^2) = \frac{N^2}{\pi^3} \exp\left(-2G^2 - \frac{w^2}{2}\right).$$

Проинтегрируем по  $d\boldsymbol{G}$  и  $w^2 \, dw$ . Получаем

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= \frac{1}{8} \frac{N^2}{\pi^3} \sqrt{\frac{2T}{m}} \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) w^7 \sigma_2(w) \, dw \overline{(n_x^2 n_z^2 - n_x n_z k_x k_z)} = \\ &= 12 \sqrt{\frac{T}{\pi m}} N^2 \overline{\sigma_2} \overline{(n_x^2 n_z^2 - n_x n_z k_x k_z)}, \end{aligned}$$

где  $\overline{\sigma_2} = \frac{1}{48} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) w^7 \sigma_2(w) \, dw$ , а  $\boldsymbol{n}$  — единичный вектор, направленный по  $\boldsymbol{w}$ . Усредняем по углам

$$\overline{n_x^2 n_z^2} = \frac{1}{15}, \quad \overline{n_x k_x n_z k_z} = \frac{1}{30}.$$

Отсюда

$$\gamma_{00} = \frac{6N^2}{5\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{T}{m}} \overline{\sigma_2}$$

и коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{5\sqrt{\pi T m}}{24\overline{\sigma_2}}. \quad (1.52)$$

В частности, в случае, если рассеяние атомов изотропно и сечение рассеяния не зависит от относительной скорости столкновения  $d\sigma = \frac{1}{2} \pi r_0^2 d \cos \theta$  (модель твердых сфер), для коэффициента вязкости получаем

$$\eta = \frac{5\sqrt{\pi T m}}{16\sqrt{\pi} r_0^2}. \quad (1.53)$$



Из полученных результатов (1.35), (1.52) можно найти важное соотношение, связывающее коэффициенты теплопроводности и вязкости:

$$\kappa = 15\eta/4m. \quad (1.54)$$

В газовой динамике температуру обычно измеряют [в градусах. Для перехода от энергетических единиц температуры, которыми мы пользуемся, к градусам мы должны умножить коэффициент теплопроводности на переводной множитель  $k_B$ —постоянную Больцмана. При этом соотношение (1.54) примет вид

$$\kappa = 5c_V\eta/2m, \quad c_V = \frac{3}{2}k_B. \quad (1.55)$$

Соотношение (1.54) и (1.55) между коэффициентами теплопроводности и вязкости справедливы, вообще говоря, лишь в первом приближении Чепмена—Энскога. Однако поскольку приближение Чепмена—Энскога дает практически надежный результат, эти соотношения выполняются с хорошей точностью.

**Задача 1.19.** Определить [коэффициент теплопроводности] в  $\tau$ -приближении.

$\tau$ -приближение основано на представлении интеграла столкновений в виде  $I_{ст} = (f - f^{(0)})/\tau$ . Здесь  $f^{(0)}$ —равновесная функция распределения,  $\tau$ —эффективное время, которое порядка времени столкновения между частицами. Если система выведена из состояния равновесия, то кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{f^{(0)} - f}{\tau}, \quad f = f^{(0)} + Ce^{-t/\tau},$$

т. е.  $\tau$  оказывается характерным временем, за которое [система возвращается в равновесное состояние.

В случае, если в газе имеются градиенты температуры, уравнение (1.31) для отклонения функции распределения от равновесной  $f = f^{(0)}(1 + \theta)$  принимает вид

$$f^{(0)} \left[ \left( \frac{mv^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} \nabla \ln T - \frac{f^{(0)} \theta}{\tau} \right].$$

Отсюда

$$\theta = -\tau \left( \frac{mv^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} \nabla \ln T$$

и поток [тепла

$$\mathbf{q} = \int \frac{mv^2}{2} \mathbf{v} f dv = - \int \tau \frac{mv^2}{2T} \frac{v^2}{3} \nabla T \left( \frac{mv^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) f^{(0)} d\mathbf{v} = -\kappa \nabla T.$$

Коэффициент теплопроводности равен

$$\kappa = \int \frac{mv^2}{2T} \frac{v^2}{3} \left( \frac{mv^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) f^{(0)} \tau d\mathbf{v}.$$

Если считать, что  $\tau$  не зависит от скорости столкновения частиц, то

$$\kappa = 5T\tau N/2m.$$

Полученная оценка помогает понять физическую картину явления теплопроводности. Поток частиц газа из данной точки пространства и в нее порядка  $N\bar{v}$ , где  $\bar{v} \sim \sqrt{T/m}$  — характерная тепловая скорость частиц в газе. Однако частицы газа, уходящие из данной точки и приходящие в нее, обладают разными средними энергиями. Разность температур в данной точке и в точках, расположенных на расстоянии порядка длины свободного пробега частиц  $\lambda$ , откуда в данную точку приходят частицы, порядка  $\lambda \nabla T$ . Поэтому поток тепла, стремящийся выровнять температуры в разных точках газа, оказывается порядка  $N\bar{v}\lambda \nabla T \sim N\bar{v}^2 \tau \nabla T$ , а коэффициент теплопроводности  $\kappa \sim N\bar{v}^2 \tau \sim N\tau T/m$ .

**Задача 1.20.** Определить коэффициент вязкости в  $\tau$ -приближении (см. задачу (1.19)).

Пусть имеется градиент скорости по оси  $x$  в направлении  $z$  (рис. 1.2). Тогда коэффициент вязкости определяется соотношением

$$F = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z},$$

где  $F$  — сила, действующая на единичную площадку в направлении оси  $z$ .

Кинетическое уравнение (1.5) в  $\tau$ -приближении имеет вид

$$\mathbf{v} \nabla f^{(0)} = -\frac{f^{(1)}}{\tau},$$

и так как  $f^{(0)} = N \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2}{2T} \right]$ , то получаем

$$v_z \frac{m(v_x - v_0)}{T} \frac{\partial v_{0x}}{\partial z} f^{(0)} = -\frac{f^{(1)}}{\tau}$$

и

$$f^{(1)} = -\frac{\partial v_{0x}}{\partial z} \frac{mv_z(v_x - v_0)}{T} \tau f^{(0)}.$$

Сила  $F$  равна передаваемому импульсу через единицу площади в единицу времени. Поток частиц через данную площадку равен  $Nv_z$ , а переносимый каждой частицей импульс  $m(v_x - v_0)$ . Отсюда

$$\begin{aligned} F &= \int v_z m(v_x - v_0) f d\mathbf{v} = \int v_z m(v_x - v_0) f^{(1)} d\mathbf{v} = \\ &= -\frac{\partial v_{0x}}{\partial z} \int \frac{mv_z^2}{T} m(v_x - v_0)^2 \tau f^{(0)} d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент вязкости, вычисленный в  $\tau$ -приближении, равен

$$\eta = T \int \frac{mv_z^2}{T} \frac{m(v_x - v_0)^2}{T} \tau f^{(0)} d\mathbf{v} = \frac{4T}{15} \int \frac{m^2 (v - v_0)^4}{4T^2} \tau f^{(0)} d\mathbf{v}.$$

Если считать, что  $\tau$  не зависит от скорости столкновения частиц, то

$$\eta = T\tau N;$$

Заметим, что отношение между коэффициентами теплопроводности и вязкости в  $\tau$ -приближении, если  $\tau$  не зависит от скорости столкновения, равно  $\kappa/\eta = 5/2m$ , что в полтора раза меньше отношения, получаемого в первом приближении Чепмена — Энского. В случае модели твердых сфер ( $\tau \sim 1/v$ ) это соотношение еще сильнее нарушается:  $\kappa/\eta = 5/4m$ . Отсюда видно, что  $\tau$ -приближение можно использовать только для оценки результата.

Использованный здесь простой подход позволяет понять физическую природу данного явления. Поток частиц из данной точки пространства и в нее порядка  $N\sqrt{T/m}$ . Однако в данную точку пространства приходят частицы, отстоящие от нее на расстоянии порядка длины пробега. В этих точках импульс частиц, связанный с их направленным движением, отличается от импульса частиц в данной точке на величину порядка  $m \frac{\partial v_{0x}}{\partial z} \lambda$ . Таким образом, поток импульса в направлении  $z$ , который стремится выровнять скорость направленного движения в различных точках, оказывается порядка  $N\sqrt{Tm}\lambda \frac{\partial v_{0x}}{\partial z}$ . Отсюда следует полученный выше результат, т. е. коэффициент вязкости  $\eta \sim \sqrt{Tm} N\lambda \sim T\tau N$ .

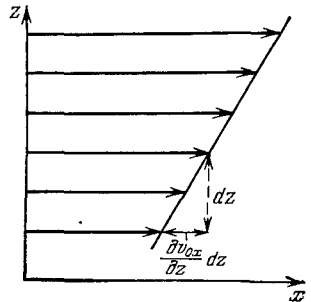


Рис. 1.2. Распределение поля скоростей в потоке газа при наличии вязкости.

**Задача 1.21.** Определить изменение теплопроводности газа, связанное с внутренними степенями свободы молекул, считая, что константа скорости перехода между внутренними степенями свободы молекул при их столкновении значительно меньше константы упругого соударения молекул,

Перенос тепла в данном случае осуществляется переходом возбужденных молекул из более нагретой в менее нагретую область, где они и отдают свое возбуждение. Поток молекул, находящихся в  $i$ -м внутреннем состоянии, равен

$$j_i = -\mathcal{D}N\nabla c_i,$$

где  $c_i = N_i/N$  — концентрация частиц в  $i$ -м состоянии,  $N_i$  — плотность молекул в  $i$ -м состоянии,  $N$  — полная плотность молекул,  $\mathcal{D}$  — коэффициент диффузии молекул, который мы считаем не зависящим от состояния. Наличие градиента концентрации молекул на данном уровне обусловлено градиентом температуры, так что

$$\nabla c_i = \nabla T \frac{\partial c_i}{\partial T}, \quad j_i = -\mathcal{D} N \nabla T \frac{\partial c_i}{\partial T}.$$

Тепловой поток, связанный с переносом энергии на внутренних степенях свободы, по определению равен

$$q_{\text{вн}} = \sum_i \varepsilon_i j_i = -\mathcal{D} N \nabla T \frac{\partial}{\partial T} \left( \sum_i \varepsilon_i c_i \right),$$

где  $\varepsilon_i$  — энергия возбуждения  $i$ -го уровня. По определению средней энергии возбуждения внутренних степеней свободы равна

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_i \varepsilon_i N_i}{\sum_i N_i} = \sum_i \varepsilon_i c_i.$$

Величина  $c_{\text{вн}} = \bar{\varepsilon} / \partial T$  представляет собой теплоемкость, обусловленную внутренними степенями свободы. Отсюда

$$q_{\text{вн}} = -\mathcal{D} N c_{\text{вн}} \nabla T = -\kappa_{\text{вн}} \nabla T,$$

здесь  $\kappa_{\text{вн}} = \mathcal{D} N c_{\text{вн}}$  — коэффициент теплопроводности, связанный с переносом на внутренних степенях свободы.

Если температура на внутренних степенях свободы  $T_{\text{вн}}$  не совпадает с поступательной температурой  $T$ , то выражение для коэффициента теплопроводности за счет внутренних степеней свободы несколько видоизменяется. Именно, в этом случае

$$\kappa_{\text{вн}} = \mathcal{D}(T) N c_{\text{вн}}(T_{\text{вн}}) \frac{\partial T_{\text{вн}}}{\partial T}. \quad (1.56)$$

**Задача 1.22.** Определить изменение коэффициента теплопроводности газа, состоящего из двухатомных молекул, за счет переноса на колебательных и вращательных степенях свободы. Воспользоваться приближением Чепмена—Энскога и моделью твердых сфер для упругого соударения молекул.

Используем формулы (1.35) [для коэффициента теплопроводности  $\kappa_{\text{упр}}$ , обусловленной упругими столкновениями молекул, и (1.46) для коэффициента диффузии в рассматриваемом приближении. На основе этих формул получим для отношения

$$\frac{\kappa_{\text{вн}}}{\kappa_{\text{упр}}} = \frac{\mathcal{D} N c_{\text{вн}}}{\kappa_{\text{упр}}} = \frac{8c_{\text{вн}}}{25} = \frac{8}{25} (c_{\text{вр}} + c_{\text{кол}}). \quad (1.57)$$

Здесь  $\kappa_{\text{вн}}$  — коэффициент теплопроводности, обусловленный внутренними степенями свободы,  $c_{\text{вн}}$  — связанный с внутренними сте-

пенями свободы коэффициент теплоемкости, который в данном случае равен сумме вращательной  $c_{вр}$  и колебательной  $c_{кол}$  теплоемкостей.

Средняя вращательная энергия для двухатомной молекулы равна  $T$ , если считать, что эта величина значительно превышает расстояние между вращательными уровнями. Поэтому  $c_{вр} = 1$ . Колебательная теплоемкость по определению равна

$$\begin{aligned} c_{кол} &= \frac{\partial}{\partial T} \sum_n \left( \hbar \omega n + \frac{1}{2} \right) \exp \left( -\frac{\hbar \omega n}{T} \right) \left[ \sum_n \exp \left( -\frac{\hbar \omega n}{T} \right) \right]^{-1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial}{\partial (1/T)} \ln \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hbar \omega}{T} \right) \right] = \\ &= \left( \frac{\hbar \omega}{T} \right)^2 \exp \left( -\frac{\hbar \omega}{T} \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hbar \omega}{T} \right) \right]^{-2}. \end{aligned}$$

Отсюда для коэффициента теплопроводности газа, составленного из двухатомных молекул, находим:

$$\kappa = \kappa_{упр} \left\{ 1 + \frac{8}{25} \left[ 1 + \frac{x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right] \right\}, \quad \text{где } x = \frac{\hbar \omega}{T}.$$

При этом соотношение (1.57) между коэффициентами теплопроводности и вязкости приобретает вид:

$$\frac{\kappa}{\eta} = \frac{15}{4m} + \frac{6}{5m} \left[ 1 + \frac{x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right].$$

**Задача 1.23.** Имеется одноатомный газ с малой примесью двухатомных молекул. Определить изменение коэффициента теплопроводности, обусловленное диссоциацией молекул на атомы.

Перенос тепла, связанный с диссоциацией, отвечает переходу молекулы из менее нагретой области в более нагретую и диссоциации ее в более нагретой области газа. При этом каждая такая молекула переносит энергию, равную энергии диссоциации молекул  $D$ , которая значительно превышает тепловую энергию атомов. Поток молекул равен

$$\mathbf{j}_m = -\mathcal{D}_m N \nabla \frac{N_m}{N},$$

где  $N$  — полная плотность частиц,  $N_m$  — плотность молекул,  $\mathcal{D}_m$  — коэффициент диффузии молекул в атомном газе. Отсюда находим тепловой поток, связанный с тем, что каждая молекула переносит энергию  $D$  (с точностью до величин порядка  $T/D$ ):

$$\mathbf{q}_{дис} = D \mathbf{j}_m = -D \mathcal{D}_m \nabla N_m \quad (N_m \ll N).$$

Согласно задаче 2.9 соотношение между плотностью молекул  $N_m$  и атомов  $N_a$  имеет вид  $N_a^2/N_m = f(T) e^{D/T}$  ( $f(T)$  — степенная функция температуры). Отсюда с точностью до членов

порядка  $T/D$  имеем

$$-\frac{\nabla N_m}{N_m} = -\frac{D}{T^2} \nabla T, \quad q_{\text{дис}} = -\mathcal{D}_m N_m \left(\frac{D}{T}\right)^2 \nabla T.$$

Это дает для коэффициента теплопроводности, связанного с диссоциацией молекул, который определяется соотношением  $q_{\text{дис}} = -\kappa_{\text{дис}} \nabla T$ :

$$\kappa_{\text{дис}} = \mathcal{D}_m N_m \left(\frac{D}{T}\right)^2. \quad (1.58)$$

Коэффициент теплопроводности одноатомного газа в рассматриваемом случае

$$\kappa = \kappa_{\text{ат}} + \kappa_{\text{дис}},$$

где  $\kappa_{\text{ат}}$  — коэффициент теплопроводности, обусловленный переносом тепла атомами в результате соударения между ними,  $\kappa_{\text{дис}}$  — коэффициент теплопроводности за счет диссоциируемых молекул. Раскрывая выражения для  $\kappa_{\text{ат}}$  и  $\kappa_{\text{дис}}$ , сравним эти выражения, обозначив плотность атомов через  $N_a$ :

$$\frac{\kappa_{\text{дис}}}{\kappa_{\text{ат}}} \sim \frac{N_m}{N_a} \left(\frac{D}{T}\right)^2.$$

Поскольку  $D/T \gg 1$ , то из приведенной оценки следует, что даже при малой концентрации молекул они способны внести вклад в теплопроводность, сравнимый с теплопроводностью одноатомного газа.

### § 3. Перенос импульса и тепла в газах

**Задача 1.24.** Вывести уравнение переноса импульса в вязком газе.

Для этой цели мы должны воспользоваться уравнением Эйлера (1.18), учтя в тензоре давлений вязкость газа. Для системы координат, представленной на рис. 1.2, часть тензора давлений, пропорциональная вязкости газа, равна

$$P'_{xz} = -\eta \frac{\partial v_{0x}}{\partial z}.$$

При этом для условий, представленных на рис. 1.2, отлична от нуля только компонента скорости в направлении  $x$ , а сама скорость изменяется только в направлении  $z$ .

Пользуясь тем, что тензор давлений симметричен, получим общее выражение для этой величины, не связанное с выбором определенной системы координат. Общее выражение для тензора давлений с учетом его симметрии имеет вид

$$P'_{ik} = -\eta \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} + a \delta_{ik} \frac{\partial v_{0l}}{\partial x_l} \right),$$

где по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Это выражение переходит в ранее приведенное при условиях рис. 1.2.

Для нахождения коэффициента  $a$  мы воспользуемся следующим физическим соображением. Рассматриваемый механизм вязкости обусловлен трением между соседними слоями газа, движущимися с разными скоростями. Атомы или молекулы, переходя в соседние области газа, переносят туда свой импульс, что и вызывает трение. Если газ затормозить как целое, то рассматриваемый механизм вязкости будет отсутствовать. Это означает, что след вязкой части тензора давлений равен нулю,  $(\sum_i P'_{ii} = 0)$ . Используя это, получаем  $a = -2/3$  и

$$P'_{ik} = -\eta \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{0l}}{\partial x_l} \right). \quad (1.59)$$

Включим в тензор давлений давление газа  $p$  в соответствии с формулой (1.21) и найденную вязкую часть (1.59). Это дает

$$P_{ik} = p \delta_{ik} + P'_{ik}.$$

Подставляя это выражение в уравнение Эйлера, получим уравнение переноса импульса

$$\frac{\partial v_{0j}}{\partial t} + v_{0k} \frac{\partial v_{0j}}{\partial x_k} + \frac{1}{mN} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\eta}{mN} \frac{\partial^2 v_{0j}}{\partial x_k^2} - \frac{1}{3mN} \eta \frac{\partial^2 v_{0k}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{F_j}{m} = 0,$$

где обозначения те же, что и в уравнении (1.18) и по дважды повторяющимся импульсам подразумевается суммирование. В векторной форме это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + \frac{1}{mN} \nabla p - \frac{\eta}{mN} \Delta \mathbf{v}_0 - \frac{\eta}{3mN} \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}_0 - \frac{\mathbf{F}}{m} = 0. \quad (1.60)$$

Уравнение (1.60) носит название уравнения Навье—Стокса.

**Задача 1.25.** Вывести уравнение [переноса тепла] для движущегося газа, в котором перенос тепла происходит за счет теплопроводности.

Для одноатомного газа при условии, что занимаемый газом объем в процессе развития системы сохраняется, это уравнение может быть получено из более общего уравнения (1.20). При рассматриваемых условиях задачи выведем это уравнение из простых физических соображений.

Пусть  $\bar{\epsilon}$  — средняя энергия, которой обладает частица газа при заданных условиях. Выделим небольшой объем газа  $V$  и напишем для него уравнение баланса энергии, учитывая, что эта энергия уносится тепловым потоком  $\mathbf{q}$  через поверхность выделенного объема. Поскольку энергия, запасенная в единице объема, равна  $\bar{\epsilon}N$  ( $N$  — плотность частиц), то уравнение баланса энергии

для выделенного объема имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{\epsilon} N \, dr = - \oint_S \mathbf{q} \, ds,$$

где  $S$  — поверхность, ограничивающая выделенный объем, и знак минус в правой части отмечает тот факт, что выход тепла через поверхность уменьшает энергию, запасенную в данном объеме.

Воспользовавшись теоремой Гаусса — Остроградского, приведем данное уравнение к виду

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\epsilon} N) + \operatorname{div} \mathbf{q} \right] dr = 0.$$

Поскольку искомый интеграл равен нулю для любого выделенного объема, то выражение внутри скобок равно нулю. Это и дает уравнение для переноса тепла:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\epsilon} N) + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0.$$

Раскроем выражение для теплового потока. При рассматриваемых условиях задачи тепловой поток состоит из двух частей. Одна из них связана с теплопроводностью и определяется формулой (1.33). Другая обусловлена тем, что имеется поток частиц  $Nv_0$ , причем каждая частица несет в себе энергию  $\bar{\epsilon}$ . Это создает тепловой поток  $\bar{\epsilon} Nv_0$ .

Подставляя обе составляющие теплового потока в уравнение переноса тепла, преобразуем его к виду

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial T} N \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla T \right) - \kappa_1 \Delta T = 0.$$

При выводе этого уравнения мы использовали уравнение непрерывности (1.16). В частности, если движущийся газ сосредоточен в замкнутом объеме, то  $\left. \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial T} \right|_V = c_V$ , где  $c_V$  — теплоемкость, приходящаяся на одну частицу при постоянном объеме (для одноатомного газа  $c_V = 3/2$ ). В этом случае уравнение переноса тепла принимает вид

$$c_V N \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla T \right) - \kappa \Delta T = 0. \quad (1.61)$$

**Задача 1.26.** Определить силу трения, действующую на сферическую макроскопическую частицу радиуса  $r_0$ , которая движется в неподвижном газе с постоянной скоростью  $\mathbf{v}_0$ .

Перейдем в систему координат, где частица покоится, а газ натекает на нее со скоростью  $\mathbf{v}_0$ . Тогда на поверхности частицы скорость газа равна нулю, вдали от нее — равна  $\mathbf{v}_0$ , и имеется переходная область газа, где его скорость меняется от нуля



до  $v_0$ . Переход молекул между струями газа, движущимися с разными скоростями, создает силу трения, которая действует на газ и соответственно на макроскопическую частицу. Для вычисления этой силы необходимо знать распределение по скоростям для струй газа, обтекающей частицу. Далее мы проведем оценку для искомой силы.

Искомая сила трения определяется вязкостью газа, причем согласно определению коэффициента вязкости  $\eta$  (см. задачу 1.20) давление газа на единицу площади поверхности составляет  $\eta \partial v_{0\tau} / \partial r$ , где  $\tau$  — касательное направление к поверхности шара,  $r$  — направление по радиус-вектору, и производная берется на поверхности шара. По порядку величины это давление равно  $\eta v_0 / r_0$ . Умножив данную величину на площадь поверхности шара, получим оценку для силы трения, действующей на движущуюся в газе сферическую частицу:

$$F \sim \eta v_0 r_0.$$

Точное решение задачи позволяет найти числовой коэффициент в выражении для силы трения, которая равна

$$F = 6\pi\eta v_0 r_0. \quad (1.62)$$

Эта формула носит название формулы Стокса.

**Задача 1.27.** Определить скорость падения в газе макроскопической сферической частицы под действием силы тяжести.

При падении частицы сила трения газа, определяемая его вязкостью, уравновешивается силой тяжести частицы. Используя формулу Стокса для силы трения, получим соотношение

$$mg = 6\pi r_0 \eta v.$$

Здесь  $m$  — масса частицы,  $g$  — ускорение свободного падения,  $r_0$  — радиус частицы,  $v$  — скорость ее падения,  $\eta$  — коэффициент вязкости газа. Введем плотность частицы  $\rho$ , так что  $m = \frac{4}{3}r_0^3\rho$ . С учетом этого из приведенного соотношения получим для скорости падения частицы:

$$v = \frac{2\rho g r_0^2}{9\eta}.$$

Эта формула справедлива для макроскопической частицы, размер которой велик по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа ( $r_0 \gg \lambda$ ). С другой стороны, сама скорость падения должна быть относительно небольшой, чтобы были малы соответствующие этому движению числа Рейнольдса.

$$\text{Re} = \frac{v r_0}{\nu} = \frac{v r_0 \rho_r}{\eta} \ll 1.$$

Здесь  $\nu = \eta / \rho_r$  — кинематическая вязкость газа, так что  $\rho_r$  — массовая плотность газа. Последнее условие ограничивает радиус

частицы сверху:

$$r_0 \ll \left( \frac{\eta^2}{\rho \rho_T g} \right)^{1/3}.$$

В частности, для падения капли воды в воздухе при нормальных условиях это условие дает:  $r_0 \ll 6 \cdot 10^{-3}$  см.

**Задача 1.28.** Пылинка сферической формы брошена в поток газа, движущийся со скоростью  $v_0$ . Выяснить, по какому закону скорость пылинки будет релаксировать к скорости потока. Силой тяжести, действующей на пылинку, пренебречь. Масса частицы  $M$ , ее радиус  $r_0$ , вязкость газа равна  $\eta$ .

Для выяснения искомой закономерности необходимо решить уравнение движения пылинки, которое имеет вид

$$M \frac{dv}{dt} = 6\pi r_0 \eta (v_0 - v).$$

Здесь  $v_0$  — скорость пылинки в направлении потока газа, правая часть уравнения представляет собой силу трения, которая действует на частицу и определяется формулой Стокса.

Решая данное уравнение с граничными условиями  $v=0$  при  $t=0$  и  $v=v_0$  при  $t=\infty$ , получим

$$v = v_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right], \quad \tau = \frac{M}{6\pi r_0 \eta}.$$

Полученное соотношение справедливо для макроскопической частицы, размер которой значительно превышает длину свободного пробега молекул в газе.

**Задача 1.29.** Установить связь между перепадом температуры в разрядном промежутке, ограниченном двумя параллельными бесконечными пластинами, и тепловыделением в нем. Теплоотвод осуществляется за счет теплопроводности газа.

Для нахождения искомой связи необходимо решить уравнение теплового баланса, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left( \kappa \frac{dT}{dx} \right) + p = 0.$$

Здесь  $\kappa$  — теплопроводность газа,  $p$  — тепловыделение в единице объема,  $x$  — координата. Пусть расстояние между пластинами равно  $L$ . Выберем начало координат на плоскости симметрии, так что разряд сосредоточен в области  $-L/2 \leq x \leq L/2$ . При этом в силу симметрии задачи  $p(x) = p(-x)$ , так что  $T(x) = T(-x)$ . Это дает

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0.$$

Кроме того, поскольку разрядный ток на стенках равен нулю, то  $p(L/2) = 0$ .

Наряду с этим из физических соображений следует, что тепловыделение убывает по мере удаления от центра разряда. Учитывая это, зададим функцию  $p(x)$  в виде

$$p_l^i(x) = p_0 \left[ 1 - \left( \frac{|x|}{l} \right)^m \right],$$

где  $l = L/2$ . Решаем уравнение теплопроводности с указанным выражением для  $p(x)$  и заданными граничными условиями. При этом в силу симметрии задачи рассматриваем только область  $x > 0$ . После первого интегрирования имеем

$$-\kappa \frac{dT}{dx} = p_0 x - \frac{p_0 x^{m+1}}{(m+1)l^m}.$$

Это дает для теплового потока на стенке  $q$ :

$$q = -\kappa \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=l} = p_0 l \frac{m}{m+1}.$$

Второе интегрирование приводит к следующему соотношению:

$$\int_{T_{ст}}^{T_0} \kappa dT = \frac{p_0 l^2 m (m+3)}{2(m+1)(m+2)} = \frac{ql}{2} \frac{m+3}{m+2},$$

где  $T_{ст}$  — температура на стенках,  $T_0$  — температура в центре области разряда.

Проанализируем полученное соотношение. Правая часть соотношения зависит от профиля распределения тока в разряде, который определяет профиль тепловыделения. Эта зависимость характеризуется множителем  $(m+3)/(m+2)$ . Если тепловыделение равномерно в объеме ( $m = \infty$ ), то этот множитель равен единице. В другом предельном случае, когда разряд сжат к центру ( $m = 0$ ), этот множитель равен  $3/2$ . Отсюда видно, что в реальной ситуации рассматриваемый множитель равен  $5/4 \pm 1/4$ , т. е. для разных реальных профилей разрядного тока может меняться в пределах 20% от среднего значения. Выбрав значение этого множителя равным  $5/4$ , представим искомое соотношение в виде

$$\int_{T_{ст}}^{T_0} \kappa dT = \frac{5qL}{16}.$$

Зададим температурную зависимость теплопроводности в рассматриваемой области температур в виде степеней функции:

$$\kappa(T) \sim T^k, \quad k = d \ln \kappa / d \ln T.$$

Тогда приходим к следующему соотношению между перепадом температур в разрядной трубке и тепловыделением в ней:

$$\frac{T_0 \kappa(T_0) - T_{ст} \kappa(T_{ст})}{d \ln \kappa / d \ln T} = \frac{5qL}{16}.$$

При этом заметим, что величина  $2q$  представляет собой мощность, которая выделяется в разряде и приходится на единицу площади стенок.

**Задача 1.30.** Рассмотреть предыдущую задачу для цилиндрической разрядной трубки.

В рассматриваемом случае необходимо решить уравнение теплопроводности:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \kappa \rho \frac{dT}{d\rho} \right) + p = 0,$$

где  $\rho$  — расстояние от центра разрядной трубки. Зададим мощность тепловыделения в полной аналогии с предыдущей задачей в виде

$$p = p_0 \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{r_0} \right)^m \right],$$

где  $r_0$  — радиус разрядной трубки. Из соображений симметрии имеем граничное условие

$$\left. \frac{dT}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0.$$

После первого интегрирования уравнения теплопроводности получим:

$$-\rho \kappa \frac{dT}{d\rho} = \frac{p_0 \rho^2}{2} - \frac{p_0 \rho^2}{(m+2)} \left( \frac{\rho}{r_0} \right)^m.$$

Отсюда находим поток тепла на стенки разрядной трубки:

$$q = -\kappa \left. \frac{dT}{d\rho} \right|_{\rho=r_0} = \frac{p r_0}{2} \frac{m}{m+2}.$$

Второе интегрирование уравнения теплопроводности с учетом граничного условия для производной температуры в центре трубки дает

$$\int_{T_{\text{ст}}}^{T_0} \kappa(T) dT = \frac{p_0 r_0^2 m (m+4)}{4 (m+2)^2} = \frac{q r_0 (m+4)}{2 (m+2)},$$

где  $T_0$ ,  $T_{\text{ст}}$  — температура в центре разрядной трубки и на ее стенках соответственно.

Проанализируем зависимость от профиля разрядного тока и связанного с ним профиля тепловыделения. Эта зависимость дается множителем  $(m+4)/(m+2)$  в правой части полученного соотношения. Если тепловыделение равномерно распределено по сечению трубки, то  $m = \infty$  и этот множитель равен единице. Если разряд сжат к центру трубки, то  $m = 0$  и данный множитель равен двум.

На самом деле в реальном случае рассматриваемый множитель сосредоточен в более узких пределах. Действительно, для

распределения электронов в разрядной трубке неконтрагированного разряда имеем (см. задачу (6.1))]

$$N_e \sim J_0(2,4\rho/r_0),$$

где  $J_0(x)$  — функция Бесселя. Если считать, что тепловыделение пропорционально плотности электронов, и аппроксимировать функцию Бесселя в области  $\rho < r_0$  зависимостью  $N_e \sim 1 - (\rho/r_0)^m$ , то в рассматриваемом случае получим  $m = 1,5$ . Реально распределение электронов может быть только более резким, что дает  $0 < m < 1,5$  и соответственно

$$1,6 < \frac{m+4}{m+2} < 2,0,$$

Выбирая значение этого сомножителя, равное 1,8, получим, что с точностью, равной примерно 10%, справедливо соотношение

$$\int_{T_{\text{ст}}}^{T_0} \kappa dT = 0,9q r_0.$$

Введем  $\mathcal{P} = 2\pi r_0 q$  — мощность, которая выделяется на единице длины разрядной трубки. Получим

$$\int_{T_{\text{ст}}}^{T_0} \kappa dT \equiv \frac{T_0 \kappa(T_0) - T_{\text{ст}} \kappa(T_{\text{ст}})}{d \ln \kappa / d \ln T} = 0,14 \mathcal{P}.$$

В частности, при малом перепаде температуры,  $\Delta T = T_0 - T_{\text{ст}} \ll T_0$ , эта величина равна

$$\Delta T = 0,14 \mathcal{P} / \kappa.$$

**Задача 1.31.** (Задача Релея.) Газ находится между двумя бесконечными параллельными пластинами, находящимися на расстоянии  $L$  и при разных температурах  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ). На каждую молекулу газа со стороны внешнего поля действует сила  $F$ , направленная перпендикулярно к пластинам в сторону от первой пластины ко второй. Выяснить, при каких условиях неподвижное состояние газа будет устойчивым.

При достаточно высокой разности температур теплоотвод от одной пластинки к другой будет осуществляться за счет движения газа — конвекции. Выясним, когда такое движение возможно. Для этого будем считать, что скорость движения газа и связанное с ним изменение температуры малы по сравнению с характерными значениями этих величин. Тогда, рассматривая конвективное движение как возмущение, накладываемое на неподвижный газ, мы сможем определить, при каких условиях возможна конвекция.

Возьмем за основу стационарные уравнения: уравнение непрерывности для газа

$$\operatorname{div} N \mathbf{v}_0 = 0,$$

уравнение Навье—Стокса (1.60)

$$(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + \frac{\nabla p}{MN} - \frac{\eta \Delta \mathbf{v}_0}{MN} - \frac{\eta \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}_0}{MN} - \frac{\mathbf{F}}{M} = 0$$

и уравнение для переноса тепла (1.62)

$$c_V N \mathbf{v}_0 \nabla T = \kappa \Delta T.$$

Здесь  $N$  — плотность газа,  $\mathbf{v}_0$  — скорость направленного движения газа,  $p$  — давление газа,  $T$  — температура,  $\eta$  — вязкость,  $\kappa$  — теплопроводность газа,  $M$  — масса молекулы газа.

Представим каждую из величин в виде  $A = A_0 + A'$ , где  $A_0$  отвечает неподвижному газу,  $A'$  создается за счет конвекции. В нулевом приближении, считая при этом  $\mathbf{v}_0 = 0$ , получим

$$\frac{\nabla p}{MN} - \frac{\mathbf{F}}{M} = 0; \quad \Delta T = 0.$$

Решение второго уравнения дает для распределения температуры в неподвижном газе

$$T = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{L} x,$$

причем ось  $x$  направлена перпендикулярно плоскости пластин, так что вторая пластина соответствует  $x = 0$ , первая —  $x = L$ .

В следующем приближении из уравнения непрерывности имеем:  $N_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \nabla N_0 = 0$ , и так как плотность неподвижного газа постоянна ( $\nabla N_0 = 0$ ), то это уравнение сводится к условию несжимаемости газа:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0. \quad (1.63a)$$

В уравнении Навье—Стокса воспользуемся разложением

$$\frac{\nabla p}{MN} - \frac{\mathbf{F}}{M} = \frac{\nabla p_0}{MN_0} + \frac{\nabla p'}{MN_0} - \frac{[\nabla p_0] N'}{MN_0 N_0} - \frac{\mathbf{F}'}{M} = \frac{\nabla p'}{MN_0} - \frac{\mathbf{F}' N'}{M N_0}.$$

Далее  $N' = T' \left( \frac{\partial N}{\partial T} \right) \Big|_p = \frac{T'}{T} N_0$  ( $T$  — температура в неподвижном газе), ибо возмущения создаются медленными движениями, в процессе которых при отсутствии внешних сил в системе поддерживается постоянное давление, и уравнение состояния  $p = NT$ . Учитывая это, получим уравнение Навье—Стокса в виде

$$\nabla p' - \eta \Delta \mathbf{v}_0 - FN_0 \frac{T'}{T} = 0. \quad (1.63б)$$

Уравнение для переноса тепла (1.62) в первом приближении может быть представлено в виде

$$-c_V N_0 v_{0x} \frac{(T_2 - T_1)}{L} = \kappa \Delta T'. \quad (1.63в)$$

Решая полученную систему трех уравнений и выясняя условия существования решения, мы сможем определить и условия, при которых реализуется конвекция.

Приведем систему трех полученных уравнений (1.63) к одному уравнению. Применим ко второму уравнению операцию  $\text{div}$ . Учитывая первое уравнение, получим

$$\Delta p' = \frac{FN_0}{T} \frac{\partial T'}{\partial x}.$$

При этом здесь и в дальнейшем будем считать, что  $(T_2 - T_1)/T_2 \ll 1$ , т. е. температура неподвижного газа в рассматриваемой области мало меняется. Поэтому зависимостью плотности и температуры газа от координаты, а также зависимостью от координаты для величин  $\chi$ ,  $\eta$ , являющихся функцией температуры, можно пренебречь по сравнению с зависимостью от координаты для величины  $T'$ , которая заметно изменяется при смещении на расстояние порядка  $L$ .

Применим к уравнению для переноса тепла операцию  $\Delta$ . Подставив найденное выражение для величин  $\Delta v_{0x}$  в уравнение Навье—Стокса, получим

$$\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\eta \chi L}{c_V N_0 (T_2 - T_1)} \Delta^2 T' - FN_0 T' = 0.$$

Применяя к этому уравнению операцию  $\Delta$  и выражая  $\Delta p'$  из полученного ранее уравнения, найдем окончательно

$$\frac{R}{L^4} \left( \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T' = \Delta^3 T',$$

где буквой  $R$  обозначена безразмерная комбинация параметров задачи

$$R = \frac{c_V FN_0^2 (T_2 - T_1) L^3}{\chi \eta T_2}. \quad (1.64)$$

Эта величина носит название числа Релея.

Как видно, число Релея является характерным параметром, определяющим осуществимость конвективного движения. Только эта безразмерная комбинация параметров задачи входит в уравнение, описывающее конвективное движение.

При рассматриваемых условиях поставим граничные условия задачи, согласно которым на границах  $v_{0x} = 0$ ,  $T' = 0$ . Кроме того, на границах отсутствуют касательные силы. Поскольку касательная сила равна  $\eta \frac{\partial v_{0y}}{\partial x}$  или  $\eta \frac{\partial v_{0z}}{\partial x}$ , то следует потребовать, чтобы на границе  $\frac{\partial v_{0y}}{\partial x} = \frac{\partial v_{0z}}{\partial x} = 0$ .

Дифференцируя уравнение  $\text{div } \mathbf{v}_0 = 0$  по  $x$  и пользуясь этими соотношениями, находим  $\frac{\partial^2 v_{0x}}{\partial x^2} = 0$ . Таким образом, граничные

условия задачи следует представить в виде: при  $x=0$  и  $x=L$   
 $T' = 0$ ,  $v_{0x} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 v_{0x}}{\partial x^2} = 0$ .

Решим уравнение для  $T'$  при заданных граничных условиях. Подставив  $T' = \exp[i(k_1 y + k_2 z)] f(x)$ , получим

$$\frac{Rk^2 f}{L^4} = \left(k^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^3 f, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2.$$

Учитывая, что  $f=0$  при  $x=0$  и  $x=L$ , находим  $f = \text{const} \cdot \sin \kappa x$  ( $\kappa L = \pi n$  и  $n$  — целое число). Подставляя это в уравнение для  $f$ , имеем

$$R = \frac{(k^2 L^2 + \pi^2 n^2)^3}{k^2 L^2}.$$

Отсюда найдем минимальное возможное значение числа Релея. Оно соответствует  $n=1$ ,  $k = \pi/(L\sqrt{2})$  и составляет

$$R_{\text{min}} = \frac{27\pi^4}{4} = 657,5.$$

При таком и бóльших значениях  $R$  для рассматриваемых граничных условий возможна конвекция, при меньших  $R$  неподвижное состояние газа является устойчивым. Для других граничных условий задачи, другой геометрии и распределения газа минимальное число Релея, при котором осуществляется конвекция, имеет другие значения. Однако, как следует из полученных уравнений, именно число Релея является характеристикой, по величине которой можно судить о конвективной устойчивости неподвижного газа.

**Задача 1.32.** Выяснить характер движения газа при свободной конвекции в задаче Релея (см. задачу 1.31).

Для простоты будем считать, что скорость движения газа находится в одной плоскости, т. е. отличны от нуля только компоненты скорости  $v_{0x}$  и  $v_{0y}$ . Далее, считая конвективное движение медленным, мы воспользуемся результатами предыдущей задачи и проанализируем характер движения при свободной конвекции. Считая, что параметры не зависят от координаты  $z$ , согласно результатам предыдущей задачи имеем  $T' = \text{const} \cdot \cos ky \sin \frac{\pi}{L} x$ . Используя уравнение переноса тепла, определим  $v_{0x}$ , а из уравнения непрерывности  $\partial v_{0x}/\partial x + \partial v_{0y}/\partial y = 0$  найдем компоненту скорости  $v_{0y}$ :

$$v_{0x} = u \cos ky \cdot \sin \frac{\pi}{L} x, \quad v_{0y} = -u \frac{\pi}{Lk} \sin ky \cdot \cos \frac{\pi}{L} x,$$

где  $u = \text{const}$  и величина  $k$  связана с числом Релея  $R$



соотношением

$$R = (\pi^2 + k^2 L^2)^3 / (k^2 L^2).$$

Проследим за движением элемента газа, который находится в некоторый момент в точке с координатами  $x$  и  $y$ . Уравнения движения этого элемента газа имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x}, \quad \frac{dy}{dt} = v_{0y}.$$

Исключая из этих уравнений время и используя явный вид скоростей, получим:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v_{0x}}{v_{0y}} = -\frac{kL}{\pi} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{L} x}{\operatorname{tg} ky}.$$

Решение этого уравнения дает

$$\ln \sin \frac{\pi}{L} x + \ln \sin ky = 0,$$

откуда

$$\sin \frac{\pi}{L} x \cdot \sin ky = \text{const.}$$

Это решение описывает траекторию движения отдельного элемента газа. Траектории движения представляют собой замкнутые кривые. При этом весь газ разбивается на отдельные ячейки длиной  $\pi/k$ . Внутри каждой ячейки происходит движение газа вокруг центра ячейки.

На рис. 1.3 представлен вид конвективного движения в случае  $k = \pi/L$ . В общем случае эти ячейки будут иметь вид призмы с правильными многоугольниками в основании. Они носят название ячеек Бенара.

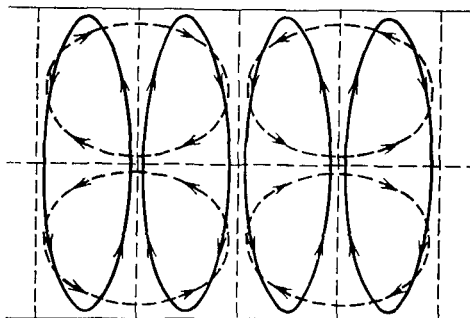


Рис. 1.3. Траектории движения элементов газа при условии задачи Релея для  $n=1$ ,  $k=\pi/L$ .

**Задача 1.33.** Определить условие возникновения конвекции в задаче Релея, в случае, когда между пластинами находится проводящий газ и на него действует магнитное поле, направленное перпендикулярно пластинам.

В этом случае при описании состояния газа наряду с уравнениями непрерывности, Навье—Стокса и переноса тепла следует учесть уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

и закон Ома

$$\mathbf{j} = \Sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}] \right).$$

Здесь  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$  — напряженность магнитного и электрического полей,  $\mathbf{j}$  — плотность тока электронов,  $\Sigma$  — проводимость ионизованного газа,  $\mathbf{v}_0$  — скорость движения частиц как целого. Считаем, что электрический ток создается электронами, так что  $\frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}]$  представляет собой напряженность дополнительного электрического поля, которое создается в результате движения электронов в магнитном поле.

Применим к первому из уравнений Максвелла операцию  $\text{rot}$ . Подставляя в него выражение для плотности тока из закона Ома и пользуясь вторым и третьим уравнениями, имеющими вид  $\text{rot } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{H} = 0$ , получим в рассматриваемом стационарном случае (из уравнения непрерывности  $\text{div } \mathbf{v}_0 = 0$ ):

$$\frac{c^2}{4\pi\Sigma} \Delta \mathbf{H} = (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{H} - (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v}_0.$$

Наряду с этими в уравнении Навье—Стокса мы должны учесть силу, которая действует со стороны магнитного поля на газ. Эта сила первоначально действует на электроны и передается газу. На один электрон действует сила Лоренца  $-\frac{e}{c} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{H}]$  ( $\boldsymbol{\omega}$  — дрейфовая скорость электрона). К единице объема плазмы приложена сила  $-\frac{e}{c} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{H}] N_e = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}]$ , где  $N_e$  — плотность электронов,  $\mathbf{j}$  — плотность тока. Отсюда находим, что на одну молекулу газа со стороны магнитного поля приходится сила, равная

$$\mathbf{F} = \frac{1}{Nc} [\mathbf{j} \mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi N} [\text{rot } \mathbf{H} \mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi N} \left\{ (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H} - \nabla \cdot \frac{\mathbf{H}^2}{2} \right\},$$

причем мы воспользовались уравнением Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ . Подставляя это выражение в уравнение Навье—Стокса (1.61), получим

$$(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + \frac{\nabla (p + H^2/8\pi)}{MN} - \frac{\eta \Delta \mathbf{v}_0}{MN} - \frac{(\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H}}{4\pi MN} - \frac{\mathbf{F}}{M} = 0.$$

Для нахождения порога конвекции поступим так же, как и при решении задачи Релея. Будем считать, что в нулевом приближении газ неподвижен, градиент температуры в нем постоянен, а напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  постоянна в пространстве и направлена по оси  $x$ . В первом приближении по-

добно задаче Релея получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_0 &= 0, \\ \nabla \left( p' + \frac{H_0 H'}{4\pi} \right) - \eta \Delta \mathbf{v}_0 - FN \frac{T'}{T} - \frac{H_0}{4\pi} \frac{\partial H'}{\partial x} &= 0, \\ c_V N_0 v_{0x} \frac{(T_2 - T_1)}{L} &= -\kappa \Delta T', \quad \frac{c^2}{4\pi \Sigma} \Delta H' + H_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$ , так что добавка  $H'$  обусловлена конвекцией. Первое и третье уравнения полученной системы в точности повторяют подобные уравнения задачи Релея.

Для нахождения порога конвекции мы должны теперь исключить из этого уравнения все величины, кроме  $T$ , и используя граничные условия, найти решение этого уравнения. Будем использовать тот же ход операций, что и в задаче Релея. Применим сначала к уравнению Навье—Стокса операцию  $\operatorname{div}$ . Учитывая, что  $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ , получим

$$\Delta \left( p' + \frac{H_0 H'_x}{4\pi} \right) = \frac{FN_0}{T} \frac{\partial T'}{\partial x}.$$

Далее, из двух последних уравнений имеем

$$\Delta H'_x = -\frac{4\pi H_0 \Sigma \partial v_{0x}}{c^2} = \frac{4\pi H_0 \Sigma \kappa L}{c^2 c_V N_0 (T_2 - T_1)} \frac{\partial T'}{\partial x}.$$

Теперь, применяя к  $x$ -й компоненте уравнения Навье—Стокса операцию  $\Delta$  и подставляя в полученное уравнение выражение для  $\Delta v_{0x}$  из уравнения переноса тепла, а выражения для  $\Delta \left( p' + \frac{H_0 H'_x}{4\pi} \right)$  и  $\Delta H'_x$ —из найденных соотношений, приходим к следующему уравнению для  $T'$ :

$$-\frac{FN_0}{T} \left( \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T' + \frac{\eta \kappa L \Delta^3 T'}{c_V N_0 (T_2 - T_1)} - \frac{H_0 \Sigma \kappa L}{c^2 c_V N_0 (T_2 - T_1)} \Delta \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$-RL^2 \left( \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T' + L^6 \Delta^3 T' - M^2 L^4 \Delta \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} = 0,$$

где введены безразмерные параметры:

$$R = \frac{c_V FN_0^2 (T_2 - T_1) L^3}{\kappa \eta T} \text{—число Релея}$$

и

$$M = \frac{H_0 L}{c} \sqrt{\frac{\Sigma}{\eta}} \text{—число Гартмана.}$$

Решение данного уравнения с учетом граничных условий  $T' = \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} = 0$ , как и в задаче Релея, ищем в виде

$$T = \text{const} \exp [i(k_1 y + k_2 z)] \sin \alpha x.$$

Из граничного условия  $T' = 0$  при  $x = L$  следует, что  $\alpha = \pi n/L$ , где  $n$  — целое число. Подставляя выражение для  $T'$  в уравнение для этой величины, получим

$$R = \frac{(k^2 L^2 + \pi^2 n^2)^3}{k^2 L^2} + \frac{\pi^2 n^2 (\pi^2 n^2 + k^2 L^2)}{k^2 L^2} M^2,$$

где  $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ . Минимальное значение числа Релея, при котором возможна конвекция, отвечает случаю  $n = 1$  и реализуется при значении  $k = k_{\min}$ , являющемся решением уравнения

$$(k_{\min}^2 L^2 + \pi^2)^2 (2k_{\min}^2 L^2 - \pi^2) - \pi^4 M^2 = 0,$$

откуда для минимального числа Релея, при котором возможна конвекция, находим

$$R_{\min} = \frac{2(k_{\min}^2 L^2 + \pi^2)^3}{\pi^2}.$$

Из полученных решений следует, что включение магнитного поля стабилизирует неподвижное состояние газа, делая его более устойчивым. При небольших значениях чисел Гартмана для  $R_{\min}$  имеем

$$R_{\min} = \frac{27\pi^4}{4} + 3\pi^2 M^2.$$

В пределе больших чисел Гартмана

$$R_{\min} = \pi^2 M^2.$$

**Задача 1.34.** Разряд горит между двумя бесконечными параллельными пластинами в молекулярном газе. Колебательная температура газа значительно превышает поступательную. Считая, что константа скорости колебательной релаксации  $k_{\text{рел}}$  резко зависит от температуры газа, определить порог теплового взрыва — неустойчивости, при которой процесс переноса тепла в результате теплопроводности оказывается недостаточным и температура внутри промежутка возрастает по взрывному закону, приводя в конечном итоге к выравниванию колебательной и поступательной температур. Расстояние между пластинами равно  $2l$ .

В рассматриваемом случае выделение тепла внутри разрядного промежутка обусловлено колебательной релаксацией, а унос тепла на стенки промежутка связан с теплопроводностью. Наша задача состоит в нахождении условий, при которых тепловыделение становится столь большим, что стационарное решение уравнения баланса энергии отсутствует. Наиболее удобный подход в этом случае состоит в нахождении этого стационарного решения и выяснении условий, когда оно перестает существовать.

Представим уравнение баланса энергии в разрядном промежутке в виде

$$\kappa \frac{d^2 T}{dx^2} + f(T) = 0,$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности газа,  $x$  — направление, перпендикулярное пластинам, за начало координат мы выбираем середину промежутка. Величина  $f(T) = N^* N k_{\text{ред}} \hbar \omega$  представляет собой тепловыделение в единице объема в единицу времени ( $N^*$  — плотность колебательно-возбужденных молекул,  $N$  — плотность атомов или молекул, столкновение с которым приводит к колебательной релаксации,  $\hbar \omega$  — энергия колебательного кванта). Поскольку колебательная температура велика по сравнению с поступательной, мы не учитываем обратный процесс, ведущий к возбуждению молекул. При этом существенно, что константа скорости колебательной релаксации  $k_{\text{ред}}(T)$  резко зависит от температуры. Введем величину  $\beta = -d \ln k_{\text{ред}}(T)/dT$  так, что в неширокой области температур  $f(T) = f(T_0) \exp[-\beta(T_0 - T)]$ , где  $T_0$  — температура газа в центре промежутка.

Решим уравнение баланса энергии. Вводя новую переменную  $y = \beta(T_0 - T)$ , приведем это уравнение к виду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - A e^{-y} = 0,$$

где  $A = \beta f(T_0)/\kappa$  и  $y(0) = 0$ . При этом отметим, что распределение температуры в промежутке четно по  $x$ , т. е.  $T(x) = T(-x)$ . Отсюда следует, что  $y(x) = y(-x)$  и  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$ . Учитывая это, мы будем рассматривать данное уравнение только при  $x > 0$ .

Решение данного уравнения с граничными условиями  $y(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$  имеет вид

$$y = 2 \ln \operatorname{ch} x \sqrt{A/2}.$$

Это дает для перепада температур между центром промежутка и стенками:

$$\Delta T = T_0 - T_{\text{ст}} = \frac{y(l)}{\beta} = \frac{2}{\beta} \ln \operatorname{ch} l \sqrt{\frac{\beta f(T_0)}{2\kappa}},$$

где  $T_{\text{ст}}$  — температура стенок.

Проанализируем полученное соотношение как функцию температуры  $T_0$ . Левая часть этого соотношения обращается в нуль при  $T_0 = T_{\text{ст}}$  и далее с увеличением  $T_0$  растет как разность этих температур. Правая часть данного соотношения имеет конечное значение при  $T_0 = T_{\text{ст}}$ , а при больших значениях  $T_0$  растет по экспоненциальному закону, т. е. гораздо быстрее, чем левая часть. Поэтому возможны условия, для которых представленное соотношение не выполняется, ибо для любого  $T_0 - T_{\text{ст}}$  правая часть соотношения больше, чем левая. Это имеет место, в частности, если коэффициент теплопроводности  $\kappa$  устремить к нулю. Физический смысл отсутствия стационарного решения в данном случае связан с тем, что при слабом теплоотводе за счет теплопровод-

ности газа выделяемое тепло остается внутри газа. Оно приводит к росту температуры газа, а это в свою очередь вызывает увеличение тепловыделения в результате колебательной релаксации.

Рассматриваемая неустойчивость, приводящая к резкому возрастанию тепловыделения внутри системы за счет протекающих в ней процессов тепловыделения, носит название теплового взрыва.

Найдем порог теплового взрыва. В пороге происходит касание двух кривых, описываемых левой и правой частями представленного соотношения. При этом в точке касания равны как сами величины, так и их производные. Это дает

$$\Delta T = \frac{2}{\beta} \ln \operatorname{ch} z, \quad z \operatorname{th} z = 1,$$

где  $z = l \sqrt{\beta f(T_0)/2\kappa}$ . Решение второго уравнения дает  $z = 1, 2$ , откуда для порога теплового взрыва находим

$$l^2 \beta f(T_0)/\kappa = 2,88.$$

Кроме того, из полученных соотношений для перепада температуры имеем

$$\Delta T = 1,19/\beta.$$

Перепишем условие теплового взрыва через параметры тепловыделения вблизи стенок. Вблизи порога теплового взрыва

$$f(T_{\text{cr}}) = f(T_0) \exp(-\beta \Delta T) = 0,30 f(T_0).$$

На основе этого перепишем условие возникновения теплового взрыва в виде

$$l^2 \beta f(T_{\text{cr}})/\kappa = 0,44.$$

С учетом определения параметра  $\beta$  это условие может быть представлено следующим образом:

$$\frac{l^2}{\kappa} \left| \frac{df(T=T_{\text{cr}})}{dT} \right| = 0,44.$$

Оно имеет простой физический смысл. В него входит отношение потока тепла, вносимого в объем газа за счет внутреннего процесса тепловыделения, к потоку тепла, который уносится из объема за счет теплопроводности. Как только это отношение превысит некоторую критическую величину порядка единицы, возникает тепловой взрыв.

Отметим, что хотя данная задача относится к конкретному характеру тепловыделения, связанному с колебательной релаксацией, полученный результат справедлив для любого механизма тепловыделения в объеме.

### § 4. Уравнение Фоккера — Планка

Уравнение Фоккера — Планка описывает состояние пробной частицы, движущейся в среде, если состояние частицы мало изменяется за одно соударение с частицами среды. Пусть состояние пробной частицы (т. е. частицы, за которой ведется наблюдение) характеризуется одной непрерывно меняющейся переменной  $x$ , и пусть  $W(t_0, x_0; t, x)$  — вероятность того, что частица, находившаяся в момент времени  $t_0$  в состоянии  $x_0$ , перейдет к моменту времени  $t$  в состояние  $x$ , причем выполняется условие нормировки

$$\int W(t_0, x_0; t, x) dx = 1. \quad (1.65)$$

Тогда, как следует из определения вероятности, она удовлетворяет интегральному уравнению Смолуховского:

$$W(t_0, x_0; t + \tau, x) = \int W(t_0, x_0; t, z) W(t, z; t + \tau, x) dz. \quad (1.66)$$

Если однократное изменение состояния частицы связано с малыми изменениями величины  $x$  по сравнению с некоторой характерной величиной, то интегральное уравнение Смолуховского приводится к дифференциальному уравнению Фоккера — Планка, которое имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial^i}{\partial x^i} (A W) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (B W), \quad (1.67)$$

причем

$$A(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (z - x) W(t, x; t + \tau, z) dz, \quad (1.68a)$$

$$B(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau} \int (x - z)^2 W(t, x; t + \tau, z) dz. \quad (1.68b)$$

Для физической интерпретации уравнение Фоккера — Планка запишем в виде уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad (1.69)$$

причем поток частиц

$$j = A W - B \frac{\partial W}{\partial x} \quad (1.70)$$

складывается из двух частей. Первое слагаемое, гидродинамический поток, пропорционально плотности состояний (или плотности пробных частиц), второе слагаемое, диффузионный поток, определяется градиентом плотности состояний (градиентом плотности частиц).

Обобщим уравнение Фоккера — Планка на случай, когда плотность вероятности нормирована более общим, чем (1.65),

условием, а именно,

$$\int \rho(x) W(t_0, x_0; t, x) dx = 1.$$

Это можно сделать, заменив в уравнении (1.67) величину  $W$  на  $\rho W$ , что приведет к уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (A W \rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (B W \rho). \quad (1.71)$$

При этом соответствующим образом переопределяются и величины  $A$ ,  $B$ :

$$A(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (z-x) \rho(x) W(x, t; z, t+\tau) dz, \quad (1.72a)$$

$$B(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau} \int (z-x)^2 \rho(x) W(x, t; z, t+\tau) dz. \quad (1.72b)$$

Наконец, по аналогии с одномерным случаем напомним уравнение Фоккера—Планка в многомерном случае:

$$\rho \frac{\partial W}{\partial t} = - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (A_{k\rho} W) + \sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} (B_{kl\rho} W),$$

где

$$\int W \rho \prod_k dx_k = 1$$

и

$$A_k = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{z_k - x_k}{\tau}, \quad B_{kl} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(z_k - x_k)(z_l - x_l)}{2\tau}.$$

Здесь  $x_k$ —переменные, которыми определяется плотность вероятности; знак усреднения соответствует операции

$$\bar{a} = \int a \rho W(t, x_1, \dots, x_n; t+\tau, z_1, \dots, z_n) \prod_i dz_i.$$

Уравнение Фоккера—Планка линейно и поэтому применимо в тех случаях, когда присутствие исследуемых частиц не изменяет свойств среды, в которой они движутся. Другое условие, которое мы использовали, связано с предположением, что искомая характеристика  $x$  изменяется почти непрерывно, т. е. при каждом последующем взаимодействии со средой эта величина мало отличается от значения, принимаемого в предыдущем акте взаимодействия.

Уравнение Фоккера—Планка может быть использовано для целого спектра задач, в которых аргумент в результате единичного перехода меняется малыми порциями. Сюда, в частности, относится движение частицы в координатном пространстве, когда длина свободного пробега частицы мала по сравнению с характерными размерами ее перемещения. Другой круг задач



относится к распределению частиц по энергиям, если за одно соударение энергия рассматриваемой частицы мало изменится. В любом случае уравнение Фоккера—Планка справедливо при условии, что рассматриваемые пробные частицы не влияют на параметры среды, т. е. относительное число частиц невелико.

**Задача 1.35.** Получить уравнение Фоккера—Планка для плотности вероятности как функции начального состояния.

Вспользуемся уравнением Фоккера—Планка (1.71) в виде

$$\rho(z) \frac{\partial W(x, z, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} [A(z, t) \rho(z) W(x, z, t)] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [B(z, t) \rho(z) W(x, z, t)]$$

и уравнением Смолуховского (1.66) в упрощенной записи  $W(x, z, t) \equiv W(t_0, x; t_0 + t, z)$ :

$$W(x, z, t + \tau) = \int W(x, \xi, t) \rho(\xi) W(\xi, z, \tau) d\xi.$$

Из уравнения Смолуховского следует

$$\frac{\partial W(x, z, t + \tau)}{\partial t} = \int \frac{\partial W(x, \xi, t)}{\partial t} \rho(\xi) W(\xi, z, \tau) d\xi.$$

Используя уравнение Фоккера—Планка и интегрируя полученное выражение по частям, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x, z, t + \tau)}{\partial t} &= \int \frac{\partial}{\partial \xi} [A(\xi) \rho(\xi) W(x, \xi, t)] W(\xi, z, \tau) d\xi + \\ &+ \int \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [B(\xi) \rho(\xi) W(x, \xi, t)] W(\xi, z, \tau) d\xi = \\ &= - \int A(\xi) \rho(\xi) W(x, \xi, t) \frac{\partial W(\xi, z, \tau)}{\partial \xi} d\xi + \\ &+ \int B(\xi) \rho(\xi) W(x, \xi, t) \frac{\partial^2 W(\xi, z, \tau)}{\partial \xi^2} d\xi. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial W(x, z, t + \tau)}{\partial t} = \frac{\partial W(x, z, t + \tau)}{\partial \tau} = \int W(x, t, \xi) \frac{\partial W(x, \tau, \xi)}{\partial \tau} \rho(\xi) d\xi.$$

Сравнивая полученные выражения, приходим к уравнению

$$\frac{\partial W(\xi, z, \tau)}{\partial \tau} = - A(\xi, \tau) \frac{\partial W(\xi, z, \tau)}{\partial \xi} + B(\xi, \tau) \frac{\partial^2 W(\xi, z, \tau)}{\partial \xi^2}.$$

**Задача 1.36.** Определить интеграл столкновений электронов с частицами газа, если изменение импульса и энергии электрона обусловлено упругими соударениями с частицами газа.

Поскольку изменение энергии электрона при упругом соударении с частицей газа мало по сравнению с его энергией, то кинетическое уравнение для функции распределения электронов

по энергиям при отсутствии внешних полей принимает вид уравнения Фоккера—Планка (1.71). При этом интеграл столкновений электронов с частицами газа может быть представлен в виде

$$I_{ст}(f) = \frac{1}{\rho(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ -A\rho f + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (B\rho f) \right],$$

где  $\varepsilon$ —энергия электрона. Поскольку в случае термодинамического равновесия электронов с газом ( $f = e^{-\varepsilon/T}$ ) интеграл столкновений  $I_{ст}(e^{-\varepsilon/T})$  равен нулю, находим соотношение между коэффициентами  $A$  и  $B$ :  $A = -\frac{B}{T} + B' + B \frac{\rho'}{\rho}$ , где  $T$ —температура газа. Таким образом, получаем для интеграла столкновений в случае малых передач энергии

$$I_{ст}(f) = \frac{1}{\rho(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ \rho(\varepsilon) B(\varepsilon) \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{f}{T} \right) \right]. \quad (1.73)$$

Здесь

$$B(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left\langle \int (\varepsilon - \varepsilon')^2 N v d\sigma(\varepsilon - \varepsilon') \right\rangle,$$

$N$ —плотность частиц газа,  $v$ —скорость столкновения их с электроном,  $d\sigma$ —дифференциальное сечение столкновения электрона с частицами газа, приводящего к данному изменению энергии электрона. Усреднение  $\langle \rangle$  проводится по распределению частиц газа. Если электроны свободные,  $\rho(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1/2}$ , так что задача определения интеграла столкновений сводится к нахождению коэффициента  $B(\varepsilon)$ .

Вычислим интеграл столкновений (1.73) в случае, когда он определяется упругими столкновениями электронов с атомами. Поскольку изменение энергии электрона при упругом столкновении с атомом порядка  $(m/M)^{1/2} \varepsilon$  ( $m$ ,  $M$ —масса электрона и атома соответственно), используемое рассмотрение к данному случаю применимо. При этом

$$B = \frac{1}{2} \int (\varepsilon - \varepsilon')^2 f_a dv_a v d\sigma(\varepsilon \rightarrow \varepsilon') = \frac{m^2}{8} \int (v^2 - v'^2)^2 v d\sigma f_a dv_a,$$

где  $v$ ,  $v'$ —скорости электрона до и после столкновения с атомом,  $d\sigma(\varepsilon \rightarrow \varepsilon')$ —дифференциальное сечение столкновения электрона с атомом, отвечающее начальной  $\varepsilon$  и конечной  $\varepsilon'$  энергиям электрона,  $f_a = N_a (M/2\pi T)^{3/2} \exp(-Mv_a^2/2T)$ —функция распределения атомов,  $v_a$ —их скорость,  $N_a$ —плотность,  $M$ —масса. Скорость атомов мало изменяется в результате соударения с электроном. Используя это, получим из условия сохранения относительной скорости  $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_a| = |\mathbf{v}' - \mathbf{v}_a|$  электрона и атома в процессе столкновения

$$v^2 - v'^2 = 2\mathbf{v}_a \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}').$$

Отсюда

$$B = \frac{m^2}{2} \left\langle \frac{v_a^2}{3} \right\rangle \int (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2 N_a v d\sigma = \frac{m^2 T}{2m} N_a v \int (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2 d\sigma.$$

Так как  $|\mathbf{v} - \mathbf{v}'| = 2v \sin(\theta/2)$ , где  $\theta$  — угол рассеяния электрона на атоме, то, вводя диффузионное сечение рассеяния  $\sigma^* = \int (1 - \cos \theta) d\sigma$ , получим

$$B = \frac{Tm^2}{M} N_a v^3 \sigma^*.$$

При этом мы всюду пренебрегали изменением энергии электрона по сравнению с его значением. Используя полученное выражение для  $B$ , определим интеграл столкновений (1.73):

$$I_{ст} = \frac{m}{M} T \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v^3 v \left( \frac{f}{T} + \frac{\partial f}{m v \partial v} \right) \right], \quad (1.74)$$

где  $\nu = N_a v \sigma^*$  — частота столкновений электрона с атомом.

**Задача 1.37.** Определить интеграл столкновений электронов с молекулами газа, если потеря энергии электронов определяется возбуждением молекул на первый колебательный уровень, причем средняя энергия электронов значительно превышает энергию возбуждения колебательного уровня  $\hbar\omega$ .

Учитывая, что  $I_{ст} 4\pi v^2 dv$  — плотность электронов, попадающих в интервал скоростей  $dv$  за счет столкновений, представим его в виде

$$4\pi I_{ст} v^2 dv = -4\pi v^2 dv \nu_{возб}(v) f(v) + 4\pi \left( v^2 + \frac{2\hbar\omega}{m} \right) \times \\ \times d \sqrt{v^2 + \frac{2\hbar\omega}{m}} f \left( \sqrt{v^2 + \frac{2\hbar\omega}{m}} \right) \nu_{возб} \left( \sqrt{v^2 + \frac{2\hbar\omega}{m}} \right).$$

Отсюда

$$I_{ст} = \frac{\hbar\omega}{m} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v \nu_{возб} f). \quad (1.75)$$

Здесь  $\nu_{возб} = N_m v \sigma_{возб}$  — частота возбуждения колебательного уровня молекулы электронным ударом,  $N_m$  — плотность молекул,  $v$  — скорость электрона,  $\sigma_{возб}$  — сечение возбуждения колебательного уровня электронным ударом,  $\hbar\omega$  — энергия колебательного кванта.

При получении формулы (1.75) мы считали, что скорость электрона велика по сравнению со скоростью молекул, а его энергия велика по сравнению с величиной колебательного кванта  $\hbar\omega$  и что молекулы находятся в основном колебательном состоянии, а возбуждаются только на первый колебательный уровень. При таких условиях в интеграле столкновений учитываются только переходы за счет возбуждения уровня. Интеграл

столкновений (1.75) имеет вид уравнения Фоккера—Планка в пространстве скоростей, причем в этом уравнении учитывается только гидродинамический поток и коэффициент  $A = \hbar\omega_{\text{возб}}(v)$ .

**Задача 1.38.** Выяснить критерий применимости интегралов столкновений (1.74), (1.75), связанный с предположением, что функция распределения электронов не зависит от направления скорости.

Если характерное время  $\tau_{\text{имп}}$ , за которое изменяется направление импульса, мало, то через времена, много большие  $\tau_{\text{имп}}$ , функцию распределения электронов можно считать не зависящей от направления импульса. Покажем, что  $\tau_{\text{имп}}$  много меньше характерного времени изменения энергии в рассмотренных случаях.

Действительно,  $\tau_{\text{имп}} \sim \nu_y^{-1}$  ( $\nu_y$ —частота упругого рассеяния электрона на атоме или молекуле). Время, за которое заметно меняется энергия электрона,  $\tau_{\text{эн}} \sim \frac{1}{\nu} \left( \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon} \right)^2$ , где  $\nu$ —частота столкновения электрона с атомом,  $\Delta\varepsilon$ —характерное изменение энергии за одно соударение. Отсюда в случае, если потери определяются упругими столкновениями электрона с атомами ( $\nu = \nu_y$ ,  $\Delta\varepsilon \sim \sqrt{(m/M)\varepsilon}$ ), имеем

$$\frac{\tau_{\text{имп}}}{\tau_{\text{эн}}} \sim \frac{m}{M} \ll 1.$$

В случае, если потери энергии связаны с возбуждением колебательных уровней ( $\nu = \nu_{\text{возб}}$ ,  $\Delta\varepsilon = \hbar\omega$ ), получим

$$\frac{\tau_{\text{имп}}}{\tau_{\text{эн}}} \sim \frac{\nu_{\text{возб}}}{\nu_y} \left( \frac{\hbar\omega}{\varepsilon} \right)^2 \ll 1,$$

причем каждый из сомножителей много меньше единицы.

## § 5. Диффузия и направленное движение частиц в газе

Если размеры системы, через которую проходят пробные частицы, значительно превышают длину свободного пробега этих частиц, то плотность тока пробных частиц, согласно формуле (1.70), может быть представлена в виде

$$\mathbf{j} = \boldsymbol{\omega}N - \mathcal{D}\nabla N. \quad (1.76)$$

Здесь  $N$ —плотность пробных частиц,  $\boldsymbol{\omega}$ —скорость их направленного движения. При этом коэффициент диффузии, согласно формуле (1.68), равен

$$\mathcal{D} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\overline{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}}{2\tau}.$$

Гидродинамический поток частиц возникает под действием внешних сил. При малых значениях внешней силы дрейфовая

скорость  $\boldsymbol{w}$  пробной частицы пропорциональна действующей силе  $\boldsymbol{F}$ :

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{e} K \boldsymbol{F}. \quad (1.77)$$

Коэффициент пропорциональности  $K$  носит название подвижности частицы и при малых значениях силы  $\boldsymbol{F}$  не зависит от нее.

В случае, когда пробная частица движется в газе в отсутствие внешних полей, вероятность нахождения ее в данной точке пространства определяется, согласно уравнению Фоккера—Планка (1.67), уравнением диффузии

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{D} \Delta W. \quad (1.78)$$

Здесь  $W(\boldsymbol{r}, t)$ —вероятность нахождения пробной частицы в точке  $\boldsymbol{r}$  в момент времени  $t$ .

**Задача 1.39.** Вывести уравнение диффузии (1.78) для пробной частицы, движущейся в неподвижном газе в отсутствие внешних полей.

Воспользуемся уравнением Фоккера—Планка (1.67) для пробной частицы. Так как направленное движение пробной частицы в газе отсутствует, то уравнение для вероятности  $W(\boldsymbol{r}, t)$  нахождения частицы в точке  $\boldsymbol{r}$  в момент времени  $t$  имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (B_{xx} W) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (B_{yy} W) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (B_{zz} W).$$

При этом по определению

$$B_{xx} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(x-x')^2}{2\tau}, \quad B_{yy} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(y-y')^2}{2\tau}, \quad B_{zz} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(z-z')^2}{2\tau},$$

где  $x, y, z$ —координаты пробной частицы в начальный момент времени,  $x', y', z'$ —в момент времени  $\tau$ , черта сверху означает усреднение по всем возможным перемещениям частицы.

Поскольку при условиях задачи нет выделенного направления в системе, то все коэффициенты в уравнении равны:

$$B_{xx} = B_{yy} = B_{zz} \equiv \mathcal{D}(\boldsymbol{r}, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{6\tau}.$$

Заметим, что это справедливо, если неоднородности в газе малы, так что рассматриваемые коэффициенты мало изменяются на расстоянии порядка длины свободного пробега частиц. При этом уравнение Фоккера—Планка принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \Delta (\mathcal{D} W).$$

В том случае, когда коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$  не зависит от координаты, рассматриваемое уравнение переходит в уравнение

диффузии

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{D} \Delta W.$$

При этом вероятность нахождения частицы в данной точке в рассматриваемый момент времени нормирована на единицу:

$$\int W(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 1.$$

**Задача 1.40.** Определить средний квадрат расстояния, которое броуновская частица проходит за время  $t$ .

Вероятность  $W(\mathbf{r}, t)$  для рассматриваемой частицы в момент времени  $t$  оказаться в точке  $\mathbf{r}$  удовлетворяет уравнению диффузии (1.78),  $\mathcal{D} \Delta W = \frac{\partial W}{\partial t}$ , где  $\mathcal{D}$  — коэффициент диффузии. При этом в начальный момент времени частица находилась в начале координат.

Учитывая, что в силу симметрии задачи вероятность  $W$  не зависит от углов, представим уравнение диффузии в виде

$$\mathcal{D} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rW)}{\partial r^2} = \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Далее воспользуемся условием нормировки, согласно которому полная вероятность частицы находиться в пространстве равна единице. Имеем  $\int_0^{\infty} W 4\pi r^2 dr = 1$ . Взяв этот интеграл дважды по частям, приведем его к виду

$$\frac{1}{6} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 (rW)}{\partial r^2} 4\pi r^3 dr = 1.$$

Отсюда с помощью уравнения диффузии получим

$$\frac{1}{6} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 (rW)}{\partial r^2} 4\pi r^3 dr = \frac{1}{6\mathcal{D}} \int_0^{\infty} \frac{\partial W}{\partial t} 4\pi r^4 dr = \frac{1}{6\mathcal{D}} \frac{d\overline{r^2}}{dt} = 1.$$

Здесь  $\overline{r^2}$  — средний квадрат расстояния. Интегрируя данное уравнение при начальном условии  $\overline{r^2}(0) = 0$  (в начальный момент времени частица находится в начале координат), находим

$$\overline{r^2} = 6\mathcal{D}t.$$

**Задача 1.41.** Вывести соотношение (соотношение Эйнштейна), которое устанавливает связь между коэффициентом диффузии  $\mathcal{D}$  пробной частицы в газе и подвижностью  $K$  частицы при малых внешних полях.

Плотность пробных частиц, которые находятся в термодинамическом равновесии с газом, в данной точке пространства определяется распределением Больцмана (1.10)  $N = N_0 e^{-U/RT}$ , где  $U$  — потенциальная энергия внешнего поля,  $T$  — температура газа. Внешнее поле создает отличный от нуля градиент плотности пробных частиц  $\nabla N = \frac{1}{T} \mathbf{F}N$  ( $\mathbf{F} = -\nabla U$ ), что приводит к появлению диффузионного потока частиц. При этом полный поток пробных частиц

$$\mathbf{j} = K\mathbf{F}N - \mathcal{D}\nabla N = \mathbf{F}N \left( \frac{K}{e} - \frac{\mathcal{D}}{T} \right)$$

в условиях равновесия равен нулю. Отсюда получаем связь между подвижностью и коэффициентом диффузии, которая носит название соотношения Эйнштейна:

$$K = \frac{e\mathcal{D}}{T}. \quad (1.79)$$

Это соотношение справедливо при слабых внешних полях, при которых изменение потенциала внешнего поля на расстояниях порядка длины свободного пробега много меньше характерной кинетической энергии молекул газа. В этом случае внешнее поле не нарушает термодинамического равновесия рассматриваемых частиц со средой, в которой они находятся, что и было принято за основу при выводе соотношения Эйнштейна.

**Задача 1.42.** Найти решение уравнения диффузии (1.78) для частицы, движущейся в бесконечной среде, при начальном условии  $W(\mathbf{r}, 0) = W_0(\mathbf{r})$ .

Решим сначала уравнение диффузии (1.78) при начальном условии  $W_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ .

В силу симметрии задачи вероятность  $W$  не зависит от углов, так что уравнение (1.78) в рассматриваемом случае преобразуется к виду

$$\frac{\partial r}{\partial t} W = \mathcal{D} \frac{\partial^2 r}{\partial r^2} W. \quad (1.80)$$

Уравнение (1.80) допускает так называемое автомодельное решение. Из соображений размерности можно считать, что решение уравнения (1.80) зависит только от одной переменной  $r^2/t$ . Введем новую переменную  $\xi = r^2/\mathcal{D}t$ . Из условия нормировки  $\int W \cdot 4\pi r^2 dr = 1$  следует, что  $W$  можно представить в виде

$$W = \frac{1}{t^{3/2}} V(\xi).$$

При этом уравнение для  $V$  имеет вид

$$4\xi V'' + 6V' + \xi V' + \frac{3}{2} V = 0.$$

Его решение, конечное на бесконечности, с учетом нормировки функции дает ( $V = Ce^{-\frac{3}{2}t}$ )

$$W = \frac{1}{(4\pi\mathcal{D}t)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{r^2}{4\mathcal{D}t} \right]. \quad (1.81)$$

Это решение можно распространить на случай произвольного начального условия. Если при  $t=t_0$  частица находится в точке  $\mathbf{r}_0$ , так что  $W = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ , то с помощью (1.81) для вероятности нахождения частицы в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  находим:

$$g(\mathbf{r}_0, t_0; \mathbf{r}, t) = [4\pi\mathcal{D}(t-t_0)]^{-3/2} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4\mathcal{D}(t-t_0)} \right]. \quad (1.82)$$

Если в начальный момент времени  $t=t_0$  распределение частицы в пространстве определяется функцией  $W_0(\mathbf{r})$ , то вероятность  $W(\mathbf{r}, t)$  равна

$$W(\mathbf{r}, t) = \int W_0(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}', t_0; \mathbf{r}, t) d\mathbf{r}'.$$

Это решение следует непосредственно из линейности уравнения. Функция  $g$ , определяемая соотношением (1.82), является функцией Грина для уравнения (1.78). Следует заметить, что рассматриваемые здесь решения относятся к случаю бесконечной среды, когда условия на границе среды не влияют на вероятность нахождения частицы внутри нее.

Функция Грина (1.82) — вероятность перехода частицы за время  $\tau = t - t_0$  на расстояние  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$  — зависит только от разности начального и конечного моментов времени и от расстояния между рассматриваемыми точками. Она разбивается на произведение трех независимых функций, характеризующих перемещение в каждом из направлений:

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \tau) = g(x - x_0, \tau) g(y - y_0, \tau) g(z - z_0, \tau), \quad (1.83)$$

где

$$g(x - x_0, \tau) = (4\pi\mathcal{D}\tau)^{-1/2} \exp \left[ -\frac{(x-x_0)^2}{4\mathcal{D}\tau} \right].$$

Такой же вид имеют две другие функции.

Мерой рассматриваемого процесса движения является средний квадрат расстояния, на которое частица смещается за данное время:

$$\bar{r}^2 = \int_0^\infty r^4 e^{-ar^2} dr \bigg/ \int_0^\infty r^2 e^{-ar^2} dr, \quad \text{где } \alpha = \frac{1}{4\mathcal{D}t}.$$

Отсюда следует:

$$\bar{r}^2 = -\frac{d}{d\alpha} \ln \int_0^\infty e^{-ar^2} r^2 dr = -\frac{d}{d\alpha} \ln \frac{1}{\alpha^{3/2}} = \frac{3}{2\alpha} = 6\mathcal{D}t. \quad (1.84)$$



**Задача 1.43.** Вывести формулу (1.83), учитывая, что величина и знак каждого смещения частицы между двумя столкновениями не зависят от предыдущих соударений, т. е. блуждания частицы носят случайный характер.

Задача заключается в нахождении  $g(x, t)$  — вероятности того, что за время  $t$  частица сместится на расстояние  $x$ . Пусть за это время частица испытала  $n$  соударений, причем  $\varphi(x_i)$  — вероятность того, что за время между  $i$ -м и  $(i+1)$ -м столкновениями частица сместилась на расстояние  $x_i$  ( $\int \varphi(x_i) dx_i = 1$ ). Поскольку столкновения носят случайный характер, вероятность  $\varphi(x_i)$  не зависит от номера столкновений. При этом вероятность  $g(x)$  равна

$$g(x) dx = \int \prod_i \varphi(x_i) dx_i,$$

где  $x = \sum_{i=0}^n x_i$ .

Введем характеристические функции

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{ipx} dx, \quad f(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_i) e^{ipx_i} dx_i, \quad (1.85)$$

так что на основе обратного преобразования

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{-ipx} dp, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) e^{-ipx_i} dp.$$

Как следует из формулы (1.85),

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_i) dx_i = 1, \\ f'(0) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} x_i \varphi(x_i) dx_i = i \bar{x}_i, \\ f''(0) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^2 \varphi(x_i) dx_i = - \bar{x}_i^2, \end{aligned} \quad (1.86)$$

где  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{x}_i^2$  — средние значения смещения и его квадрата за время между двумя соседними соударениями.

Характеристические функции удобны потому, что  $f(p)$  не зависит от номера столкновения. Это дает

$$F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ip \sum_i x_i\right) \prod_i \varphi(x_i) dx_i = f^n(p),$$

откуда

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f^n(p) \exp(-ipx) dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(n \ln f - ipx) dp. \quad (1.87)$$

При большом числе столкновений  $n$  этот интеграл определяется малыми значениями  $p$ , так что  $f$  можно разложить при  $p \rightarrow 0$ . Имеем

$$\ln f = \ln \left[ 1 - i\bar{x}_i p - \frac{\bar{x}_i^2 p^2}{2} \right] \approx i\bar{x}_i p - \frac{\bar{x}_i^2 p^2}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ ip(n\bar{x}_i - x) - \frac{n\bar{x}_i^2 p^2}{2} \right] dp = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \exp \left[ -\frac{(x - \bar{x})^2}{2\Delta^2} \right], \end{aligned} \quad (1.88)$$

где  $\bar{x} = n\bar{x}_i$ ,  $\Delta^2 = n\bar{x}_i^2$ . Если ввести  $\bar{x}^2 = \left( \sum_i x_i \right)^2$ , то  $\Delta^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$ .

Таким образом, для искомой функции мы получили распределение Гаусса. Это распределение справедливо, если основной вклад в интеграл (1.87) вносят малые значения  $p$ . Исползованное нами разложение для  $f(p)$  приемлемо при  $\bar{x}_i p \ll 1$ ,  $\bar{x}_i^2 p^2 \ll 1$ . Основной вклад в интеграл (1.87) вносит область  $n\bar{x}_i^2 p^2 \sim 1$ . Таким образом, распределение Гаусса (1.88) становится справедливым после большого числа столкновений.

Свяжем параметры  $\Delta^2$  и  $\bar{x}$  со временем. Среднее смещение отвечает направленному движению и  $\bar{x} = \omega t$ , где  $\omega$  — дрейфовая скорость. В системе координат, где  $\omega = 0$ , имеем  $\bar{x}^2 = 2\mathcal{D}t$  ( $\mathcal{D}$  — коэффициент диффузии). Отсюда  $\Delta^2 = 2\mathcal{D}t$ , и распределение Гаусса (1.88) принимает в данном случае вид

$$g(x, t) = (4\pi\mathcal{D}t)^{-1/2} \exp \left[ -\frac{(x - \omega t)^2}{4\mathcal{D}t} \right].$$

**Задача 1.44.** Пучок атомов состоит из атомов двух сортов (или двух изотопов) и облучается источником монохроматического излучения, который возбуждает атомы только одного сорта. Фотоны движутся перпендикулярно пучку и возбуждают атомы в ограниченной области пространства, причем среднее число фотонов, поглощенных каждым атомом, равно  $\bar{n}$  и много больше единицы. При каждом поглощении фотона атом приобретает импульс  $p_0 = \hbar\omega/c$  ( $\hbar\omega$  — энергия фотона,  $c$  — скорость света), а затем излучают этот фотон изотропно. Найти распределение поглощающих атомов по импульсам в направлении движения фотонов. (Соударений атомов не происходит.)

Рассматриваемый способ используется для разделения изотопов и приводит к разделению на два пучка атомов разных сортов, или разных изотопов. Обозначим функцию распределения поглощающих атомов по поперечным компонентам импульсов после поглощения  $n$  фотонов через  $f_n(p_{\perp})$ , где  $p_{\perp}$  — компонента импульса атомов в направлении движения фотонов. Мы имеем следующее соотношение для функции распределения, которое вытекает из природы процесса:

$$f_n(p_{\perp}) = \int f_{n-1}(p'_{\perp}) f_1(p_{\perp} - p'_{\perp}) dp'_{\perp}.$$

Определим  $f_1(p_{\perp})$ . При поглощении фотона атом приобретает импульс  $p_0$  в направлении движения светового пучка, а затем при пропускании фотона приобретает импульс  $p_0$  с равной вероятностью в любом направлении. Суммарный импульс, получаемый атомом после поглощения и испускания одного фотона, равен  $p_{\perp} = p_0(1 - \cos \vartheta)$ , где  $\vartheta$  — угол между направлением движения поглощаемого и испускаемого фотона. Нормированная на единицу функция распределения атомов по поперечным компонентам импульсов после поглощения и испускания одного фотона равна

$$f_1(p_{\perp}) dp_{\perp} = \frac{d \cos \vartheta}{2}.$$

Используя связь между этими величинами, находим

$$f_1(p_{\perp}) = \begin{cases} \frac{1}{2p_0}, & 0 < p_{\perp} < 2p_0, \\ 0, & p_{\perp} < 0, \quad p_{\perp} > 2p_0. \end{cases}$$

Введем безразмерную переменную  $x = p_{\perp}/2p_0$ . С учетом выражения для  $f_1(p_{\perp})$  преобразуем соотношение для функции распределения к виду

$$f_n(x) = \int_{\max(x-1, 0)}^{\min(x, n-1)} f_{n-1}(x') dx',$$

причем  $n > x > 0$  и на нижнем пределе стоит максимальное значение из чисел  $x-1$  и 0. Поскольку число поглощенных фотонов велико, то функция распределения атомов по поперечным компонентам импульсов имеет вид распределения Гаусса, так что наша задача далее заключается в нахождении среднего значения поперечной компоненты импульса и среднее квадратичного значения этой величины. Перейдем к нахождению этих характеристик.

Из вида функции распределения  $f_1(x)$  ( $f_1(x)$  равна единице, если  $0 < x < 1$  и нулю при других значениях аргумента) находим  $\bar{x}_1 = 1/2$ ,  $\overline{x_1^2} = 1/3$ . При этом мы обозначаем через  $\overline{x_n^m}$  величину

$$\int x^m f_n(x) dx. \text{ Из соотношения для функций распределения имеем.}$$

$$\overline{x_n} \equiv \int_0^n f_n(x) dx \cdot x = \int_0^n x dx \int_{\max(x-1, 0)}^{\min(x, n-1)} f_{n-1}(x') dx'.$$

Меняя пределы интегрирования, получим

$$\bar{x}_n = \int_0^{n-1} f_{n-1}(x') dx' \int_{x'}^{x'+1} x dx = \int_0^{n-1} \left(x' + \frac{1}{2}\right) f_{n-1}(x') dx' = \bar{x}_{n-1} + \frac{1}{2}.$$

Отсюда, учитывая, что  $\bar{x}_1 = 1/2$ , получаем  $\bar{x}_n = n/2$ . Подобным образом имеем для среднего квадрата

$$\bar{x}_n^2 = \int_0^n f_n(x) x^2 dx = \int_0^n x^2 dx \int_{\max(x-1, 0)}^{\min(x, n-1)} f_{n-1}(x') dx'.$$

После замены пределов интегрирования находим

$$\bar{x}_n^2 = \int_0^{n-1} f_{n-1}(x') dx' \int_{x'}^{x'+1} x''^2 dx'' = \bar{x}_{n-1}^2 + \bar{x}_{n-1} + \frac{1}{3} = \bar{x}_{n-1}^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{6}.$$

Это рекуррентное соотношение с учетом того, что  $\bar{x}_1^2 = 1/3$ , дает

$$\bar{x}_n^2 = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{12}.$$

Теперь учтем тот факт, что число фотонов, поглощенное рассматриваемым атомом, может отличаться от среднего значения. Вероятность того, что рассматриваемый атом поглотит  $n$  фотонов, описывается распределением Гаусса и равна

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} \exp \left[ -\frac{(n - \bar{n})^2}{2\bar{n}} \right],$$

где  $\bar{n} \gg 1$  — среднее число поглощенных фотонов. Отсюда находим

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_0^{\infty} \bar{x}_n W_n dn = \frac{\bar{n}}{2}, \\ \bar{x}^2 &= \int_0^{\infty} \bar{x}_n^2 W_n dn = \frac{\bar{n}^2}{4} + \frac{\bar{n}}{3}, \\ \bar{x}^2 - \bar{x}^2 &= \frac{\bar{n}}{3}. \end{aligned}$$

С учетом этого, задавая распределение атомов по поперечным импульсам в виде распределения Гаусса, для функции распределения поглощающих атомов по поперечным импульсам после прохождения зоны поглощения получаем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \exp \left[ -\frac{(x - \bar{x})^2}{2\Delta^2} \right],$$

где  $\Delta^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = \bar{n}/3$ , а  $\bar{x} = \bar{n}/2$ .

Возвращаясь к размерным обозначениям, имеем для функции распределения поглощающих атомов по поперечным импульсам

после прохождения зоны поглощения:

$$F(p_{\perp}) dp_{\perp} = \frac{dp_{\perp}}{V(8/3)\pi\bar{n}p_0^2} \exp\left[-\frac{(p_{\perp} - \bar{n}p_0)^2}{(8/3)\bar{n}p_0^2}\right].$$

Здесь  $F(p_{\perp}) dp_{\perp}$  — вероятность того, что поперечный импульс отклоненных атомов лежит в промежутке от  $p_{\perp}$  до  $p_{\perp} + dp_{\perp}$ ,  $\bar{n}$  — среднее число поглощенных фотонов. При этом мы считаем, что размытие по поперечному импульсу в пучке мало по сравнению с приобретаемым средним поперечным импульсом  $\bar{n}p_0$ . Полуширина функции распределения, т. е. область импульсов, где функция распределения превышает половину своего максимального значения, равна

$$\Delta p_{\perp} = 2\sqrt{(8/3)\bar{n}p_0^2 \ln 2} = 2,72\sqrt{\bar{n}p_0}.$$

Эта величина значительно меньше среднего поперечного импульса отклоняемых атомов, ибо  $\bar{n} \gg 1$ .

**Задача 1.45.** Электроны испаряются в пространство между двумя плоскими бесконечными электродами, в котором находится газ, и движутся в газе в постоянном электрическом поле от одного электрода к другому. Коэффициент диффузии электронов  $\mathcal{D}$ , дрейфовая скорость в электрическом поле  $\omega$ , поток электронов  $j_0$ , расстояние между электродами  $L \gg \lambda$  ( $\lambda$  — длина свободного пробега электрона). Пренебрегая взаимодействием между электронами, определить распределение электронов в пространстве между электродами.

Плотность тока электронов равна

$$j_0 = -\mathcal{D} \frac{dN}{dx} + \omega N,$$

где  $N$  — плотность электронов. Решая это уравнение с граничным условием  $N = 0$  при  $x = L$ , получим

$$N = \frac{j_0}{\omega} \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{\omega}{\mathcal{D}}(L-x)\right] \right\}.$$

Если  $\omega L/\mathcal{D} \gg 1$ , то в основной части пространства диффузией можно пренебречь и  $N = j_0/\omega$ . Если  $\omega L/\mathcal{D} \ll 1$ , то направленное движение электронов не играет роли и плотность электронов не зависит от  $\omega$ :

$$N = \frac{j_0}{\mathcal{D}}(L-x).$$

**Задача 1.46.** Электроны рождаются в некоторой точке пространства и попадают в движущийся газ. Скорость движения газа  $v$ , коэффициент диффузии электронов в газе  $\mathcal{D}$ , число электронов, возникающих в единицу времени,  $\alpha$ . Найти функцию распределения электронов в пространстве.

В момент  $T$  после включения источника функция распределения электронов, согласно формуле (1.83), имеет вид

$$f(\rho, x) = \int_0^T \frac{1}{(4\pi \mathcal{D}t)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{\rho^2 + (x - vt)^2}{4\mathcal{D}t} \right] dt,$$

причем источник электронов находится в начале координат, ось  $x$  направлена по скорости газа. В частности, число электронов, находящихся на расстоянии  $\rho$  от оси, равно

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho, x) dx = \int_0^T \frac{1}{4\pi \mathcal{D}t} \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\mathcal{D}t} \right) dt = \\ &= -\frac{1}{4\pi \mathcal{D}} Ei \left( -\frac{\rho^2}{4\mathcal{D}T} \right), \end{aligned}$$

т. е. монотонно убывает с удалением электронов от оси. Здесь  $Ei(x)$  — интегральная показательная функция.

**Задача 1.47.** Пучок ионов впрыскивается в пространство между двумя электродами и движется между ними в газе в постоянном электрическом поле. Расстояние между электродами  $L$ , скорость дрейфа  $\omega$ , коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$ , причем  $L\omega \gg \mathcal{D}$ . Определить зависимость импульса тока от времени и распределение ионов по поверхности катода.

В рассматриваемом случае функция распределения ионов согласно формуле (1.83) имеет вид

$$f = \frac{N}{(4\pi \mathcal{D}t)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{\rho^2 + (x - \omega t)^2}{4\mathcal{D}t} \right],$$

где  $N$  — число ионов. Для  $x = L$  и  $\tau = t - \frac{L}{\omega} \ll \frac{L}{\omega}$  имеем отсюда

$$f = (4\pi\alpha)^{-1/2} N \exp \left( -\frac{\rho^2}{4\alpha} - \frac{\omega^2 \tau^2}{4\alpha} \right), \quad \alpha = \mathcal{D} \frac{L}{\omega}.$$

Для тока ионов  $I(t)$  на катоде получаем

$$\begin{aligned} I(t) &= \omega \int_0^{\infty} 2\pi\rho d\rho f(\rho, \tau) = \omega N (4\pi\alpha)^{-1/2} \exp \left( -\frac{\omega^2 \tau^2}{4\alpha} \right) = \\ &= \frac{N\omega^3}{(4\pi \mathcal{D}L)^{1/2}} \exp \left( -\frac{\omega^3}{4\mathcal{D}L} \tau^2 \right), \end{aligned}$$

где  $\tau = t - L/\omega$ .

Далее, используя функцию распределения, находим распределение ионов по поверхности катода:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{\rho d\rho} &= \frac{2\pi}{(4\pi \mathcal{D}t)^{3/2}} \exp \left( \frac{-\rho^2}{4\mathcal{D}t} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{(x - \omega t)^2}{4\mathcal{D}t} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2\mathcal{D}t} \exp \left( \frac{-\rho^2}{4\mathcal{D}t} \right). \end{aligned}$$

Число ионов, попадающих на катод на расстоянии  $\rho$  от оси, равно

$$dn = \frac{N}{2\alpha} \exp\left(\frac{-\rho^2}{4\alpha}\right) \rho d\rho.$$

**Задача 1.48.** Условия предыдущей задачи, однако расхождение пучка определяется электростатическим взаимодействием ионов, а не их диффузией. Выяснить, при каких условиях этот эффект сильнее.

На ион, находящийся на расстоянии  $r$  от центра, действует сила  $F = \frac{ne^2}{r^3} r$ , так что он движется по радиусу от центра пучка. Здесь  $n$  — число ионов, расположенных ближе к центру, чем данный, причем их распределение относительно этого центра остается сферически симметричным,  $e$  — заряд иона. Под действием указанной силы ион движется по радиусу от центра со скоростью  $w = K \frac{ne}{r^3} r$ , где  $K$  — подвижность иона в газе, так что уравнение движения иона имеет вид

$$\frac{dr}{dt} = K \frac{ne}{r^3} r.$$

Решение этого уравнения при начальном условии  $r = 0$  при  $t = 0$  имеет вид

$$\frac{r^3}{3} = Knet.$$

Отсюда число ионов, расположенных на расстоянии  $r$  от центра сгустка в момент времени  $t$ , равно

$$dn = \frac{r^2 dr}{Ket}.$$

Если полное число ионов  $N$ , то

$$dn = \begin{cases} \frac{r^2 dr}{Ket}, & r < r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \quad r_0^3 = 3KNet.$$

Отсюда распределение ионов в направлении дрейфовой скорости

$$dn = \frac{(r_0^3 - z^3)}{4Ket} dz, \quad |z| < r_0.$$

На основании этого находим ток ионов:

$$I = \frac{dn}{dt} = w \frac{(r_0^3 - z^3)}{4Ket} = \frac{3Nw}{4r_0} \left(1 - \frac{z^3}{r_0^3}\right), \quad |z| \leq r_0,$$

где  $\tau_0^3 = \frac{2KNel}{w^4}$ ,  $t = \frac{L}{w}$ ,  $z = wt$ , причем  $r_0 \ll L$  и ток отличен от нуля при  $-\tau_0 < t < \tau_0$ .

Для распределения ионов по поверхности катода имеем

$$dn = \frac{d\rho^2}{2} \frac{\sqrt{r_0^2 - \rho^2}}{Ket},$$

где  $\rho \leq r_0$  и  $t = L/\omega$ . Данный механизм расширения пучка более существен, чем диффузионный, если  $r_0 \gg \sqrt{D t}$ , т. е. число ионов

$$N \gg \frac{D^{3/2} L^{1/2}}{Ke \omega^{1/2}} \sim \frac{(\lambda L)^{1/2}}{e^2/T} \left( \frac{v_T}{\omega} \right)^{1/2},$$

где  $\lambda$  — длина свободного пробега иона,  $T$  — температура,  $v_T$  — тепловая скорость ионов,  $\omega$  — их дрейфовая скорость под действием внешнего поля.

**Задача 1.49.** Определить изменение времени движения заряженной частицы в пространстве между двумя металлическими цилиндрическими коаксиальными электродами в результате взаимодействия заряженной частицы с большим из них. Это взаимодействие проявляется при расстояниях между заряженной частицей и электродом, много меньших его радиуса.

Вблизи поверхности цилиндра его поверхность можно считать плоской, так что на заряд действует наведенное поле напряженностью  $e/4z^2$ ,  $z$  — расстояние от поверхности. Дрейфовая скорость электрона вблизи поверхности цилиндра оказывается равной  $\omega + eK/4z^2$ , где  $\omega$  — дрейфовая скорость под действием внешнего поля,  $K$  — подвижность иона. При этом мы считаем, что первый член сравнивается со вторым при расстоянии от поверхности катода, значительно превышающем длину свободного пробега  $\lambda$ , так что напряженность внешнего поля у электрода  $E$  мала:  $E \ll e/\lambda^2$ . Уравнение движения при расстояниях от электрода, меньших его радиуса, имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \omega + \frac{eK}{4z^2},$$

где  $z$  — расстояние от катода. Отсюда изменение времени движения заряда равно

$$\Delta t = \int_{-\infty}^0 \left[ \left( \omega + \frac{eK}{4z^2} \right)^{-1} - \frac{1}{\omega} \right] dz = -\frac{Ke}{4\omega^2} \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{z^2 + eK/4\omega} = -\frac{\pi}{2\omega} \sqrt{\frac{Ke}{\omega}}.$$

Для радиуса  $R$  большего электрода было использовано условие  $R\sqrt{Ke\omega} \gg 1$ . Это соответствует  $\Delta t \ll L/\omega$ , т. е. изменение времени пролета мало.



**Задача 1.50.** Прибор Таунсенда для измерения диффузии электронов имеет вид, представленный на рис. 1.4. Нить  $F$  эммитирует электроны, которые проникают в дрейфовую камеру  $K$  через щель. Электроны поглощаются секционированными анодами  $1$  и  $2$ , причем измеряется отношение токов  $I_1$  и  $I_2$  на эти электроды. Определить отношение токов в отсутствие и при наличии магнитного поля, если длина камеры  $L$  значительно превышает диаметр анода  $1$ , равный  $2r_0$ .

При отсутствии магнитного поля имеем для токов электронов

$$I_1 = C \int_0^{r_0} \exp\left(\frac{-\rho^2}{4\mathcal{D}t}\right) \rho d\rho = I_0 \exp\left(\frac{-r_0^2}{4\mathcal{D}t}\right),$$

$$I_2 = C \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-\rho^2}{4\mathcal{D}t}\right) \rho d\rho = I_0 \left[1 - \exp\left(\frac{-r_0^2}{4\mathcal{D}t}\right)\right],$$

где  $C$  — константа,  $I_0 = I_1 + I_2$  — полный ток,  $t = L/\omega$ ,  $\omega$  — дрейфовая скорость электронов. Мы считали, что время пролета ионов  $L/\omega$  значительно меньше времени диффузии  $\sim L^2/\mathcal{D}$  ( $L\omega/\mathcal{D} \gg 1$ ), т. е. пучок слабо размывается в результате диффузии.

Случай магнитного поля. Электроны движутся по окружности радиуса  $R = \omega mc/eH$ . Если этот радиус велик по сравнению с  $L$ , то смещение пятна по горизонтали составляет  $\Delta x = L^2/2R$ . При этом функция распределения электрона относительно центра пятна, согласно формуле (1.82), имеет вид

$$f = C \exp\left[-\frac{[(x-\Delta x)^2 + y^2] \omega}{4\mathcal{D}L}\right].$$

Отсюда находим искомое отношение токов

$$\frac{I_1}{I_1 + I_2} = \frac{\int_{-1}^{+1} d \cos \vartheta \int_0^{r_0} f \rho d\rho}{\int_{-1}^{+1} d \cos \vartheta \int_0^{\infty} f \rho d\rho} =$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{-\Delta x^2 \omega}{4\mathcal{D}L}\right)}{\Delta x} \int_0^{r_0} \exp\left(\frac{-\rho^2 \omega}{4\mathcal{D}L}\right) \operatorname{sh} \frac{\rho \Delta x \omega}{2\mathcal{D}L} d\rho.$$

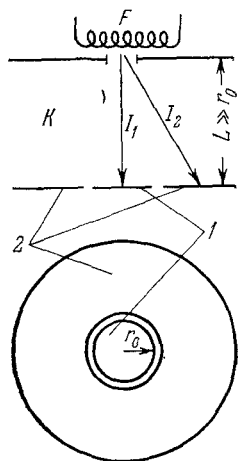


Рис. 1.4. Прибор Таунсенда для измерения подвижности электронов.

**Задача 1.51.** Определить функцию распределения частицы, совершающей броуновское движение по поверхности сферы.

Эта задача имеет практическое значение, в частности, если нас интересует направление момента (орбитального или спина)

частицы, которое мало меняется при однократном соударении с частицами газа. Направление момента будем характеризовать точкой на сфере, так что, считая в уравнении (1.78)  $r = \text{const}$ , приведем его к виду

$$\frac{\partial W}{\partial t} = d \left[ \frac{\partial}{\partial \cos \vartheta} \left( \sin^2 \vartheta \frac{\partial W}{\partial \cos \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right],$$

где  $\vartheta, \varphi$  — полярный и аксиальный углы, характеризующие направление момента, коэффициент диффузии  $d$  связан с коэффициентом диффузии  $\mathcal{D}$  уравнения (1.78) соотношением  $\mathcal{D} = r^2 d$ .

Раскладывая функцию распределения  $W(\vartheta, \varphi, t)$  по сферическим гармоникам, получим, что решение этого уравнения можно представить в виде суммы

$$W = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) P_l(\cos \vartheta) e^{-l(l+1)at},$$

где  $P_l(x)$  — полином Лежандра.

Выведем два важных интегральных соотношения для функции распределения. Первое из них — для поляризации

$$P(t) = \int \cos \vartheta W d\vartheta / \int W d\vartheta$$

соответствует средней проекции вектора на выделенное направление ( $d\vartheta = d \cos \vartheta d\varphi$  — элемент телесного угла). Умножим уравнение диффузии на  $\cos \vartheta$  и проинтегрируем по углам. Получим  $\frac{dP}{dt} = -2dP$ , откуда  $P = P_0 e^{-2at}$ ,  $P_0$  — поляризация в начальный момент времени. Если за направление поляризации выбрать начальное направление вектора момента ( $P_0 = 1$ ), получим

$$\overline{1 - \cos \vartheta} = 1 - e^{-2at},$$

где черта сверху означает усреднение по функции распределения. Отсюда при  $t \rightarrow 0$  получаем

$$\overline{\vartheta^2} = 4 dt.$$

Это соотношение может быть принято за определение для коэффициента диффузии точки, движущейся по поверхности сферы.

Другое соотношение получим для величины  $K = \overline{\sin^2 \vartheta}$ , умножив уравнение диффузии на  $\sin^2 \vartheta$  и проинтегрировав его по углам. Получим  $\frac{dK}{dt} = -6dK$ , откуда

$$\overline{\sin^2 \vartheta} = \frac{2}{3} (1 - e^{-6at}).$$

При стремлении времени к нулю это соотношение, как и соотношение для поляризации, дает  $\overline{\vartheta^2} = 4 dt$ .

**Задача 1.52.** В газе имеется небольшая примесь молекул, которые эффективно поглощают излучение внешнего источника (например, лазера). Сам газ не поглощает этого излучения. Поглощая фотон, молекула приобретает импульс в направлении движения фотона. Это явление лежит в основе метода отделения примеси. Поток газа с примесью облучается в поперечном направлении излучением, под действием которого создается неоднородное распределение примеси в потоке газа после прохождения им зоны облучения. Оценить, какую энергию излучения необходимо затратить на одну молекулу примеси, чтобы получить заметный коэффициент разделения. Считать, что поперечный размер потока превышает длину пробега фотонов.

Поглощая фотон с энергией  $\hbar\omega$ , молекула примеси приобретает импульс в направлении движения фотона, равный  $\hbar\omega/c$ . Пусть  $J_\omega d\omega$  — поток излучения с частотой, находящейся в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , так что  $\int J_\omega d\omega$  — энергия излучения на всех частотах, приходящаяся на единицу площади в единицу времени. Вероятность поглощения в единицу времени фотонов, находящихся в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , выделенной молекулой примеси, равна  $\frac{J_\omega d\omega}{\hbar\omega} \sigma_{\text{погл}}$ , где  $\sigma_{\text{погл}}(\omega)$  — сечение поглощения фотона на данной частоте. Отсюда находим силу, действующую на молекулу примеси из-за поглощения его излучения:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c} \int J_\omega \sigma_{\text{погл}} d\omega.$$

При этом мы считаем, что поглощенный молекулой фотон успевает высветиться задолго до того, как поглотится следующий фотон.

Под действием найденной силы молекула примеси дрейфует в газе. Для того чтобы произошло заметное разделение примеси, необходимо, чтобы за время, в течение которого данная молекула находится в зоне облучения, она успела пройти расстояние, сравнимое с поперечными размерами потока  $L$ . Это оптимальное время для молекулы примеси порядка

$$\tau \sim \frac{L}{\omega} \sim \frac{L}{bF} \sim \frac{TL}{\lambda v_T F} \sim \frac{TLc}{\lambda v_T \int J_\omega \sigma_{\text{погл}} d\omega},$$

где  $\omega$  — дрейфовая скорость молекулы примеси в газе под действием силы  $F$ ,  $b \sim T/\lambda v_T$  — подвижность молекулы примеси в газе ( $T$  — тепловая энергия молекул,  $v_T$  — тепловая скорость молекулы,  $\lambda$  — длина пробега молекулы примеси в газе).

Энергия, поглощаемая одной молекулой примеси в единицу времени, равна  $\int J_\omega \sigma_{\text{погл}} d\omega$ , следовательно, энергия, затрачиваемая

на разделение одной частицы, по порядку величины равна

$$\varepsilon \sim \int J_{\omega} \sigma_{\text{погл}} d\omega \tau \sim T \frac{L}{\lambda} \frac{c}{v_T}.$$

Отсюда видно, что энергия, затрачиваемая на одну частицу при разделении, на много порядков превышает тепловую энергию частиц.

**Задача 1.53.** При условиях предыдущей задачи найти распределение примеси по длине трубки, в которой находится неподвижная смесь, причем облучение проводится в направлении оси трубки. Длина пробега частиц мала по сравнению с поперечными размерами трубки, тепловыми эффектами при поглощении фотонов можно пренебречь.

Действие излучения на частицы примеси эквивалентно действию на них силового поля. Поэтому распределение частиц примеси вдоль оси трубки — распределение Больцмана:

$$N = N_0 e^{-Fx/T},$$

где  $x$  — координата вдоль оси трубки,  $T$  — температура газа,  $N_0$  — плотность частиц примеси в начале координат. Сила  $F$ , действующая на частицу примеси, найдена в предыдущей задаче и составляет

$$F = \frac{1}{c} \int J_{\omega} \sigma_{\text{погл}} d\omega,$$

где  $J_{\omega}$  — интенсивность падающего излучения,  $\sigma_{\text{погл}}$  — сечение поглощения частицами примеси на данной частоте. При этом использовано предположение, что длина пробега фотонов превышает продольный размер трубки. Плотность частиц примеси увеличивается в направлении распространения излучения.

## ЗАРЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ В ГАЗЕ

### § 1. Свойства слабоионизованной плазмы, обусловленные заряженными частицами

Объектом нашего исследования является система, состоящая из нейтральных частиц и относительно малого числа заряженных частиц. Однако взаимодействие между нейтральными частицами, так же как и взаимодействие нейтральных и заряженных частиц, носит короткодействующий характер по сравнению с дальнедействующим кулоновским взаимодействием между заряженными частицами. По этой причине некоторые свойства плазмы определяются присутствием в ней заряженных частиц, хотя их может оказаться мало по сравнению с нейтральными частицами. Такие свойства плазмы мы изучим в данной главе.

Мы будем рассматривать плазму, параметры которой удовлетворяют соотношению

$$e^6 N_e / T^3 \ll 1. \quad (2.1)$$

Здесь  $e$  — заряд,  $N_e$  — плотность,  $T$  — температура электронов, плазма считается квазинейтральной. Плазма, параметры которой удовлетворяют условию (2.1), носит название идеальной плазмы. Идеальная плазма реализуется почти во всех практически интересных случаях. Как следует из условия (2.1), в идеальной плазме средняя энергия свободных электронов ( $\sim T$ ) значительно превышает потенциал взаимодействия между ними ( $\sim e^2 N_e^{1/3}$ ) на средних расстояниях. Таким образом, заряженная частица в идеальной плазме основное время проводит как свободная и движется по прямолинейным траекториям.

**Задача 2.1.** Оценить понижение потенциала ионизации для атома, помещенного в плазму.

Понижение потенциала ионизации атома определяется двумя причинами. Во-первых, наличие свободных ионов дает возможность связанному электрону переходить от одного иона к другому, и если такой переход происходит свободно, данное возбуждение относится уже не к изолированному атому, а ко всей системе. Во-вторых, столкновения электрона с возбужденным атомом приводят к переходам между соседними уровнями. Если переход между ними совершается с частотой, большей чем разность частот обращения электрона по соответствующим этим состояниям орбитам, то мы не можем разделить данные состояния по энергиям.

Согласно первому критерию атом нельзя считать изолированным, если его размер  $r_a$  оказывается порядка среднего расстояния между ионами  $N_i^{-1/3}$ . Связывая размер атома с потенциалом ионизации  $I$  ( $r_a \sim e^2/I$ ), находим, что понижение потенциала ионизации  $\Delta I$  равно по порядку величины

$$\Delta I \sim e^2 N_i^{1/3}. \quad (2.2)$$

Понижение потенциала ионизации, отвечающее второму механизму, определяется соотношением

$$N_e v \sigma \sim \Delta E / \hbar, \quad (2.3)$$

где  $v$  — скорость электрона,  $\Delta I$  — энергия связи электрона в изолированном атоме, при которой состояние в плазме перестает быть связанным,  $\Delta E$  — расстояние между соседними уровнями для электрона, находящегося в поле кулоновского центра,  $\sigma$  — сечение перехода между соседними состояниями возбужденного атома под действием электронного удара. Оценим сечение по классической формуле, рассматривая столкновение электрона с возбужденным атомом как столкновение двух свободных электронов. Сечение, приводящее к передаче энергии от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ , равно в этом случае (см. Приложение 1)

$$d\sigma = \frac{2\pi e^4}{m v^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

Отсюда сечение столкновения электрона с атомом, приводящее к передаче энергии, превышающей разность энергий между соседними уровнями  $\Delta E$ , равно

$$\sigma = \frac{2\pi e^4}{m v^2 \Delta E}.$$

Используя это, найдем потенциал ионизации возбужденного атома, для которого выполняется условие (2.3). Имеем

$$\Delta E \sim I^{3/2} (\hbar^2 / m e^4)^{1/2},$$

так что состояние с энергией связи электрона

$$I \sim e^2 N_e^{1/3} (e^2 / \hbar v)^{1/3}$$

перестает быть стационарным. Поскольку скорость электрона  $v \sim \sqrt{T/m}$ , то понижение потенциала ионизации равно

$$\Delta I \sim e^2 N_e^{1/3} (m e^4 / \hbar^2 T)^{1/6}. \quad (2.4)$$

Как видно, для квазинейтральной низкотемпературной плазмы эта величина несколько превышает величину (2.2), отвечающее первому механизму. Однако для практически интересных температур электронов расхождение между формулами (2.2) и (2.4) мало. К тому же при получении формулы (2.4) мы использовали завышенное значение для сечения перехода. Поэтому практически

понижение потенциала ионизации, обусловленное ионами (2.2) и электронами (2.4), одного порядка. Заметим, что для идеальной плазмы понижение потенциала ионизации всегда много меньше тепловой энергии электронов.

**Задача 2.2.** Определить потенциал точечного заряда, помещенного в идеальную плазму.

Поле заряда, помещенного в плазму, экранируется заряженными частицами плазмы. Это следует учесть при написании уравнения Пуассона для напряженности поля  $\mathbf{E}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Здесь плотность заряда  $\rho$ , согласно распределению Больцмана, равна

$$\rho = \rho_+ - \rho_- = N_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{T}\right) - N_0 \exp\left(\frac{-e\varphi}{T}\right) = 2N_0 \operatorname{sh}\left(\frac{e\varphi}{T}\right),$$

где  $N_0$  — средняя плотность заряженных частиц,  $\rho_+$ ,  $\rho_-$  — плотность ионов и электронов соответственно,  $T$  — температура электронов и ионов,  $\varphi$  — потенциал внешнего поля. Уравнение Пуассона принимает вид ( $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ )

$$\Delta\varphi = 8\pi e N_0 \operatorname{sh} \frac{e\varphi}{T}. \quad (2.5)$$

Будем считать, что для идеальной плазмы в области расстояний от пробного заряда, где правая часть уравнения существенна, выполняется соотношение  $e\varphi/T \ll 1$ . Тогда уравнение Пуассона приводится к виду

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi) = \frac{8\pi N_0 e^2}{T} r\varphi,$$

где  $r$  — расстояние от заряженной частицы до пробной. Решение этого уравнения, дающее потенциал кулоновского поля при малых расстояниях от заряда, имеет вид

$$\varphi = \frac{e}{r} e^{-r/r_D}, \quad (2.6)$$

где  $r_D$  — радиус Дебая — Гюккеля, равный

$$r_D = \left(\frac{T}{8\pi N_0 e^2}\right)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Таким образом, поле заряда в плазме экранируется заряженными частицами на расстоянии порядка радиуса Дебая — Гюккеля. Как следует из формул (2.1), (2.7), радиус Дебая — Гюккеля для идеальной плазмы много больше среднего расстояния между заряженными частицами:

$$r_D N^{1/3} \sim \left(\frac{T^3}{N_0 e^6}\right)^{1/6} \gg 1.$$

Выясним справедливость предположений, положенных в основу вывода формулы (2.6). Уравнение (2.5) справедливо в случае, если потенциал  $\varphi$  мало меняется на расстояниях порядка среднего расстояния между заряженными частицами. Только в этом случае средняя плотность заряда не зависит от случайного расположения частиц. Данное условие дает, что полученный результат применим для расстояний от заряда  $r \gg N_0^{-1/3}$ . В этой области расстояний величина

$$\frac{e\varphi}{T} \ll \frac{e^2}{rT} \ll \frac{e^2 N_0^{1/3}}{T} \ll 1,$$

т. е. разложение правой части уравнения (2.5) в ряд для этих расстояний правомерно. Поскольку при  $r \ll r_D$  правая часть уравнения (2.5) не сказывается на решении, то это уравнение и его решение применимы для всех расстояний от центра в первом порядке разложения по параметру идеальности плазмы  $e^2 N_0^{1/3}/T \ll 1$ .

**Задача 2.3.** В плазму проникает однородное электрическое поле напряженностью  $E_0$ . Выяснить, как оно будет экранироваться плазмой.

Воспользуемся уравнением (2.5), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{dE}{dx} = -8\pi N_0 e \operatorname{sh} \frac{e\varphi}{T},$$

где  $E = E_x$  — напряженность электрического поля, ось  $x$  направлена по нормали к поверхности плазмы. Плазма находится в пространстве при  $x > 0$ . Умножим это уравнение на  $E = -d\varphi/dx$  и найдем первый интеграл, используя граничное условие  $E, \varphi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Это даёт

$$E = -\frac{d\varphi}{dx} = \pm \sqrt{32\pi N_0 T} \operatorname{sh} \frac{e\varphi}{T}.$$

Так как напряженность поля и потенциал убывает с увеличением  $x$ , то из этого физического требования следует, что в правой части полученного уравнения нужно оставить знак плюс. Решая это уравнение, найдем

$$\operatorname{th} \frac{e\varphi}{4T} = \operatorname{th} \frac{e\varphi_0}{4T} \left( -\frac{x}{r_D} \right),$$

где  $\varphi_0 = \varphi(0)$ . Будем считать  $e\varphi_0/T \ll 1$ , так что

$$\varphi = \varphi_0 \exp\left(-\frac{x}{r_D}\right) \quad E = -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_0}{r_D} \exp\left(-\frac{x}{r_D}\right).$$

Используя граничное условие  $E_0 = E(0)$ , получим

$$\varphi = E_0 r_D \exp\left(-\frac{x}{r_D}\right), \quad E = E_0 \exp\left(-\frac{x}{r_D}\right).$$



Этот результат справедлив, если  $e\varphi_0/T \ll 1$ , т. е.  $eE_0 r_D/T \ll 1$ , иными словами, энергия, которая передается от поля свободной заряженной частице на расстоянии порядка радиуса экранирования, много меньше тепловой энергии частицы.

**Задача 2.4.** Определить радиус Дебая—Гюккеля в случае, когда температуры электронов  $T_e$  и ионов  $T_i$  не совпадают.

В этом случае уравнение (2.5) принимает вид

$$\Delta\varphi = 4\pi e N_0 \left[ \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right) - \exp\left(\frac{-e\varphi}{T_i}\right) \right].$$

Представив это уравнение при малых  $e\varphi/T_{e,i}$  в виде

$$\Delta\varphi = \varphi/r_D^2,$$

находим величину радиуса Дебая—Гюккеля

$$r_D = \sqrt{\frac{T_e T_i}{4\pi N_0 e^2 (T_e + T_i)}}. \quad (2.8)$$

В случае равных температур электронов и ионов  $T_e = T_i = T$  эта формула переходит в формулу (2.7).

**Задача 2.5.** Слабоионизованная плазма создается в малом объеме и растекается по всему объему газа. Рассмотреть режим амбиполярной диффузии, когда плотность заряженных частиц достаточно велика, так что плазма в процессе разлета остается квазинейтральной. Определить поток заряженных частиц и выяснить, при каких условиях осуществляется режим амбиполярной диффузии.

Потоки электронов  $\mathbf{j}_e$  и ионов  $\mathbf{j}_i$  в рассматриваемом случае определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e &= -\mathcal{D}_e \nabla N_e + E K_e N_e, \\ \mathbf{j}_i &= -\mathcal{D}_i \nabla N_i - E K_i N_i, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{D}$ ,  $K$ ,  $N$ —коэффициент диффузии, подвижность и плотность заряженных частиц данного сорта,  $E$ —напряженность самосогласованного поля, создаваемого пространственным зарядом плазмы. Коэффициент диффузии  $\mathcal{D} \sim v_T \lambda$ , где  $v_T$ —тепловая скорость частиц,  $\lambda$ —длина их свободного пробега. Как следует отсюда,  $\mathcal{D} \sim m^{-1/2}$  ( $m$ —масса частиц), т. е. коэффициент диффузии электронов значительно выше, чем коэффициент диффузии ионов. Поэтому при малой плотности плазмы, когда взаимодействием заряженных частиц можно пренебречь, при распаде плазмы электроны быстро распространяются по всему объему газа. Однако при достаточной плотности плазмы ионы задерживают своим полем электроны. В этом режиме—режиме амбиполярной диффузии—плотности заряженных частиц и их потоки совпадают. Поскольку  $j_e \ll \mathcal{D}_e \nabla N_e$ , то в масштабе величин порядка  $\mathcal{D}_e \nabla N_e$  имеем

—  $\mathcal{D}_e \nabla N_e + EK_e N_e = 0$ , откуда  $E = \frac{\mathcal{D}_e}{K_e} \frac{\nabla N_e}{N_e}$ . Ток заряженных частиц в данном случае равен

$$\mathbf{j} = -\mathcal{D}_i \nabla N - EK N = -\mathcal{D}_a \nabla N, \quad (2.9)$$

здесь плотность заряженных частиц  $N = N_e = N_i$  и коэффициент амбиполярной диффузии  $\mathcal{D}_a$  равен

$$\mathcal{D}_a = \mathcal{D}_i + \frac{K_i}{K_e} \mathcal{D}_e. \quad (2.10)$$

Потенциал самосогласованного поля мало изменяется на длине пробега заряженных частиц по сравнению с их тепловой энергией. Действительно,

$$eE = \frac{e\mathcal{D}_e}{K_e} \frac{\nabla N_e}{N_e} \sim \frac{T_e}{L},$$

где  $L$  — характерное расстояние порядка размеров плазмы, на котором заметно изменяются ее свойства. Поскольку  $L \gg \lambda$  ( $\lambda$  — длина свободного пробега), то  $eE\lambda \sim T_e \lambda/L \ll T_e$ , т. е. в рассматриваемом случае применимо соотношение Эйнштейна (1.79). Используя соотношение Эйнштейна, получим для коэффициента амбиполярной диффузии

$$\mathcal{D}_a = \mathcal{D}_i (1 + T_e/T_i), \quad (2.11)$$

причем температура электронов  $T_e$  и ионов  $T_i$  может не совпадать.

Выясним критерий применимости рассматриваемого случая, который можно представить в виде

$$|N_e - N_i| \ll N,$$

где  $N = N_e \approx N_i$ . Из уравнения Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e(N_i - N_e)$$

имеем  $|N_i - N_e| \sim E/4\pi eL$ , где  $L$  — размер плазмы. С другой стороны,

$$E = \frac{\mathcal{D}_e}{K_e} \frac{\nabla N_e}{N_e} \sim \frac{T_e}{eL}.$$

Отсюда

$$|N_i - N_e| \sim \frac{T_e}{4\pi e^2 L^2},$$

и амбиполярная диффузия имеет место, если размер плазмы  $L$  значительно превышает радиус Дебая—Гюккеля для данной плазмы  $r_D = \sqrt{T_e/8\pi N e^2}$ :

$$L \gg r_D. \quad (2.12)$$

Приведем числовой пример, соответствующий параметрам положительного столба разряда. Размер плазмы  $L \sim 1$  см,  $T_e \sim 1$  эВ. В этом случае амбиполярная диффузия осуществляется,

если плотность плазмы превышает  $3 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$ . Это очень малая величина, ибо плотность молекул газа при нормальных условиях  $2,7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ .

**Задача 2.6.** Исследовать проникновение медленно меняющихся внешних полей в плазму (скин-эффект).

Для исследования поведения внешних полей внутри плазмы используем систему уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0,$$

где  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей,  $\mathbf{j}$  — плотность тока. К этим уравнениям следует добавить закон Ома:

$$\mathbf{j} = \Sigma \mathbf{E}$$

( $\Sigma$  — проводимость плазмы). При этом полагается, что магнитное поле в плазме не очень велико и проводимость можно считать скалярной величиной.

Предположим, что характерная частота изменения внешних полей  $\omega$  мала по сравнению с проводимостью плазмы  $\Sigma$ . Тогда, используя в первом из уравнений Максвелла закон Ома и пренебрегая производной по времени, получим  $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \Sigma \mathbf{E}/c$ . Исключим с помощью этого уравнения из второго уравнения Максвелла напряженность электрического поля. На основе соотношения  $\text{rot } \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \text{div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$  с помощью третьего уравнения из системы уравнений Максвелла получим

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2 \Sigma}{4\pi \Sigma} \Delta \mathbf{H}.$$

Из этого уравнения следует, что характерный размер, на котором заметно изменяются поля, равен

$$l = \left( \frac{c^2}{4\pi \omega \Sigma} \right)^{1/2}.$$

Эта величина носит название толщины скин-слоя.

Рассмотрим, в частности, случай, когда плазма ограничена плоской стенкой, причем вне плазмы напряженность магнитного поля равна  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\omega t}$ . Тогда уравнение для магнитного поля внутри плазмы принимает вид

$$l^2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \mathbf{H} e^{i\pi},$$

(ось  $z$  направлена перпендикулярно границе). Решая данное уравнение с учетом граничного условия и физического требования,

чтобы поле не возрастало внутрь плазмы, получим

$$H = H_0 \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{z}{l\sqrt{2}} \right) - \frac{z}{l\sqrt{2}} \right].$$

Как видно, переменные внешние поля малой частоты проникают в плазму на глубину порядка толщины скин-слоя. Данное явление носит название скин-эффекта.

## § 2. Статистическая физика слабоионизованного газа

**Задача 2.7.** Установить связь между плотностью электронов, ионов и атомов в идеальной плазме при наличии термодинамического равновесия (распределение Саха).

Распределение атомов по возбужденным состояниям определяется формулой Больцмана (1.10). При этом для состояний непрерывного спектра статистический вес равен

$$g_c = g_e g_i \int \frac{dr dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

где  $g_i$  — статистический вес иона,  $g_e = 2$  — статистический вес электрона,  $r, p$  — координата и импульс электрона.

По порядку величины  $\int dr \sim 1/N_e$  — объем, приходящийся на один электрон ( $N_e$  — плотность свободных электронов),  $\int dp \sim p_e^3 \sim (mT)^{3/2}$ , где  $m$  — масса электрона,  $p_e$  — характерный импульс свободного электрона. Таким образом, статистический вес непрерывного спектра равен

$$g_c \sim \frac{g_i}{N_e} \left( \frac{mT}{\hbar^2} \right)^{3/2},$$

и для идеальной плазмы может оказаться весьма большой величиной даже при низких температурах. В силу большого статистического веса непрерывного спектра степень ионизации газа становится заметной при температурах, при которых средняя кинетическая энергия электронов мала по сравнению с потенциалом ионизации атома. При этих температурах вероятность нахождения атома в возбужденном состоянии мала.

Определим на основе закона Больцмана (1.10) число свободных электронов в газе, находящемся в термодинамическом равновесии. При этом, как было показано, вероятность возбуждения атомов мала, так что атомы могут находиться только в основном или ионизованном состоянии. Пусть в объеме  $\Omega$  имеется  $i + a$  заряженных атомных остатков данного сорта и  $e + a$  электронов. Эти электроны могут быть как свободными, так и находиться в связанном состоянии с атомными остатками, причем, согласно проведенному ранее анализу, следует учитывать только

одно связанное состояние электрона и атомного остатка. В результате столкновения частиц происходят переходы между свободными и связанными состояниями электронов и атомных остатков, и имеется отличная от нуля вероятность  $W(a, e, i)$  обнаружить в системе в данный момент времени  $a$  атомов,  $i$  ионов,  $e$  электронов. Пусть  $\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}$  — равновесное число атомов, электронов и ионов, соответственно ( $a, e, i \gg 1$ ). Тогда вероятность  $W$  обнаружить в системе данное число частиц данного сорта при их равновесных количествах как функция числа атомов  $a$  имеет максимум, и так как  $\bar{a}, \bar{e}, \bar{i} \gg 1$ , то это условие удобно представить в виде

$$W(\bar{a}, \bar{i}, \bar{e}) = W(\bar{a}-1, \bar{i}+1, \bar{e}+1). \quad (2.13)$$

Будем считать, что вероятность нахождения данного электрона в свободном или связанном состоянии определяется законом Больцмана. Тогда вероятность обнаружить в рассматриваемой системе  $a$  атомов,  $i$  ионов и  $e$  электронов дается выражением

$$\begin{aligned} W(a, i, e) &= A(g_0)^a C_{a+i}^a \left[ \prod_{j=0}^e \frac{\Omega dp_j}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{p_j^2}{2mT} - \frac{I}{T}\right) \right] (g_e)^e (g_i)^i (e!)^{-1} \equiv \\ &\equiv A \frac{(a+i)!}{a!i!e!} (g_0)^a (g_e)^e (g_i)^i \left[ \Omega \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{I}{T}\right) \right]^e. \end{aligned}$$

Здесь  $A$  — нормировочный множитель, не зависящий от  $a$  при данном полном числе атомных остатков  $a+i$  и электронов  $a+e$ ,  $g_0$  — статистический вес атома, находящегося в основном состоянии,  $g_e = 2$  — статистический вес электрона,  $g_i$  — статистический вес иона,  $j$  — номер свободного электрона. Далее,  $I$  — потенциал ионизации атома,  $T$  — температура электронов,  $C_{a+i}^a$  — число способов, которыми выбираются атомные остатки, находящиеся в связанном состоянии с электронами (атомные остатки считаются неподвижными).

Поскольку перестановка электронов не приводит к физически новому состоянию, мы должны выбрать фазовое пространство для импульсов электронов таким образом, чтобы импульс одного из пронумерованных электронов всегда был больше импульса другого из электронов. В этом случае мы не учитываем много раз тождественных состояний, отличающихся перестановкой электронов. В приведенном выше выражении интегрирование проведено по всему пространству импульсов каждого из электронов, а для учета указанного обстоятельства статистический вес электронов делится на число перестановок между электронами.

Введем  $N_a = \bar{a}/\Omega$ ,  $N_i = \bar{i}/\Omega$ ,  $N_e = \bar{e}/\Omega$  — равновесные плотности атомов в основном состоянии, электронов и ионов, соответственно. Воспользовавшись соотношением (2.13), получим в случае термо-

динамического равновесия ( $\bar{a}, \bar{e}, \bar{i} \gg 1$ )

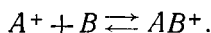
$$\frac{N_e N_i}{N_a} = \frac{g_e g_i}{g_a} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{I}{T} \right). \quad (2.14)$$

Эта формула носит название распределения Саха. Отсюда нетрудно вычислить статистический вес непрерывного спектра электрона, который равен

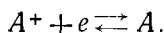
$$g_c = \frac{g_e g_i}{N_i} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}. \quad (2.15)$$

**Задача 2.8.** Получить соотношение между плотностью атомных ионов, молекулярных ионов и атомов в слабоионизованной плазме, если температура газа  $T$  мала по сравнению с энергией диссоциации молекулярного иона  $D$ , но велика по сравнению с энергией возбуждения вращательного уровня. Равновесное расстояние между ядрами в молекулярном ионе равно  $r_0$ , энергия возбуждения колебательного уровня  $\hbar\omega$ .

Равновесие между атомными и молекулярными ионами устанавливается в результате химической реакции



Эта реакция полностью эквивалентна рассмотренному в предыдущей задаче ионизационному равновесию



Поэтому соотношение между плотностью атомных ионов  $N_{1i}$ , атомов  $N_a$  и молекулярных ионов  $N_{2i}$  аналогично распределению Саха (2.14) и имеет вид

$$\frac{N_{1i} N_a}{N_{2i}} = \frac{g_{1i} g_a}{g_{2i}} \left( \frac{\mu T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-D/T}.$$

Здесь  $\mu$  — приведенная масса ядер,  $g_{1i}$ ,  $g_a$  — статистические веса атомного иона и атома, они характеризуют число электронных состояний этих частиц;  $g_{2i}$  — число состояний молекулярного иона.

Различие данного распределения по сравнению с распределением Саха в том, что при ионизационном равновесии практически все атомы находились в основном состоянии, ибо тепловая энергия электронов была мала по сравнению с энергией возбуждения атома. Теперь выполняется обратное соотношение, так что молекулярный ион с близкой вероятностью может находиться во многих вращательных, а возможно, и во многих колебательных состояниях. Поэтому  $g_{2i}$  — среднее число состояний, в которых может находиться молекулярный ион.

Энергия состояния молекулярного иона, находящегося на колебательном уровне  $\nu$  и обладающего моментом  $J$ , равна

$$\varepsilon = \hbar\omega\nu + BJ(J+1),$$

где  $B = \hbar^2/2\mathcal{J}$  — вращательная постоянная ( $\mathcal{J} = \mu r_0^2$  — момент инерции молекулярного иона). Это дает следующее соотношение для среднего числа состояний, в которых может находиться молекулярный ион:

$$g_{2i} = g_{\text{мол}} \sum_{\nu} \int (2J+1) dJ \exp \left[ -\frac{\hbar\omega\nu - BJ(J+1)}{T} \right],$$

где  $g_{\text{мол}}$  — статистический вес молекулярного иона, отвечающий его электронному состоянию,  $(2J+1)$  — статистический вес данного вращательного состояния молекулярного иона. Просуммировав по колебательному квантовому числу  $\nu$  и интегрируя по вращательному квантовому числу  $J$ , получим

$$g_{2i} = g_{\text{мол}} \frac{T}{B} \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega/T}}.$$

Используя это выражение, находим следующее соотношение между плотностями ионов и атомов:

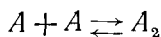
$$\frac{N_{1i}N_a}{N_{2i}} = \frac{g_{1i}g_a}{g_{\text{мол}}} e^{-D/T} \frac{1}{2\pi r_0^2} \sqrt{\frac{\mu T}{2\pi\hbar^2}} (1 - e^{-\hbar\omega/T}).$$

При этом мы считали, что ядра молекулярного иона не являются изотопами. В противном случае, как это следует из симметрии ядерной волновой функции для тождественных ядер, статистический вес молекулярного иона следует уменьшить вдвое. Действительно, при этом полная волновая функция должна изменять знак при перестановке ядер местами, а из такого условия симметрии волновой функции вытекает требование, чтобы вращательная волновая функция обладала определенным типом симметрии, т. е. момент вращения был только четным или же только нечетным. Поэтому половина состояний не может реализоваться. Это обстоятельство приводит к следующему соотношению между плотностями атомных и молекулярных ионов и атомов:

$$\frac{N_{1i}N_a}{N_{2i}} = \frac{g_{1i}g_a}{g_{\text{мол}}} e^{-D/T} \frac{1}{2\pi r_0^2} \sqrt{\frac{\mu T}{2\pi\hbar^2}} (1 - e^{-\hbar\omega/T}).$$

**Задача 2.9.** Найти соотношение между плотностью атомов и двухатомных молекул, которые могут быть образованы из этих атомов. Энергия диссоциации молекулы равна  $D$ , расстояние между колебательными уровнями  $\hbar\omega$ , равновесное расстояние между ядрами  $r_0$ , масса ядра  $M$ , температура газа  $T$ .

Рассматриваемое термодинамическое равновесие соответствует реакции



и эквивалентно случаю, рассмотренному в предыдущей задаче. При этом следует учесть, что для одинаковых ядер статистиче-

ский вес молекулы уменьшается вдвое по сравнению со случаем, когда ядра—изотопы. Это связано со свойством симметрии молекулы при отражении ядер относительно плоскости симметрии. Учитывая это и используя результат предыдущей задачи, получаем следующее соотношение между плотностью атомов  $N_a$  и молекул  $N_m$ :

$$\frac{N_a^2}{N_m} = \frac{g_a^2}{(2) g_{\text{мол}}} \frac{(1 - e^{-\hbar\omega/T})}{4\pi r_0^2} \sqrt{\frac{MT}{\pi\hbar^2}} e^{-D/T},$$

где  $\mu = M/2$ —приведенная масса ядер,  $g_a$ ,  $g_{\text{мол}}$ —статистический вес атома и молекулы соответственно, характеризующий число их электронных состояний, величина (2) равна 2 для ядер-изотопов и 1 для одинаковых ядер; остальные обозначения объяснены в условии задачи.

**Задача 2.10.** Определить соотношение между плотностью электронов, ионов и атомов, если ионизация атомов происходит через возбуждение резонансного уровня, который высвечивается за время  $\tau$ , причем резонансное излучение свободно выходит за пределы системы. Константа тушения резонансно-возбужденного состояния  $k_{\text{туш}}$ ; излучение из других возбужденных состояний не влияет на установление равновесия.

При заданных условиях задачи плотность атомов в резонансно-возбужденном состоянии  $N^*$  связана с плотностью электронов  $N_e$  и плотностью ионов  $N_i$  соотношением Саха

$$\frac{N_e N_i}{N^*} = \frac{g_e g_i}{g_*} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-I^*/T},$$

где  $g_*$ ,  $g_e$ ,  $g_i$ —статистические веса соответствующих частиц,  $T$ —температура системы,  $I^*$ —потенциал ионизации возбужденного атома.

Свяжем плотность атомов в основном  $N_a$  и резонансно-возбужденном  $N^*$  состоянии. Для плотности атомов в возбужденном состоянии имеем уравнение баланса

$$\frac{dN^*}{dt} = N_e k_{\text{возб}} N_a - N_e k_{\text{туш}} N^* - \frac{N^*}{\tau} = 0,$$

где  $k_{\text{возб}}$ —константа возбуждения атома в резонансное состояние. Отсюда находим

$$\frac{N^*}{N_a} = \frac{k_{\text{возб}}/k_{\text{туш}}}{1 + 1/N_e k_{\text{туш}} \tau}.$$

При отсутствии излучения ( $\tau \rightarrow \infty$ ) плотности атомов в основном и возбужденном состояниях связаны соотношением Больцмана:

$$N^* = \frac{g_*}{g_a} N_a e^{-\Delta E/T},$$

$\Delta E$ —энергия возбуждения. Используя это, получим связь между константами возбуждения и тушения. Это приводит к следующему



соотношению между плотностями атомов, когда возбужденное состояние разрушается в результате высвечивания:

$$N^* = \frac{g_*}{g_a} N_a e^{-\Delta E/T} N_e k_{\text{туш}} \tau.$$

Подставляя это соотношение в распределение Саха, получим следующую связь между плотностью электронов и атомов в квазинейтральной плазме:

$$\frac{N_e}{N_a} = \frac{g_e g_i}{g_a} k_{\text{туш}} \tau \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-I/T},$$

где  $I = I^* + \Delta E$  — потенциал ионизации атома в основном состоянии.

**Задача 2.11.** Имеем газ, состоящий из двухатомных молекул, в котором поступательная и вращательная температуры  $T$  равны. Заселение возбужденных колебательных состояний происходит эффективно (например, электронным ударом), в результате чего энергия, запасенная на колебательных уровнях, значительно выше, чем средняя тепловая, или вращательная, энергия молекул. Заселенность колебательных уровней устанавливается в результате процессов обмена колебательными возбуждениями, причем эти процессы носят резонансный характер, т. е. сумма колебательных чисел молекул в начальном и конечном состояниях сохраняется. Учитывая это, установить равновесное распределение молекул по колебательно-вращательным уровням.

Запишем уравнение процесса, устанавливающего равновесие между колебательными уровнями:

$$M(v_1) + M(v_2) \rightleftharpoons M(v'_1) + M(v'_2).$$

Здесь  $M$  — молекула, в скобках указано колебательное квантовое число.

Наиболее эффективно протекают резонансные процессы, для которых  $v_1 + v_2 = v'_1 + v'_2$ . Для нерезонансных процессов мала константа скорости перехода в силу обмена относительно большой энергией между колебательными и поступательными степенями свободы. Поэтому равновесие между колебательными степенями свободы устанавливается только за счет резонансных процессов.

Свяжем константу прямого  $k(v_1, v_2 \rightarrow v'_1, v'_2)$  и обратного  $k(v'_1, v'_2 \rightarrow v_1, v_2)$  резонансных процессов. Из условия равновесия имеем

$$N_{v_1} N_{v_2} k(v_1, v_2 \rightarrow v'_1, v'_2) = N_{v'_1} N_{v'_2} k(v'_1, v'_2 \rightarrow v_1, v_2),$$

где  $N_v$  — плотность в соответствующем колебательном состоянии. Если к тому же имеет место термодинамическое равновесие по всем степеням свободы, то плотность молекул на каждом колеба-

тельном уровне определяется распределением Больцмана, так что

$$k(v_1, v_2 \rightarrow v'_1, v'_2) = k(v'_1, v'_2 \rightarrow v_1, v_2) e^{\Delta E/T},$$

здесь  $\Delta E$  — разность энергий на колебательных уровнях молекул при рассматриваемом переходе. Поскольку константа скорости рассматриваемого перехода как характеристика элементарного акта соударения молекул зависит от поступательной температуры  $T$ , но не от заселенности колебательных уровней, то это соотношение справедливо и в случае, когда колебательная температура не совпадает с поступательной. Поэтому из условия равновесия имеем

$$N_{v_1} N_{v_2} = N_{v'_1} N_{v'_2} e^{-\Delta E/T}. \quad (2.16)$$

Представим энергию возбуждения колебательного состояния в виде

$$E_v = \hbar\omega(v + 1/2) - \hbar\omega x_e(v + 1/2)^2,$$

где  $\omega$  — частота гармонического осциллятора,  $x_e$  — параметр ангармоничности. Дефект энергии  $\Delta E$  рассматриваемого процесса является аддитивной функцией от ангармонических поправок к колебательной энергии  $\Delta E_v$  для каждого из уровней, участвующих в рассматриваемом переходе. Именно,

$$\Delta E = \Delta E_{v_1} + \Delta E_{v_2} - \Delta E_{v'_1} - \Delta E_{v'_2},$$

где  $\Delta E_v = -\hbar\omega x_e(v + 1/2)^2$ . Учитывая это, находим зависимость плотности молекул на данном колебательном уровне  $N_v$  от поступательной температуры  $T$ :

$$N_v \sim \exp\left(-\frac{\Delta E_v}{T}\right) = \exp\left[\frac{\hbar\omega x_e(v + 1/2)^2}{T}\right].$$

Введем колебательную температуру  $T_v$ . При этом учтем, что в рассматриваемых процессах, устанавливающих равновесие по колебательным состояниям, полное число колебательных возбуждений в молекулах сохраняется. Это и позволяет ввести колебательную температуру, которая связана со средним числом колебательных возбуждений в молекуле  $\bar{v}$ . Среднее число колебательных возбуждений в молекуле, которое не изменяется в результате рассмотренного процесса, устанавливающего равновесие для заселенности колебательных уровней, определяется формулой Планка:

$$\bar{v} = \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega}{T_v}\right) - 1 \right]^{-1}.$$

Согласно формуле Больцмана зависимость плотности молекул на данном колебательном уровне от колебательной температуры  $T_v$  имеет вид

$$N_v \sim \exp\left(-\frac{\hbar\omega v}{T_v}\right).$$

Учитывая зависимость заселенности колебательного состояния от поступательной и колебательной температуры, получим

$$N_v = N_0 \exp \left[ -\frac{\hbar\omega v}{T_v} + \frac{\hbar\omega x_e v(v+1)}{T} \right], \quad (2.17)$$

где  $N_0$  — плотность молекул в основном колебательном состоянии. Эта формула дает для плотности молекул на колебательном уровне  $v$ , обладающих вращательным моментом  $J$ :

$$N_{vJ} = N_0 \frac{B}{T} (2J+1) \exp \left[ -\frac{\hbar\omega v}{T_v} + \frac{\hbar\omega x_e v(v+1) - BJ(J+1)}{T} \right], \quad (2.18)$$

где  $B$  — вращательная постоянная молекулы, причем поступательная и вращательная температуры молекулярного газа считаются одинаковыми.

Зависимость заселенности колебательных уровней от колебательного квантового числа в соответствии с формулой (2.17) имеет вид, представленный на рис. 2.1. Минимум функции распределения согласно формуле (2.17) соответствует колебательному квантовому числу:

$$v_{\min} = \frac{\hbar\omega}{2\hbar\omega x_e} \frac{T}{T_v}.$$

Приведем значения первого сомножителя для некоторых молекул:

Молекула	CO	H <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	NO	O <sub>2</sub>	OH
$\frac{\hbar\omega}{2\hbar\omega x_e}$	82	18	84	68	66	22

Как видно, если колебательная температура молекул превышает поступательную в несколько раз, то величина  $v_{\min} \sim 10$ , т. е. минимум функции распределения может быть реально достигнут.

Отметим, что вид распределения (2.17), которое иногда называют распределением Тринора, связан с тем, что величина колебательного кванта уменьшается по мере роста колебательного возбуждения. Поэтому образование молекулы в более возбужденном состоянии при обмене сталкивающихся молекул колебательными квантами оказывается более выгодным, что определяет рост логарифмической производной от функции распределения по номеру колебательного уровня с ростом колебательного возбуждения. Это обстоятельство приводит даже к росту функции распределения с ростом колебательного возбуждения при  $v > v_{\min}$ . Однако по мере уменьшения колебательного кванта возрастает вероят-

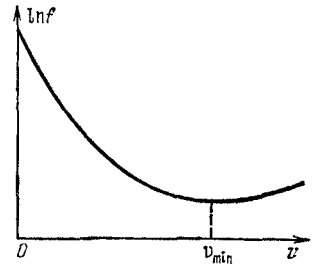


Рис. 2.1. Функция распределения молекул по колебательным состояниям.

ность колебательной релаксации, которой мы пренебрегали при получении распределения (2.17). Колебательная релаксация в конечном итоге приводит к резкому падению функции распределения на хвосте, т. е. при больших значениях колебательных квантовых чисел.

**Задача 2.12.** К молекулярному газу при условиях предыдущей задачи добавлена малая примесь изотопных молекул. Определить распределение изотопных молекул по колебательным состояниям, считая, что величины колебательных квантов у изотопной молекулы и молекулы основного газа близки.

При заданных условиях задачи изотопные молекулы в силу малости их концентрации не влияют на распределение молекул основного газа по колебательным состояниям, которое описывается формулами (2.17), (2.18). Распределение изотопных молекул по колебательным состояниям устанавливается в результате их столкновений с молекулами основного газа, причем при обмене колебательными квантами между сталкивающимися молекулами полное число колебательных квантов сохраняется. Поэтому в полной аналогии с предыдущей задачей имеем вместо (2.16) следующее соотношение для плотности  $N_v$  молекул основного газа и плотности  $n_v$  изотопных молекул:

$$N_v n_{v_2} = N_{v_1} n_{v_2} e^{-\Delta E/T},$$

где  $T$  — поступательная температура газа,  $\Delta E$  — изменение энергии при рассматриваемом переходе ( $v_1, v_2 \rightarrow v'_1, v'_2$ ).

Полученное соотношение запишем в виде

$$\frac{n_v}{n_0} = \frac{N_v}{N_0} \exp\left(\frac{\Delta \hbar \omega v}{T}\right);$$

здесь  $\Delta \hbar \omega$  — разность колебательных квантов для изотопной молекулы и молекулы основного газа. Для определенности считаем, что у изотопной молекулы колебательный квант меньше. С учетом формулы (2.17) имеем для распределения изотопных молекул по колебательным состояниям:

$$n_v = n_0 \exp\left[-\left(\frac{\hbar \omega}{T_v} - \frac{\Delta \hbar \omega}{T}\right)v + \frac{\hbar \omega x_e v(v+1)}{T}\right].$$

Как видно, при большом отличии колебательной температуры от поступательной в принципе возможно распределение изотопных молекул, отвечающее возрастанию функции распределения с ростом колебательного квантового числа. Колебательная релаксация меняет эту картину.

**Задача 2.13.** Вычислить среднюю энергию взаимодействия введенной в плазму заряженной частицы с частицами идеальной плазмы. Определить среднюю энергию заряженной частицы в идеальной плазме.

Потенциал взаимодействия двух заряженных частиц в плазме описывается экранированным кулоновским потенциалом и равен

$$U(r) = \frac{e^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right),$$

где  $r$  — расстояние между частицами,  $r_D$  — радиус Дебая — Гюккеля. Если пренебречь влиянием пробной частицы на пространственное распределение заряженных частиц плазмы, то в силу квазинейтральности плазмы средний потенциал взаимодействия пробной частицы с заряженными частицами каждого знака одинаков, т. е. средняя энергия взаимодействия введенной в плазму заряженной частицы с плазмой равна нулю. Отличный от нуля эффект мы получим после учета влияния поля пробной частицы на распределение частиц плазмы. Тогда, поскольку частицы того же знака заряда, что и пробная частица, будут расположены от нее на большем расстоянии, чем частицы с обратным знаком заряда, то рассматриваемый эффект отвечает притяжению, т. е. отрицательному знаку для энергии взаимодействия пробной частицы с плазмой.

Вычислим величину этой энергии взаимодействия. Имеем

$$\bar{U} = \int_0^{\infty} \frac{e^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right) (N_0 e^{-e\varphi/T} - N_0 e^{e\varphi/T}) dr,$$

где  $\varphi = \frac{e}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right)$  — потенциал, создаваемый пробной частицей в плазме,  $T$  — температура плазмы,  $N_0$  — средняя плотность заряженных частиц в плазме. При этом согласно закону Больцмана величина  $N_0 e^{-e\varphi/T}$  представляет собой плотность заряженных частиц того же знака заряда, что и пробная,  $N_0 e^{e\varphi/T}$  — плотность заряженных частиц с другим знаком заряда. Величина  $N_0 e^{-e\varphi/T} dr$  — среднее число частиц плазмы с тем же знаком заряда, которые находятся в элементе пространства  $dr$ .

Вычислим искомый интеграл. Основной вклад в него вносят расстояния от частицы порядка радиуса Дебая, при котором можно произвести разложение показателя экспоненты. Учитывая это, получим

$$\bar{U} = \int_0^{\infty} \frac{e^1}{r^2} \exp\left(-\frac{2r}{r_D}\right) \frac{2N_0}{T} 4\pi r^2 dr - \frac{4\pi N_0 e^4}{T} r_D = \frac{e^2}{2r_D},$$

здесь мы использовали определение радиуса Дебая — Гюккеля (2.7). Нетрудно видеть, что эта формула остается в силе для плазмы, у которой температура электронной и ионной компонент различается.

Средняя энергия  $\bar{\epsilon}$  заряженной частицы в плазме складывается из средней кинетической энергии, которая равна  $\frac{3}{2}T$ , и найденной энергии взаимодействия заряженной частицы

с плазмой. Эта величина равна

$$\bar{\varepsilon} - \frac{3}{2} T - \frac{e^2}{2r_D}.$$

Нетрудно видеть, что для идеальной плазмы второе слагаемое в этой формуле мало по сравнению с первым.

**Задача 2.14.** Вычислить поверхностное натяжение, возникающее на границе идеальной плазмы.

Поверхностное натяжение представляет собой энергию, приходящуюся на единицу поверхности плазмы и обусловленную влиянием поверхности. Давайте мысленно разделим исследуемую плазму на две части некоторой поверхностью и раздвинем эти части. При такой операции энергия каждой из частей плазмы изменится. Изменение энергии каждого куска, приходящееся на единицу поверхности, является поверхностным натяжением. Вычислим далее величину поверхностного натяжения плазмы, основываясь на таком его определении.

Наша задача определить изменение энергии плазмы в результате рассматриваемой операции. Согласно предыдущей задаче изменение энергии частицы, находящейся на расстоянии  $z$  от поверхности, которое равно изменению ее потенциала взаимодействия с частицами плазмы, составляет

$$\Delta U = \int_z^{\infty} \frac{e^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right) \frac{e\varphi}{T} N_0 dr = \int_z^{\infty} \frac{(e\varphi)^2}{T} N_0 dr,$$

здесь  $\varphi = \frac{e}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right)$  — потенциал, создаваемый в плазме рассматриваемой пробной частицей на расстоянии  $r$  от нее. При этом мы считаем, что радиус кривизны поверхности велик по сравнению с характерным размером в плазме — радиусом Дебая — Гюккеля. Поэтому элемент поверхности можно рассматривать как плоскость.

Изменение энергии, отвечающее элементу поверхности  $dS$ , при рассматриваемой операции составляет  $\alpha dS$ , где  $\alpha$  — поверхностное натяжение плазмы. С другой стороны, как следует из микроскопического рассмотрения, эта величина равна:

$$2 \int \Delta U(z) N_0 dS dz,$$

где  $dz$  — элемент координаты в направлении, перпендикулярном поверхности, так что  $N_0 dS dz$  — число заряженных частиц в рассматриваемом элементе пространства, множитель 2 учитывает, что имеется два сорта заряженных частиц. Отсюда, используя выражение для изменения энергии отдельной заряженной частицы,

для величины поверхностного натяжения плазмы имеем

$$\alpha = 2N_0 \int_0^{\infty} \Delta U(z) dz = \frac{2e^2 N_0^2}{T} \int_0^{\infty} dz \int_z^{\infty} \varphi^2(r') dr'.$$

Меняя пределы интегрирования в рассматриваемом интеграле, получим

$$\alpha = \frac{2e^2 N_0^2}{T} \int_{z>0} z' \varphi^2(r') dr'.$$

Используя явный вид для потенциала заряженной частицы в плазме и сферическую систему координат, получим для поверхностного натяжения плазмы

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2e^2 N_0^2}{T} \int_0^{\infty} r'^2 dr' \int_0^1 2\pi d \cos \theta' \cdot r' \cos \theta' \frac{e^2}{r'^2} \exp\left(-\frac{2r'}{r_D}\right) = \\ &= \frac{\pi e^4 N_0^3}{2T} r_D^3 - \frac{e^2}{16} N_0. \end{aligned}$$

Из полученного результата следует, что поверхностное натяжение плазмы не имеет практического значения. Действительно, при радиусе кривизны поверхности  $R$  поверхностное **натяжение** создает давление порядка  $\alpha/R$ . Отношение его к давлению плазмы составляет

$$\frac{\alpha}{RN_0 T} \sim \frac{e^2}{TR},$$

и даже если предположить\*), что радиус кривизны поверхности порядка среднего расстояния между заряженными частицами плазмы  $N_0^{-1/3}$ , то мы получим, что для идеальной плазмы приведенное отношение очень малó.

**Задача 2.15.** Определить функцию распределения по потенциалам, действующим на заряженную пробную частицу в плазме.

Наша задача—найти вероятность того, что потенциал взаимодействия рассматриваемой заряженной частицы с окружающими ее заряженными частицами равен заданной величине. Этот потенциал должен быть представлен как сумма потенциалов взаимодействия рассматриваемой частицы с каждой из окружающих частиц, причем потенциал взаимодействия двух заряженных частиц при расстоянии  $r$  между ними составляет

$$\frac{e^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right)$$

( $r_D$ — радиус Дебая— Гюккеля).

\*) Это предположение выходит за рамки применимости выражения для поверхностного натяжения  $R \gg r_D$ .

Оценим величину характерного потенциала, действующего на пробную частицу. Будем считать, что это взаимодействие создается частицами, содержащимися в области размера порядка радиуса Дебая—Гюккеля в окрестности пробной частицы. Число заряженных частиц в этой области порядка  $\bar{n} \sim Nr_D^3$  ( $N$ —плотность частиц плазмы), потенциал взаимодействия пробной частицы с каждой из них порядка  $e^2/r_D$ . Флуктуации числа частиц каждого знака заряда внутри этой области порядка  $\sqrt{\bar{n}}$  ( $\bar{n} \gg 1$ ). Отсюда следует, что характерный потенциал, действующий на пробную частицу, оказывается порядка

$$\Delta U \sim \sqrt{\bar{n}} \frac{e^2}{r_D} \sim e^2 N^{1/2} r_D^{1/2}.$$

Сравним эту величину с характерными энергиями, отвечающими заряженной частице в идеальной плазме с температурой  $T$ :

$$\frac{\Delta U}{T} \sim \left( \frac{Ne^6}{T^3} \right)^{1/4} \ll 1, \quad \frac{\Delta U}{e^2 N^{1/3}} \sim \left( \frac{T^3}{Ne^6} \right)^{1/12} \gg 1.$$

Как следует из этих неравенств, характерный потенциал, действующий на заряженную частицу в идеальной плазме, много меньше тепловой энергии частиц и много больше энергии парного взаимодействия при среднем расстоянии между частицами. Тем самым, с одной стороны, каждая заряженная частица может рассматриваться как свободная и, с другой стороны, средний потенциал для рассматриваемой частицы создается в результате взаимодействия с большим числом окружающих частиц.

Учитывая последнее обстоятельство, искомую функцию распределения  $f(U)$  по потенциалам, действующим на пробную частицу, мы можем представить в виде распределения Гаусса (1.88):

$$f(U) dU = (2\pi \Delta U^2)^{-1/2} \exp \left[ -\frac{(U - \bar{U})^2}{2 \Delta U^2} \right] dU,$$

где  $\Delta U^2 = \bar{U}^2 - \bar{U}^2$ ,  $\bar{U}$ —средний потенциал взаимодействия пробной частицы с окружающими ее заряженными частицами,  $\bar{U}^2$ —среднее значение от квадрата этой величины.

Величина  $\bar{U}$  была вычислена в задаче 2.13. Она определяется изменением плотности заряженных частиц под действием поля пробной частицы на расстоянии от нее порядка радиуса Дебая—Гюккеля. Это изменение мало и согласно закону Больцмана составляет порядка  $e^2/r_D T$  по сравнению с самой плотностью. Отсюда получаем оценку для  $\bar{U}$ :

$$\bar{U} \sim \frac{e^2}{r_D} \bar{n} \frac{e^2}{r_D T} \sim \frac{e^4}{T} N r_D \sim \frac{\Delta U^2}{T} \ll \Delta U.$$

Поскольку действующий на пробную частицу средний потенциал в плазме мал по сравнению с его характерным значением,



в дальнейшем мы будем считать эту величину равной нулю, а тем самым будем пренебрегать влиянием поля пробной частицы на распределение заряженных частиц, ибо последний эффект мал. Тогда положительное и отрицательное значения суммарного потенциала окажутся равновероятными.

Используя выражение для потенциала парного взаимодействия двух заряженных частиц в плазме, имеем для искомой величины:

$$\Delta U^2 - \overline{U^2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^4}{r^2} \exp\left(-\frac{2r}{r_D}\right) N_0 4\pi r^2 dr = 4\pi N_0 e^4 r_D,$$

где множитель 2 учитывает наличие частиц двух знаков заряда,  $N_0$  — плотность частиц одного знака. Полученное выражение совпадает с ранее выполненной оценкой. Подставляя эту величину в распределение Гаусса, получим для  $f(U) dU$  (вероятности того, что действующий на пробную заряженную частицу идеальной плазмы потенциал сосредоточен в интервале от  $U$  до  $U + dU$ ) следующее выражение:

$$f(U) dU = \frac{dU}{2\pi e^2 \sqrt{2N_0 r_D}} \exp\left(-\frac{U^2}{8\pi N_0 e^4 r_D}\right).$$

### § 3. Движение электронов в газе во внешнем поле

Движение электронов в слабоионизованном газе определяет его электрические параметры и поэтому представляет практический интерес. Поведение электронов в газе обусловлено влиянием внешних полей, а также столкновением электронов с частицами газа. Учет этих факторов позволяет в конкретных случаях, которые будут рассмотрены в представленных задачах, определить функцию распределения электронов по энергиям. При этом малым параметром задачи, наличие которого позволяет решить кинетическое уравнение Больцмана для электронов, является отношение массы электрона к массе частиц газа  $M$ . Кроме того, при решении кинетического уравнения может быть использован тот факт, что сечение упругого соударения электронов с частицами газа всегда много больше сечения неупругого рассеяния.

**Задача 2.16.** Определить функцию распределения по скоростям для электронов, движущихся в постоянном электрическом поле при наличии только упругих соударений электронов с атомами газа. Плотность электронов мала, так что столкновением их друг с другом можно пренебречь.

Кинетическое уравнение для функции распределения электронов по скоростям  $f(v)$  в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = I_{\text{ст}}(f). \quad (2.19)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость электрона,  $m$  — его масса,  $E$  — напряженность электрического поля,  $I_{\text{ст}}$  — интеграл столкновений.

Воспользуемся тем, что в силу различия масс электрона  $m$  и частицы газа  $M$  обмен энергией при их соударении мал и составляет  $\sim (m/M)^{1/2}$  от энергии этих частиц в системе центра инерции. Отсюда следует, что в результате столкновения электрона с частицей газа направление скорости электрона может измениться сильно, тогда как величина скорости меняется слабо. Поэтому функция распределения электронов по скоростям слабо зависит от направления, т. е. близка к сферически симметричной. Отличие функции распределения от сферически симметричной определяется действием электрического поля. Поскольку это отличие мало, функцию распределения электронов по скоростям можно представить в виде

$$f(v) = f_0(v) + v_x f_1(v), \quad (2.20)$$

где ось  $x$  направлена вдоль электрического поля.

Интеграл столкновений электрона с частицами газа является линейной функцией относительно функции распределения, так что  $I_{\text{ст}}(f) = I_{\text{ст}}(f_0) + I_{\text{ст}}(v_x f_1)$ . Интеграл столкновений для сферически симметричной части функции распределения был вычислен раньше и в случае упругого столкновения электрона с частицами газа определяется формулой (1.74):

$$I_{\text{ст}}(f_0) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{m}{M} T v^3 v_y \left( \frac{f_0}{T} + \frac{\partial f_0}{m v \partial v} \right) \right], \quad (2.21)$$

где  $v_y = N v \sigma^*$  — частота упругого столкновения электрона с частицами газа. Для другой части интеграла столкновений имеем

$$I_{\text{ст}}(v_x f_1) = \int N_a [f_a(\mathbf{v}'_a) f_1(v') v'_x - f_a(\mathbf{v}_a) f_1(v) v_x] |\mathbf{v} - \mathbf{v}_a| d\sigma d\mathbf{v}_a,$$

где  $\mathbf{v}_a$ ,  $\mathbf{v}'_a$  — скорости частицы газа до и после столкновения,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}'$  — скорости электрона до и после столкновения,  $f_a$  — нормированная на единицу функция распределения частиц газа ( $\int f_a d\mathbf{v}_a = 1$ ),  $N_a$  — их плотность,  $d\sigma$  — дифференциальное сечение рассеяния электрона на частицах газа. Используем то, что скорость частицы газа и энергия электрона мало меняются при столкновении  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a$ ,  $v = v'$ , а также  $v \gg v_a$ . Получим

$$\begin{aligned} I_{\text{ст}}(v_x f_1) &= -N_a \int f_a(\mathbf{v}_a) d\mathbf{v}_a f_1(v) (\mathbf{v} - \mathbf{v}')_x v d\sigma = \\ &= -N_a v f_1(v) v_x \sigma^* = -v_y v_x f_1(v). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Подставим разложение (2.20) в кинетическое уравнение (2.19) с учетом выражений (2.21) и (2.22) для интеграла столкновений. Проинтегрируем это уравнение по  $\cos \vartheta$  ( $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{E}$ ). Получим

$$\frac{eE}{m} \left( \frac{v}{3} \frac{\partial f_1}{\partial v} + f_1 \right) = \frac{eE}{3mv^2} \frac{\partial f_1 v^3}{\partial v} = I_{\text{ст}}(f_0). \quad (2.23a)$$

Умножив уравнение (2.19) на  $\cos \vartheta$  и проинтегрировав по  $d \cos \vartheta$ , получим другое уравнение, связывающее функции  $f_0$  и  $f_1$ :

$$\frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = -v_y v f_1. \quad (2.23б)$$

Мы получили систему дифференциальных уравнений для функций  $f_0$  и  $f_1$ . Решение этой системы при использовании для интеграла столкновений  $I_{ст}(f_0)$  выражения (1.74) имеет вид

$$f_0 = C \exp \left[ - \int_0^v \frac{mv \, dv}{\left( T + \frac{e^2 E^2 M}{3m^2 v_y^2} \right)} \right], \quad (2.24а)$$

$$f_1 = - \frac{eE}{mv v_y} \frac{df_0}{dv} = \frac{eE}{v_y} \frac{f_0}{\left( T + \frac{e^2 E^2 M}{3m^2 v_y^2} \right)}. \quad (2.24б)$$

Постоянный множитель  $C$  может быть найден из условия нормировки функции  $\int f(\mathbf{v}) \, d\mathbf{v} = \int f_0(\mathbf{v}) \, d\mathbf{v} = 1$ .

Оценим отношение  $v f_1 / f_0$ . Это отношение максимально при  $eE/mv \sim (T/M)^{1/2}$ , когда его величина  $v f_1 / f_0 \sim (m/M)^{1/2}$ ,  $v \sim \sqrt{T/m}$ . Отсюда следует, что  $v f_1 / f_0$  всегда много меньше единицы. Поэтому использованное приближение, согласно которому функция распределения мало отличается от сферически симметричной, справедливо.

Функция распределения электронов по скоростям в пределе больших напряженностей поля, получаемая из (2.24), носит название функции распределения Драйвестейна. (Первоначально Драйвестейн рассматривал случай  $\sigma = \text{const}$ ,  $E \rightarrow \infty$ .)

**Задача 2.17.** При условиях задачи 2.16 определить дрейфовую скорость и среднюю энергию электронов в пределе больших напряженностей электрического поля. Считать, что зависимость частоты столкновения электронов с атомами от скорости соударения имеет вид  $\nu = C v^n$ ,  $n > -1$ .

Согласно результату предыдущей задачи сферически симметричная часть функции распределения электронов при высоких напряженностях электрического поля равна

$$f_0 = \text{const} \cdot \exp \left[ - \frac{3mv^{2n+2}C^2}{2(n+1)Ma^2} \right],$$

где  $a = eE/m$ , частота столкновений  $\nu = C v^n$ . Отсюда находим для средней энергии электрона

$$\bar{\varepsilon} = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{m}{2} \left[ \frac{2Ma^2(n+1)}{3mC^2} \right]^{\frac{1}{n+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2n+2}\right)}.$$

Дрейфовая скорость электрона  $\omega = \langle v_x \rangle = \left\langle v_x^2 \frac{f_1}{f_0} \right\rangle$ . Так как, согласно результатам предыдущей задачи  $f_1(v) = \frac{m}{M} \cdot \frac{3mv}{eE} f_0$ , то отсюда находим для дрейфовой скорости электрона

$$\omega = \frac{m}{Ma} \langle v^2 v \rangle = \frac{mC}{Ma} \left[ \frac{2Ma^2(n+1)}{2mC^2} \right]^{\frac{2+n}{2n+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{5+n}{2n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2n+2}\right)}.$$

В частности, когда частота столкновений не зависит от скорости ( $n=0$ ,  $C=v$ ), получим

$$\bar{\varepsilon} = \frac{Ma^2}{2v^2} = \frac{Me^2E^2}{2m^2v^2}, \quad \omega = \frac{eE}{mv}, \quad (2.25a)$$

т. е.  $\bar{\varepsilon} = M\omega^2/2$ .

В другом предельном случае, когда сечение соударения электрона с атомом не зависит от скорости, имеем  $n=1$ ,  $C=1/\lambda$  ( $\lambda$  — длина свободного пробега электрона):

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{m}{2} \left( \frac{4Ma^2\lambda^2}{3m} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} = 0,427 \sqrt{\frac{M}{m}} eE\lambda, \\ \omega &= \frac{m}{Ma\lambda} \left( \frac{4Ma^2\lambda^2}{3m} \right)^{3/4} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4)} = 0,897 \frac{\sqrt{eE\lambda}}{M^{1/4}m^{1/4}}, \end{aligned} \quad (2.25b)$$

т. е.  $\bar{\varepsilon} = 0,530M\omega^2$ .

**Задача 2.18.** Определить функцию распределения по скоростям для электронов, движущихся в молекулярном газе в постоянном электрическом поле, если потери энергии электрона связаны с упругим рассеянием электрона на молекуле и с возбуждением первого колебательного уровня молекулы. При этом энергия возбуждения колебательного уровня молекулы значительно меньше средней энергии электронов и энергия электронов много больше температуры газа.

При учете неупругих соударений электрона с частицами газа воспользуемся малостью сечения неупругого перехода по сравнению с сечением упругого рассеяния электрона на молекуле, что всегда выполняется с хорошей точностью. Поэтому направление скорости при столкновении электрона с частицами газа меняется сильнее, чем его энергия, и разложение (2.20) для функции распределения электронов по скоростям остается в силе. При этом уравнение (2.23б) сохраняет свой вид, а в уравнении (2.23а) величина  $I_{ст}(f_0)$  определяется возбуждением колебательных уровней молекулы и упругим рассеянием электрона на молекуле. Этот интеграл столкновения при больших энергиях электрона, согласно формулам (1.74) и (1.75), имеет вид

$$I_{ст}(f_0) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{m}{M} v^3 v_y f_0 + \frac{\hbar\omega}{m} v v_{возб} f_0 \right).$$

Решение системы уравнений (2.23) с использованием приведенного выражения для интеграла столкновений в уравнении (2.23а) дает следующую формулу для сферически симметричной части функции распределения:

$$f_0(v) = C \exp \left[ - \int_0^v \frac{mv \, dv}{\frac{M}{3} \left( \frac{eE}{mv} \right)^2} \left( 1 + \frac{M}{m} \frac{v_{\text{возб}}}{v} \frac{\hbar\omega}{mv^2} \right) \right]. \quad (2.26)$$

Если пренебречь возбуждением колебательных уровней ( $v_{\text{возб}} \rightarrow 0$ ), то это выражение совпадает с формулой (2.24а) при условии, что энергия электрона значительно превышает тепловую энергию атомов газа.

**Задача 2.19.** Получить интегральные соотношения для среднего импульса и средней энергии в случае электронов, движущихся в постоянном электрическом поле в молекулярном газе. Константа упругого столкновения электронов с молекулами значительно превышает константу возбуждения колебательных уровней, а потеря энергии электронов обусловлена возбуждением колебательных уровней молекул, причем при рассматриваемых условиях тушение возбуждения молекул не связано с электронными столкновениями.

При заданных условиях изменение импульса электронов определяется упругими соударениями с молекулами, так что уравнение для изменения среднего импульса имеет тот же вид, что и в задаче (1.10) (см. формулу (1.22)):

$$eE = mN \langle v_x v \sigma^*(v) \rangle.$$

Здесь  $E$  — напряженность электрического поля,  $m$  — масса электрона,  $N$  — плотность молекул,  $v$  — скорость электрона, равная в данном случае относительной скорости соударения электрона и молекулы,  $\sigma^*$  — диффузионное сечение рассеяния электрона на молекуле. В частности, если частота столкновения электрона с молекулой не зависит от скорости электрона ( $v = N v \sigma^*(v) = \text{const}$ ), то средняя скорость электрона равна

$$w = \frac{eE}{mv}.$$

Уравнение для средней энергии определяется в рассматриваемом случае возбуждением колебательных уровней молекулы. В общем случае при учете только колебательных переходов в молекуле под действием соударений с электронами это уравнение имеет вид

$$eEw = \sum_{i,n} [\hbar\omega (n-i) k_{in} N_i - \hbar\omega (n-i) k_{ni} N_n].$$

Левая часть уравнения представляет собой энергию, получаемую электроном от поля, правая часть — энергию, затрачиваемую

на возбуждение колебательных уровней. Здесь  $N_i$  — плотность молекул на соответствующем колебательном уровне,  $\hbar\omega$  — разность энергий для соседних колебательных уровней,  $k_{in} = \langle v\sigma_{in} \rangle$  — константа перехода молекулы из колебательного состояния  $i$  в колебательное состояние  $n$  в результате соударения с электроном.

Если число молекул в возбужденных колебательных состояниях мало и эффективное возбуждение молекул осуществляется на первый колебательный уровень, то уравнение баланса для средней энергии электрона преобразуется к виду

$$eE\omega = \hbar\omega N k_{01}.$$

Уравнения баланса для среднего импульса и средней энергии электронов, вообще говоря, позволяют восстановить среднюю энергию электрона как функцию параметра  $eE/N$ .

**Задача 2.20.** Найти функцию распределения по энергиям для электронов, движущихся в газе в постоянном электрическом поле, учитывая возбуждение электронных состояний атомов. Считать, что средняя энергия электронов много меньше энергии возбуждения атомов.

При данных условиях задачи имеется мало быстрых электронов, способных возбудить или ионизовать атом, так что потеря энергии этими электронами после возбуждения атомов не изменит функции распределения медленных электронов. При этом предположении интеграл столкновений для сферически симметричной части функции распределения имеет вид  $I_{ст}(f_0) = -v_n f_0$ . Здесь частота неупругого столкновения электрона с атомами  $v_n = N_a v \sigma_n(v)$ , где  $N_a$  — плотность атомов,  $v$  — скорость электрона,  $\sigma_n$  — полное сечение возбуждения и ионизации атома электронным ударом. Мы считаем, что плотность электронов мала, так что возбужденный атом успевает вернуться в основное состояние или уйти на стенки до следующего столкновения с электроном. При этом уравнение для сферически симметричной части функции распределения принимает вид

$$\frac{e^2 E^2}{3m^2 v_n v^2} \frac{d}{dv} \left( \frac{v^2}{v_y} \frac{df_0}{dv} \right) - f_0 = 0.$$

Используем предположение о малости средней энергии электрона по сравнению с энергией возбуждения. Решим данное уравнение квазиклассическим методом, считая  $f_0 = e^S$ , причем  $v dS/dv \gg 1$  и  $S$  — плавная функция скорости ( $(S')^2 v \gg |S''|$ ). Получим:

$$f_0(v) = A \exp \left[ - \int_0^v \sqrt{3} \frac{vm}{eE} dv \right], \quad (2.27)$$

где  $v = \sqrt{v_y v_n}$ ,  $mv_0^2/2$  — энергия возбуждения атома, коэффициент  $A$  получаем при сшивании функций распределения (2.24) и (2.27) при энергиях, когда  $v_n \sim (m/M)v_y$ . Эти энергии находятся вблизи порога возбуждения, ибо характерные частоты возбуждения практически всегда удовлетворяют соотношению

$$\frac{m}{M} v_y \ll v_n \ll v_y.$$

При этом соотношении между частотами функции распределения (2.24) и (2.27) практически можно сшивать у самого порога.

Формула (2.27) справедлива, если выполняется условие применимости квазиклассического приближения  $vS' \gg 1$ , т. е.

$$\frac{eE}{v_0 m} \ll \sqrt{v_y v_n}.$$

**Задача 2.21.** Оценить, через какое время после включения постоянного электрического поля устанавливаются равновесная дрейфовая скорость электрона и равновесная средняя энергия.

Умножим кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = I_{\text{ст}}(f)$$

на  $\mathbf{v}$  и проинтегрируем по скоростям электрона. Получим

$$\left\langle \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{d\mathbf{w}}{dt},$$

$$\frac{eE}{m} \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial v} d\mathbf{v} = -\frac{eE}{m} \int f d\mathbf{v} = -\frac{eE}{m},$$

где  $\mathbf{w}$  — дрейфовая скорость электрона. Отсюда

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{eE}{m} + \int I_{\text{ст}}(f) \mathbf{v} d\mathbf{v}.$$

Поскольку частота упругого столкновения электрона с частицами газа превышает частоты других процессов соударения, получим

$$I_{\text{ст}}(f) = I_{\text{ст}}(f_0) - v_y v_x f_1(\mathbf{v}),$$

$$\int I_{\text{ст}} \mathbf{v} d\mathbf{v} = -\frac{n}{3} \int v_y v^2 f_1 d\mathbf{v}$$

( $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный по  $\mathbf{E}$ ). Отсюда

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{eE}{m} - \frac{1}{3} \int v_y v^2 f_1 d\mathbf{v}.$$

Поскольку дрейфовая скорость  $\mathbf{w} = \int v_x f d\mathbf{v} = \frac{1}{3} \int v^2 f_1 d\mathbf{v}$ , последнее слагаемое в полученном уравнении порядка  $v_y \mathbf{w}$ . Отсюда

следует, что равновесная дрейфовая скорость устанавливается за время  $\sim 1/\nu_y$  и оказывается порядка  $eE/m\nu_y$ .

Уравнение для средней энергии электрона  $\varepsilon$  получаем, умножив кинетическое уравнение на  $mv^2/2$  и проинтегрировав его по скорости электрона. Имеем

$$\int \frac{mv^2}{2} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{mv^2}{2} f d\mathbf{v} = \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt},$$

$$\int \frac{mv^2}{2} \frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} d\mathbf{v} = -\frac{eE}{m} \int m\mathbf{v}f d\mathbf{v} = -eE\boldsymbol{\omega}.$$

В результате получаем

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = eE\omega + \int \frac{mv^2}{2} I_{\text{ст}}(f_0) d\mathbf{v},$$

$$\int \frac{mv^2}{2} I_{\text{ст}}(f_0) d\mathbf{v} =$$

$$= \int \frac{mv^2}{2} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v^3 \nu_y \frac{m}{M} T \left( \frac{f_0}{T} + \frac{\partial f_0}{m v \partial v} \right) \right] 4\pi v^2 dv =$$

$$= -\frac{m^2}{M} T \int v^2 \nu_y \left( \frac{f_0}{T} + \frac{\partial f_0}{m v \partial v} \right) dv.$$

Как видно, последний член порядка  $(m/M)\nu_y \bar{\varepsilon}$ , т. е. равновесная энергия устанавливается за времена порядка  $M\nu_y/m$ . Таким образом, время установления равновесной энергии значительно больше времени установления равновесной дрейфовой скорости. Поэтому в процессе движения электрона в газе при каждом значении его энергии устанавливается дрейфовая скорость  $\omega(v)$ , отвечающая данной энергии. Дрейфовая скорость направленного движения в каждый момент времени однозначно определяется энергией электрона и равна  $1/3 v \nu_y f_1/f_0$ , т. е. значительно меньше скорости электрона.

Описанная ситуация возникает и в случае, если потеря энергии электроном определяется неупругими процессами столкновения электрона с частицами газа. При этом частота установления равновесной энергии порядка или меньше частоты неупругого соударения электрона и частиц газа  $\nu_{\text{н}}$ , что всегда значительно меньше частоты упругих соударений. Поэтому скорость направленного движения электрона в каждый момент времени однозначно определяется его энергией.

**Задача 2.22.** Определить дрейфовую скорость и среднюю энергию электронов при учете упругого соударения электронов с атомами газа, если время передачи энергии при столкновении двух электронов меньше, чем при столкновении электронов с атомами газа. Рассмотреть случаи  $\nu_y = \text{const}$ ,  $\nu_y = cv$ .

Имеем систему уравнений для  $f_0$ ,  $f_1$ :

$$\frac{eE}{3m} \frac{df_1 v^3}{v^2 dv} = I_{ea} + I_{ee}, \quad \frac{eE}{m} \frac{df_0}{dv} = -\nu_y v f_1,$$



где  $I_{ee}$  — интеграл межэлектронных столкновений,  $I_{ea}$  — интеграл столкновений электронов с атомами. В рассматриваемом случае  $v_{ee} \sim I_{ee} \gg I_{ea} \sim \frac{m}{M} v_{ea}$ . Умножим первое уравнение на  $mv^2/2$  и проинтегрируем по скоростям электронов, учитывая, что, согласно соотношению (1.15)

$$\int I_{ee} v^2 dv = 0.$$

Получим

$$eE\omega = \int \frac{mv^2}{2} I_{ea} dv,$$

где  $\omega$  — дрейфовая скорость электрона. Как видно отсюда, член в левой части первого уравнения порядка  $I_{ea}$ , т. е. значительно меньше  $I_{ee}$ . Поэтому в нулевом приближении из этого уравнения получаем  $I_{ee} = 0$ . Решением этого уравнения является максвелловская функция распределения

$$f_0 = \left( \frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{mv^2}{2T_e} \right).$$

Из этого уравнения следует  $f_1 = \frac{eE f_0}{v_y T_e}$ , так что

$$\omega = \frac{eE}{T_e} \left\langle \frac{v^2}{3v_y} \right\rangle.$$

В рассматриваемом случае, когда  $v_y = v_T \left( \frac{mv^2}{2T_e} \right)^{n/2}$ , имеем

$$\omega = \frac{2eE}{3mv_T} \int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} x^{4-n} dx = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{eE}{mv_T} \Gamma\left( \frac{5-n}{2} \right),$$

где  $x = \sqrt{mv^2/2T_e}$ . Далее,

$$\begin{aligned} -\left\langle \frac{mv^2}{2} I_{ea} \right\rangle &= -T_e \langle x^2 I_{ea} \rangle = +2T_e \int x dx \frac{m}{M} T v^3 v_y \left( \frac{f_0}{T} + \frac{\partial f_0}{mv \partial v} \right) = \\ &= 2T_e T \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_e} \right) \frac{m}{M} \langle x^2 v_y \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{m}{M} (T_e - T) v_T \Gamma\left( \frac{5+n}{2} \right). \end{aligned}$$

Так как  $eE\omega = -\left\langle \frac{mv^2}{2} I_{ea} \right\rangle$ , то

$$T_e - T = M \frac{e^2 E^2}{3m^2 v_T^2} \frac{\Gamma((5-n)/2)}{\Gamma((5+n)/2)},$$

при  $n=0$

$$T_e - T = M \frac{e^2 E^2}{3m^2 v_T^2},$$

при  $n=1$

$$T_e - T = M \frac{e^2 E^2}{6m^2 v_T^2}.$$

Получим эти зависимости для больших напряженностей поля из простых оценок. Изменение скорости электрона за время между двумя соударениями с атомом равно  $\Delta v \sim eE/mv$ . Функция распределения электронов по скоростям сферически симметрична, так что среднее изменение энергии электрона между двумя соударениями за счет внешнего поля  $m\Delta v^2$  оказывается порядка  $\sim m(eE/mv)^2$ . Эта энергия передается атомам газа, причем за каждое соударение атому отдается энергия порядка  $m\bar{\epsilon}/M$ , где  $\bar{\epsilon}$  — средняя энергия электрона.

Отсюда находим, что средняя энергия электрона

$$\bar{\epsilon} \sim M \left( \frac{eE}{mv} \right)^2,$$

причем это выполняется при больших напряженностях электрического поля, когда средняя энергия электронов значительно превышает тепловую энергию частиц газа.

**Задача 2.23.** Оценить среднюю энергию электронов, движущихся в одноатомном газе в переменном электрическом поле и перпендикулярном к нему постоянном магнитном поле. Считать, что средняя энергия электронов значительно превышает тепловую энергию атомов газа и пренебречь неупругими процессами соударения электронов с атомами газа.

Оценим сначала среднюю энергию электрона, движущегося в газе в постоянном электрическом поле. Для этого энергию, которую электрон в единицу времени забирает от электрического поля, следует приравнять к энергии, которую электрон в единицу времени теряет в результате парных соударений с атомами газа. Определим среднюю энергию, которую электрон теряет, а атом приобретает при их упругом соударении

$$\Delta\epsilon = \frac{(P + \Delta P)^2}{2M} - \frac{P^2}{2M} = \frac{P\Delta P}{M} + \frac{\Delta P^2}{2M} = -\frac{P\Delta P}{M} + \frac{\Delta p^2}{2M}.$$

Здесь  $M$  — масса частицы газа,  $P$  — импульс атома до столкновения,  $\Delta P$  — изменение импульса атома в результате столкновения,  $\Delta p$  — изменение импульса электрона, причем согласно закону сохранения импульса  $\Delta P = -\Delta p$ .

Из-за различия масс электрона и атома атом можно считать бесконечно тяжелым и покоящимся. Поэтому импульс электрона  $p$  и его изменение  $\Delta p$  при соударении с атомом не связаны с импульсом  $P$  самого атома. Отсюда, усредняя выражение для  $\Delta\epsilon$  по направлениям импульсов электрона, получим  $\Delta\epsilon = \Delta p^2/2M$ . Поскольку  $\Delta p \sim p$  и  $p \sim \sqrt{m\bar{\epsilon}}$  ( $\bar{\epsilon}$  — средняя энергия электрона), то за одно соударение электрон отдает атомам газа энергию  $\Delta\epsilon \sim (m/M)\bar{\epsilon}$ , а в единицу времени — энергию  $\Delta\epsilon v \sim (m/M)v\bar{\epsilon}$ , здесь  $v = N \langle v \sigma_{ea} \rangle$  — частота упругих соударений электронов с атомами

газа ( $N$  — плотность атомов,  $\sigma_{ea}$  — сечение упругого соударения электрона с атомом, усреднение  $\langle \rangle$  проводится по скоростям электронов  $v$ ).

Электрон приобретает от электрического поля в единицу времени энергию  $eE\omega$ , где  $\omega$  — скорость направленного движения электрона, определяемая формулой  $\omega = eE/mv$ . Приравнивая энергию, теряемую и приобретаемую электроном в единицу времени, получим следующую оценку для средней энергии электрона, которая совпадает с результатом предыдущей задачи:

$$\bar{\varepsilon} \sim M \left( \frac{eE}{mv} \right)^2.$$

Эта оценка справедлива, если средняя энергия электрона велика по сравнению с тепловой энергией частиц газа, т. е. электрон только теряет энергию при соударении с частицами газа, и мала по сравнению с характерными электронными энергиями, при которых становятся существенными неупругие процессы.

Подобным образом определим среднюю энергию электрона, движущегося в газе в скрещенных постоянных электрическом и магнитном полях. Согласно результату задачи 2.25 в этом случае электрон забирает от поля энергию  $eE\omega = \frac{(eE)^2\tau}{m(1+\omega_0^2\tau^2)}$ , так что средняя энергия электрона по порядку величины равна

$$\bar{\varepsilon} \sim M \left( \frac{eE}{m} \right)^2 (v^2 + \omega_0^2)^{-1}.$$

Рассмотрим, наконец, движение электрона в газе в переменном электрическом поле. Если электрическое поле задать в виде  $E \cos \omega t$ , то согласно результату задачи 2.31, взяв действительную часть от выражения для дрейфовой скорости электрона в направлении поля, получим

$$\omega_x = \frac{eE}{m} (\omega^2 + v^2)^{-1} (v \cos \omega t + \omega \sin \omega t).$$

Для приобретаемой электроном в единицу времени энергии, которая усреднена по времени, это дает

$$\overline{eE\omega_x} = \frac{(eE)^2 v}{2m(\omega^2 + v^2)}.$$

Отсюда находим оценку для средней энергии электрона, движущегося в газе в переменном электрическом поле:

$$\bar{\varepsilon} \sim M \left( \frac{eE}{m} \right)^2 (v^2 + \omega^2)^{-1}.$$

**Задача 2.24.** Определить функцию распределения электронов, движущихся в газе в скрещенных электрическом и магнитном полях. Считать, что потеря энергии электрона обусловлена упругими соударениями электронов с атомами.

Кинетическое уравнение для функции распределения электронов по скоростям имеет вид

$$\left( e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{m \partial v} = I_{\text{ст}}(f),$$

где  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  — напряженность электрического и магнитного полей соответственно,  $I_{\text{ст}}$  — интеграл столкновений. Пусть вектор  $\mathbf{E}$  направлен по оси  $x$ , вектор  $\mathbf{H}$  — по оси  $z$ . Представим кинетическое уравнение в виде

$$(a + \omega_0 v_y) \frac{\partial f}{\partial v_x} - v_x \omega_0 \frac{\partial f}{\partial v_y} = I_{\text{ст}}(f),$$

где  $a = eE/m$ ,  $\omega_0 = eH/mc$  — ларморовская частота. Функция распределения электронов близка к сферически симметричной, причем под действием электрического поля возникает направленное движение электронов вдоль оси  $x$ , а под влиянием магнитного поля может возникнуть направленное движение вдоль осей  $x$  и  $y$ . С учетом этого представим функцию распределения в виде

$$f = f_0(v) + v_x f_1(v) + v_y f_2(v).$$

Интеграл столкновения электронов с атомами

$$I_{\text{ст}}(f) = I_{\text{ст}}(f_0) - \nu v_x f_1 - \nu v_y f_2,$$

где  $\nu = N_a \nu \sigma^*$  — частота упругих столкновений и

$$I_{\text{ст}}(f_0) = \frac{m}{M} T \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v^3 \nu \left( \frac{f_0}{T} + \frac{\partial f_0}{m v \partial v} \right) \right].$$

С учетом этого получаем кинетическое уравнение в виде

$$\begin{aligned} a \frac{v_x}{v} \frac{df_0}{dv} + a \left( f_1 + \frac{v_x^2}{v} \frac{df_1}{dv} \right) + a \frac{v_x v_y}{v} \frac{df_2}{dv} + \omega_0 v_y f_1 - \omega_0 v_x f_2 = \\ = I_{\text{ст}}(f_0) - \nu v_x f_1 - \nu v_y f_2. \end{aligned}$$

Усреднив это уравнение по углам вектора  $\mathbf{v}$ , а также, умножив его на  $v_x/v$ ,  $v_y/v$  и усреднив по углам, получим следующую систему уравнений для функций  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{a}{3} \frac{df_1 v^3}{v^2 dv} &= \frac{m}{M} T \frac{1}{v^2} \frac{d}{dv} \left[ v^3 \nu \left( \frac{f_0}{T} + \frac{df_0}{m v dv} \right) \right], \\ a \frac{df_0}{dv} - \omega_0 v f_2 &= -\nu v f_1, \\ \omega_0 f_1 &= -\nu f_2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$\begin{aligned} f_0 &= C \exp \left\{ - \int_0^v m v dv \left[ T + \frac{e^2 E^2 M}{3m^2 (\nu^2 + \omega_0^2)} \right]^{-1} \right\}, \\ f_1 &= - \frac{e E v}{(\nu^2 + \omega_0^2)} \frac{d f_0}{m v dv} = \frac{e E v}{(\nu^2 + \omega_0^2)} \left[ T + \frac{e^2 E^2 M}{3m^2 (\nu^2 + \omega_0^2)} \right]^{-1} f_0, \\ f_2 &= - \frac{\omega_0}{v} f_1 = - \frac{e E \omega_0}{(\nu^2 + \omega_0^2)} \left[ T + \frac{e^2 E^2 M}{3m^2 (\nu^2 + \omega_0^2)} \right]^{-1} f_0, \end{aligned}$$

где  $C$  — константа нормировки.

**Задача 2.25.** Определить дрейфовую скорость электронов, движущихся в газе в скрещенных электрическом и магнитном полях, а также проводимость слабоионизованной плазмы, помещенной в скрещенные электрическое и магнитное поля.

Функция распределения электронов для данной ситуации найдена в предыдущей задаче. При этом полагалось, что электрон изменяет свою энергию в результате упругих соударений с атомами газа. В данной задаче мы снимем это предположение, но будем считать, что сферически симметричная часть функции распределения нам известна. Поскольку сечение упругого соударения электрона с атомом значительно превышает сечение неупругих переходов, то два последних уравнения системы уравнений (2.28) остаются в силе. Они позволяют выразить дрейфовую скорость через сферически симметричную часть функции распределения. При этом компоненты тензора проводимости следующим образом выражаются через дрейфовую скорость (как и в предыдущей задаче, ось  $x$  направляем по электрическому полю  $\mathbf{E}$ , ось  $y$  — по магнитному полю  $\mathbf{H}$ ):

$$\Sigma_{xx} = \frac{N_e e \omega_x}{E}, \quad \Sigma_{yx} = \frac{N_e e \omega_y}{E}.$$

Здесь  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  — компоненты дрейфовой скорости электронов,  $N_e$  — плотность электронов.

Из второго и третьего уравнений системы уравнений (2.28) имеем

$$v f_1 = - \frac{a v}{(\nu^2 + \omega_0^2)} \frac{d f_0}{d v}, \quad v f_2 = \frac{a \omega_0}{(\nu^2 + \omega_0^2)} \frac{d f_0}{d v} \quad \left( a = \frac{e E}{m} \right).$$

Это дает для дрейфовой скорости электрона

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{e E}{3m} \left\langle \frac{1}{v^2} \frac{d}{d v} \left( \frac{v^3}{\nu^2 + \omega_0^2} \right) \right\rangle, \\ \omega_y &= - \frac{e E \omega_0}{3m} \left\langle \frac{1}{v^2} \frac{d}{d v} \left( \frac{v^3}{\omega_0^2 + \nu^2} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.28a)$$

где усреднение  $\langle \rangle$  проводится с помощью сферически симметричной части функции распределения:  $\langle X \rangle \equiv \int X f_0 d \mathbf{v}$ .

При больших напряженностях магнитного поля ( $v/\omega_0 \ll 1$ ) электрон дрейфует в направлении, перпендикулярном электрическому и магнитному полям ( $\omega_y \gg \omega_x$ ). При этом дрейфовая скорость электрона, согласно полученным формулам, равна

$$\omega_y = -\frac{eE}{m\omega_0}$$

и не зависит от частоты столкновений электрона с атомами. Это значение можно получить непосредственно из уравнения движения электрона, если пренебречь его соударениями с атомами.

$$m \frac{d\omega}{dt} = eE + \frac{e}{c} [\omega H].$$

Решая это уравнение для стационарного случая ( $d\omega/dt = 0$ ), находим

$$\omega_y = -\frac{cE}{H} = -\frac{eE}{m\omega_0}.$$

**Задача 2.26.** Поток слабоионизованного одноатомного газа движется параллельно двум короткозамкнутым электродам со скоростью  $u$ . Перпендикулярно потоку газа и параллельно электродам включено магнитное поле напряженностью  $H$ . Под действием магнитного поля между электродами течет ток электронов (короткозамкнутый МГД-канал со сплошными электродами) и повышается температура электронов. Определить максимально возможную разность температуры электронов и температуры газа.

Под действием магнитного поля в неподвижной системе координат возникает электрическое поле напряженностью  $E' = \frac{u}{c} H$ . Это поле вызывает ток между электродами, а также ток в направлении потока газа, который замыкается на электродах. Напишем уравнение баланса для энергии электронов. Электрон забирает в единицу времени от поля энергию  $eE'\omega$ , где  $\omega$  — дрейфовая скорость электрона в направлении наведенного электрического поля. Эту энергию электрон возвращает газу в результате упругих соударений. Ее значение было вычислено в задаче 2.22 и равно

$$\frac{m}{M} (T_e - T) \left\langle \frac{m v^2}{T_e} v_y \right\rangle,$$

где  $m$ ,  $M$  — масса электрона и атома соответственно,  $v_y$  — частота упругого столкновения электрона с атомами; усреднение проводится по максвелловской функции распределения электронов. Используя найденное в предыдущей задаче общее выражение для дрейфовой скорости электронов, которая в рассматриваемом случае равна

$$\omega = \frac{a}{3} \left\langle \frac{m v^2}{T_e} \frac{v_y}{\omega_0^2 + v_y^2} \right\rangle,$$

получим из уравнения баланса энергии электрона:

$$(T_e - T) \frac{m}{M} \left\langle \frac{mv^2}{T_e} v_y \right\rangle = \frac{ma^2}{3} \left\langle \frac{mv^2}{T_e} \frac{v_y}{(\omega_0^2 + v_y^2)} \right\rangle,$$

или, учитывая, что  $a = \frac{eE'}{m} = \frac{cH}{mc} u = \omega_0 u$ ,

$$T_e - T = \frac{Mu^2}{3} \frac{\left\langle v^2 \omega_0^2 \frac{v_y}{(\omega_0^2 + v_y^2)} \right\rangle}{\langle v^2 v_y \rangle}. \quad (2.29)$$

Величина  $T_e - T$  достигает наибольшего значения при  $v_y/\omega_0 \rightarrow 0$ . При малых значениях  $v_y/\omega_0$  эта величина равна

$$T_e - T = Mu^2/3.$$

**Задача 2.27.** Определить коэффициент теплопроводности, обусловленный движением электронов в слабоионизованной плазме. Считать, что функция распределения электронов по скоростям максвелловская, причем температура электронов  $T_e$  много больше температуры газа  $T$  и частота упругих столкновений электронов с атомами связана со скоростью электронов  $v$  законом  $v_y \sim v^n$ .

Функцию распределения электронов по скоростям представим в виде

$$f = f_0(v) + v \nabla \ln T_e f_1(v),$$

где  $f_0 = (m/2\pi T_e)^{3/2} \exp(-mv^2/2T_e) N_e$ ,  $T_e$  — температура электронов. Кинетическое уравнение Больцмана в рассматриваемом случае имеет вид

$$f_0 \left( \frac{mv^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) v \nabla \ln T_e - I_{\text{ст}}(f).$$

Мы считаем, что температура электронов мало меняется на расстояниях порядка длины свободного пробега электронов. Поэтому наличие градиента температуры не изменит функции распределения по скоростям. Учитывая, что  $I_{\text{ст}}(f_0) = 0$  и  $I_{\text{ст}}[v_x f_1(v)] = -v_y v_x f_1(v)$ , получим

$$f_1(v) = -\frac{1}{v_y} \left( \frac{mv^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) f_0(v),$$

$v_y = N_a v \sigma^*$ ,  $\sigma^*$  — диффузионное сечение упругого рассеяния электрона на атоме.

Для потока тепла имеем

$$\begin{aligned} q_i &= \int \frac{mv^2}{2} v_i f d\mathbf{v} = - \int \frac{mv^2}{2} v_i v_k \frac{\partial \ln T_e}{\partial x_k} \frac{1}{v_y} \left( \frac{mv^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) f_0 d\mathbf{v} = \\ &= - \frac{1}{3} \frac{\partial T_e}{\partial x_i} \int \frac{mv^2}{2T_e} v^2 \left( \frac{mv^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) \frac{f_0}{v_y} d\mathbf{v} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Согласно результату задачи 2.22 при данной зависимости частоты столкновений от скорости и выполнении условия  $T_e \gg T$  связь между градиентами температуры электронов и газа имеет вид  $\nabla T = (1+n)\nabla T_e$ . Отсюда находим коэффициент теплопроводности, обусловленный электронами:

$$\kappa = \frac{N_e}{3(1+n)} \left\langle \frac{mv^2}{2T_e} \frac{v^2}{v_y} \left( \frac{mv^2}{2T_e} - \frac{5}{2} \right) \right\rangle = \\ = \frac{4T_e N_e}{3\sqrt{\pi} m (1+n)} \int_0^{\infty} z^{5/2} \left( z - \frac{5}{2} \right) e^{-z} v_y^{-1}(z) dz,$$

где  $z = mv^2/2T_e$ ,  $v_y$  — частота упругого столкновения электронов с атомами.

Так как частота столкновения электронов с атомами зависит от скорости соударения по закону  $v_y \sim v^n$ , то  $v_y(v) = v_T z^{n/2}$ , где  $v_T \equiv v_y(\sqrt{2T/m})$ . Отсюда

$$\kappa = \frac{4T_e N_e}{3\sqrt{\pi} m (1+n) v_T} \int_0^{\infty} z^{\frac{5-n}{2}} \left( z - \frac{5}{2} \right) e^{-z} dz = \\ = \frac{4T_e N_e}{3\sqrt{\pi} m v_T} \frac{(1-n/2)}{(1+n)} \Gamma\left(\frac{7-n}{2}\right).$$

В частности, если  $v_y = \text{const}$ , то

$$\kappa = \frac{5T_e N_e}{2m v_y}.$$

Если  $\sigma^* = \text{const}$  ( $n = 1$ ), то

$$\kappa = \frac{2T_e N_e}{3\sqrt{\pi} m v_T}.$$

**Задача 2.28.** Получить выражение для коэффициента термодиффузии электронов в атомном газе.

Коэффициент термодиффузии определяется формулой (1.43) и характеризует поток частиц данного сорта в двухкомпонентной или многокомпонентной газовой системе при наличии градиента температуры. В рассматриваемом случае под действием градиента температуры возникает поток электронов, который компенсируется потоком атомов газа. Поскольку степень ионизации газа весьма мала, то газ в данных условиях можно считать неподвижным.

Для определения потока электронов представим функцию распределения электронов в виде разложения (2.20) по сферическим гармоникам

$$f = f_0 + v_x f_1,$$

где ось  $x$  выбрана в направлении градиента температуры. Поток электронов равен

$$j = \int v_x f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int v_x^2 f_1(v) dv.$$



Искомую часть функции распределения находим из кинетического уравнения для электронов  $v_x \frac{\partial f}{\partial x} = I_{\text{ст}}(f)$ , используя формулу (2.22) для интеграла столкновений для несимметричной части функции распределения. Это дает

$$f_1(v) = -\frac{1}{v_y} \frac{\partial f_0}{\partial x},$$

так что поток электронов

$$j = -\int \frac{v^2}{3v_y} \frac{\partial f_0}{\partial x} d\mathbf{v}.$$

Далее мы учтем, что градиент температуры в газе относительно мал, так что сферически симметричная функция распределения электронов такая же, как и в отсутствие градиентов. При этом частота упругого столкновения электронов с атомами газа  $v_y = N_a v \sigma^*(v)$ , где  $N_a$  — плотность атомов,  $\sigma^*$  — диффузионное сечение рассеяния электрона на атоме. Отсюда находим

$$j = -\frac{1}{3N_a} \int \frac{v}{\sigma^*(v)} \frac{\partial f_0}{\partial x} d\mathbf{v} = -\frac{1}{3N_a} \frac{d}{dx} \int \frac{v f_0}{\sigma^*(v)} d\mathbf{v}.$$

На основе формулы (1.43) получаем для коэффициента термодиффузии:

$$\mathcal{D}_T = \frac{T}{3N_a} \frac{d}{dT} \int \frac{v f_0 d\mathbf{v}}{\sigma^*(v)} = \frac{T}{3N_a} \frac{d}{dT} \left( N_e \left\langle \frac{v^2}{\sigma^*(v)} \right\rangle \right),$$

где угловые скобки означают усреднение по распределению электронов.

Проанализируем полученную формулу. Будем считать, что функция распределения электронов по скоростям — максвелловская, хотя температура электронов может отличаться от температуры атомов. При этом мы рассматриваем поток, возникающий под действием градиента электронной температуры. Пусть зависимость сечения рассеяния электрона на атоме от скорости столкновения дается зависимостью  $v \sigma^*(v) \sim v^n$ . Тогда

$$\left\langle \frac{v}{\sigma^*} \right\rangle \sim T_e^{1-n}.$$

Поскольку давление электронного газа  $N_e T_e$  постоянно в пространстве, то

$$\frac{d}{dT_e} \left( N_e \left\langle \frac{v}{\sigma^*(v)} \right\rangle \right) = -\frac{n N_e}{T_e} \left\langle \frac{v}{\sigma^*(v)} \right\rangle,$$

так что

$$\mathcal{D}_T = -n N_e \left\langle \frac{v^2}{3v_y} \right\rangle = -n N_e \mathcal{D},$$

где  $\mathcal{D}$  — коэффициент пространственной диффузии электронов. Как видно, если частота упругого столкновения электрона с ато-

мами  $v_y$  не зависит от скорости электрона ( $n = 0$ ), то коэффициент термодиффузии равен нулю. Кроме того, при  $n > 0$  коэффициенты диффузии и термодиффузии имеют разные знаки. Это означает, что если градиенты концентрации и температуры одинаково направлены, т. е. концентрация и температура электронов возрастают в одинаковом направлении, то эти градиенты вызывают противоположные потоки частиц. В частности, если в газе имеется градиент концентрации и температуры электронов, но полный поток равен нулю, поскольку диффузионный и термодиффузионный потоки компенсируют друг друга, то эти градиенты направлены в одну сторону. В частности, для  $v_y(v) \sim v^n$  в рассмотренном случае

$$\nabla c = n \nabla \ln T_e,$$

где  $c = N_e/N$  — концентрация электронов (т. е. степень ионизации плазмы).

**Задача 2.29.** Определить теплопроводность слабоионизованной плазмы, окруженной диэлектрическими стенками.

В предыдущей задаче при нахождении коэффициента теплопроводности слабоионизованной плазмы полагалось, что напряженность электрического поля, которое может возникнуть в плазме из-за наличия градиента температуры, равна нулю. Этот случай соответствует физической ситуации, когда плазма помещена в металлическую оболочку, так что всякий проходящий через нее ток свободно замыкается по стенкам. В рассматриваемом здесь случае изолированных стенок ток через плазму отсутствует. Это означает, что в плазме появляется электрическое поле, которое приводит к компенсации тока, обусловленного градиентом температуры.

Напишем общие соотношения для потока тепла  $q = N_e \langle \frac{1}{2} m v^2 v \rangle$  и электрического тока  $\mathbf{j} = e N_e \langle v \rangle$  в слабоионизованной плазме при наличии в ней градиента температуры электронов  $\nabla T_e$  и электрического поля напряженностью  $\mathbf{E}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -\alpha_{11} \nabla T_e + \alpha_{12} e \mathbf{E}, \\ \mathbf{j} &= -\alpha_{21} \nabla T_e + \alpha_{22} e \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Пользуясь полученными в предыдущих задачах выражениями для функции распределения электронов в слабоионизованной плазме при наличии электрического поля или градиента температуры, находим значения коэффициентов  $\alpha_{ik}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -\frac{4N_e}{3\sqrt{\pi}} \frac{T_e}{m} \int_0^{\infty} \frac{1}{v_y} z^{5/2} \left( z - \frac{5}{2} \right) e^{-z} dz, \\ \alpha_{12} &= -\frac{4N_e}{3\sqrt{\pi}} \frac{T_e}{m} \int_0^{\infty} \frac{1}{v_y} z^{5/2} e^{-z} dz, \end{aligned}$$

$$\alpha_{21} = \frac{4eN_e}{3\sqrt{\pi}m} \int_0^{\infty} \frac{1}{v_y} z^{3/2} \left(z - \frac{5}{2}\right) e^{-z} dz,$$

$$\alpha_{22} = -\frac{4\pi N_e}{3\sqrt{\pi}m} \int_0^{\infty} \frac{1}{v_y} z^{3/2} e^{-z} dz.$$

Здесь  $v_y = N_a v \sigma_{ea}^*$  — частота упругого столкновения электрона с атомом,  $N_a$  — плотность атомов,  $\sigma_{ea}^*$  — диффузионное сечение рассеяния электрона на атоме;  $z = mv^2/2T_e$ . Перекрестные коэффициенты характеризуют собой термоэлектрические явления.

С помощью найденных коэффициентов, связывающих поток тепла и электрический ток с напряженностью электрического поля и градиентом температуры, определим коэффициент теплопроводности. В рассматриваемом случае изолированной плазмы ток через плазму равен нулю, так что наличие градиента температуры вызывает появление электрического поля напряженностью  $eE = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} \nabla T_e$ . При этом тепловой поток равен

$$q = -\alpha_{11} \nabla T_e \left(1 - \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\right).$$

Как видно, в случае изолированной плазмы коэффициент теплопроводности изменяется по сравнению со случаем металлических стенок в  $1 - \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22}}$  раз. Пользуясь вышеприведенными выражениями для коэффициентов пропорциональности  $\alpha_{ik}$ , определим значение этого множителя в практически интересных случаях, когда частота столкновения электронов с атомом не зависит от скорости электрона ( $v_y = \text{const}$ ) и сечение упругого столкновения электрона с атомом в рассматриваемой области скоростей также не зависит от скорости электрона ( $v_y \sim z^{1/2}$ ).

В первом случае коэффициент  $\alpha_{21} = 0$ , т. е. градиент температуры не вызывает появления электрического тока и коэффициент теплопроводности плазмы для изолированной плазмы и при наличии металлических стенок одинаков. Во втором случае  $\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22}} = -1$ , т. е. коэффициент теплопроводности изолированной слабоионизованной плазмы вдвое больше коэффициента теплопроводности плазмы, помещенной в металлический сосуд. Наконец, если степень ионизации плазмы достаточно велика и частота столкновения  $\nu$  обусловлена кулоновскими частицами плазмы, то  $v_y \sim z^{-3/2}$  и  $\frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22}} = \frac{3}{5}$ , коэффициент теплопроводности изолированной плазмы в два с половиной раза меньше, чем плазмы, находящейся в металлическом сосуде.

**Задача 2.30.** Определить функцию распределения электронов по энергиям в области энергий, достаточных для возбуждения атомов, если возбужденные атомы разрушаются только в результате столкновения с электронами. Электроны движутся в газе в постоянном электрическом поле, причем средняя энергия электронов много меньше энергии возбуждения атомов.

Как следует из системы уравнений (2.24), в этом случае получается уравнение для сферически симметричной части функции распределения в виде

$$\frac{1}{3} \left( \frac{eE}{m} \right)^2 \frac{d}{dv} \left( \frac{v^2}{v_y} \frac{df_0}{dv} \right) = I_{\text{сг}}(f_0).$$

При этом в интеграл столкновений  $I_{\text{сг}}$  мы должны включить переходы, приводящие к возбуждению и снятию возбуждения атомов при соударении с электроном. Поскольку частота неупругих столкновений много больше частоты столкновений между электронами или величины  $\frac{m}{M} v_y$  ( $m$  — масса электрона,  $M$  — масса атома), то при сделанных предположениях в данном уравнении в нулевом приближении мы должны потребовать, чтобы число быстрых электронов, теряющих свою скорость в результате возбуждения атомов, было равно числу медленных электронов, приобретающих энергию в результате тушения возбужденных атомов. Это даёт для электронов, скорость которых расположена в интервале от  $v$  до  $v+dv$ ,

$$v_{\text{возб}}(v) f(v) v^2 dv = v_{\text{туш}}(v') f(v') v'^2 dv',$$

где  $v_{\text{возб}}$ ,  $v_{\text{туш}}$  — частота возбуждения и тушения возбуждения атомов электронным ударом,  $v'$  — скорость медленных электронов, которые после тушения атомов попадают в рассматриваемый интервал скоростей,  $v'^2 - v^2 = 2\Delta E/m$  ( $\Delta E$  — энергия возбуждения атомов).

Частота возбуждения атомов равна  $v_{\text{возб}}(v) = N_0 v \sigma_{\text{возб}}(v)$ , где  $N_0$  — плотность атомов в основном состоянии, частота снятия возбуждения  $v_{\text{туш}}(v) = N_B v \sigma_{\text{туш}}(v)$ ,  $N_B$  — плотность возбужденных атомов.

Свяжем сечения возбуждения ( $\sigma_{\text{возб}}$ ) и тушения возбуждения ( $\sigma_{\text{туш}}$ ) атомов электронным ударом, используя принцип детального равновесия, который приводит к соотношению (П.2.9) между сечениями прямого и обратного переходов. На основе этого получим связь между функциями распределения для медленных и быстрых электронов:

$$\frac{N_0}{g_0} f_0(v) = \frac{N_B}{g_B} f_0 \left( \sqrt{v^2 - \frac{2\Delta E}{m}} \right), \quad v > \sqrt{\frac{2\Delta E}{m}},$$

где  $g_0$ ,  $g_v$  — статистический вес соответствующих состояний. Отсюда следует

$$f_0(v) = f_0 \left( \sqrt{\frac{2\Delta E}{m}} \right) \frac{f_0 \left( \sqrt{v^2 - \frac{2\Delta E}{m}} \right)}{f_0(0)}.$$

В частности, при максвелловском распределении медленных электронов это дает

$$f_0(v) = f_0 \left( \sqrt{\frac{2\Delta E}{m}} \right) \exp \left( -\frac{mv^2}{2T_e} + \frac{\Delta E}{T_e} \right),$$

т. е. присутствие возбужденных атомов восстанавливает максвелловскую функцию распределения электронов.

Полученное выражение для функции распределения быстрых электронов справедливо, если средняя энергия электронов меньше энергии возбуждения атомов, что имеет место при не очень больших напряженностях поля. В этом случае быстрых электронов не много, так что функция распределения медленных электронов не зависит от возбуждений атома. Что касается малости частоты электрон-электронных столкновений и величины  $mv_y/M$  по сравнению с частотой неупругих столкновений быстрых ( $v > \sqrt{2\Delta E/m}$ ) электронов с атомами, то эти условия хорошо выполняются в слабоионизованной плазме. Как следует из полученного результата, наклон функции распределения электронов по энергиям за порогом возбуждения может заметно уменьшиться.

**Задача 2.31.** Определить функцию распределения по скоростям для электронов, движущихся в газе в переменном электрическом поле. Плотность электронов мала, так что столкновением между ними можно пренебречь.

Используем, как и раньше, тот факт, что частота упругого столкновения  $\nu_y$  электрона с частицами газа больше частот неупругих столкновений  $\nu_n$ . Это, как и в случае постоянного поля, приводит к тому, что функция распределения электронов по скоростям близка к сферически симметричной, так что ее можно представить в виде

$$f(v, t) = f_0(v, t) + v_x f_1(v, t),$$

где ось  $x$  направлена вдоль поля.

Исследуем случай, когда напряженность электрического поля меняется по гармоническому закону. Тогда кинетическое уравнение для функции распределения электронов по скоростям примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{eE}{m} \cos \omega t \frac{\partial f}{\partial v_x} = I_{cr}(f),$$

где  $\omega$  — частота изменения электрического поля. Система уравнения для  $f_0$  и  $f_1$  с учетом большой величины  $\nu_y$  по сравнению

с  $v_n$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{eE}{3m} \cos \omega t \frac{\partial^3 f_1}{v^2 \partial v} &= I_{\text{ст}}(f_0), \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{eE}{mv} \cos \omega t \frac{\partial f_0}{\partial v} &= -v_y f_1. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Решение этой системы уравнений при произвольном соотношении между входящими в нее параметрами затруднительно. Мы рассмотрим два предельных случая в зависимости от соотношения между частотой электромагнитного поля  $\omega$  и частотой изменения энергии электрона  $1/\tau$  ( $I_{\text{ст}}(f_0) \sim f_0/\tau$ ). Если частота электромагнитного поля мала,  $\omega\tau \ll 1$ , то членами  $\partial f_0/\partial t$ ,  $\partial f_1/\partial t$  в системе уравнений (2.30) можно пренебречь по сравнению с членами  $I_{\text{ст}}(f_0)$  и  $v_y f_1$  соответственно. При этих условиях система уравнений для  $f_0$  и  $f_1$  имеет тот же вид, что и в стационарном случае. Поэтому функция распределения электронов по скоростям дается выражениями (2.24), причем в этих выражениях следует заменить  $E$  на  $E \cos \omega t$ .

Практический интерес представляет другой предельный случай, когда  $\omega\tau \gg 1$ . Поскольку  $1/\tau$  — частота обмена энергией между электроном и атомами, то в этом случае энергия, передаваемая от электрона атомам за один период, составляет малую долю энергии электронов. Поэтому энергия электронов в течение периода колебаний изменяется только за счет взаимодействия с электромагнитным полем. Так как эта энергия вкладывается и забирается у электронов, соответствующих несимметричной части функции распределения  $f_1$ , то сферически симметричная часть функции распределения  $f_0$  не зависит от времени.

Используем приведенные соображения для решения системы уравнений (2.30) при  $\omega\tau \gg 1$ . Разложим функцию распределения электронов в ряд Фурье:

$$f_0(v, t) = \sum_n f_{0,n}(v) e^{i\omega n t}, \quad f_1(v, t) = \sum_n f_{1,n} e^{i\omega n t}.$$

При этом система уравнений (2.30) примет вид

$$\begin{aligned} i\omega n f_{0,n} + \frac{eE}{6m} \frac{d^3(f_{1,n+1} + f_{1,n-1})}{v^2 dv} &= I_{\text{ст}}(f_{0,n}), \\ i\omega n f_{1,n} + \frac{eE}{2m} \frac{d(f_{0,n-1} + f_{0,n+1})}{v dv} &= -v_y f_{1,n}. \end{aligned}$$

В соответствии с проведенным анализом, в этой системе уравнений можно ограничиться элементом  $f_{0,0}$  для сферически симметричной части функции распределения и элементами  $f_{1,1}$ ,  $f_{1,-1}$  для несимметричной части. Остальные члены разложения по порядку

величины будут связаны с этими членами соотношениями

$$f_{0, \pm 2k} \sim \frac{f_{0,0}}{(\omega\tau)^k} \frac{(\omega^2 + v_y^2)^{(k-1)/2}}{(2k)!! \prod_{m=1}^{k-1} [(2m-1)^2 \omega^2 + v_y^2]^{1/2}},$$

$$f_{0, \pm (2k+1)} \sim \frac{f_{1, \pm 1}}{(\omega\tau)^k} \frac{(\omega^2 + v_y^2)^{k/2}}{(2k)!! \prod_{m=1}^k [(2m-1)^2 \omega^2 + v_y^2]^{1/2}}.$$

Ограничившись членами разложения  $f_{0,0} \equiv f_0$ ,  $f_{1,1}$ ,  $f_{1,-1}$  функции распределения, приводим систему уравнений (2.30) к виду

$$\frac{eE}{6m^2} \frac{dv^3 (f_{1,1} + f_{1,-1})}{dv} - I_{\text{ст}}(f_0),$$

$$(i\omega + v_y) f_{1,1} + \frac{eE}{2mv} \frac{df_0}{dv} = 0, \quad (2.31)$$

$$(-i\omega + v_y) f_{1,-1} + \frac{eE}{2mv} \frac{df_0}{dv} = 0,$$

что дает уравнение для  $f_0$ :

$$\frac{1}{6} \left( \frac{eE}{m} \right)^2 \frac{d}{v^2 dv} \left[ \frac{v^2 v_y}{(\omega^2 + v_y^2)} \frac{df_0}{dv} \right] - I_{\text{ст}}(f_0).$$

Решение этого уравнения в частном случае, когда  $I_{\text{ст}}(f_0)$  определяется упругим соударением электрона с атомами газа, имеет вид

$$f_0(v) = C \exp \left\{ - \int_0^v \left[ T + \frac{e^2 E^2 M}{6m^2 (\omega^2 + v_y^2)} \right]^{-1} m v dv \right\}, \quad (2.32a)$$

где  $C$  — константа нормировки. Несимметричная часть функции распределения в этом частном случае имеет вид

$$f_1(v, t) = - \frac{eE}{m (\omega^2 + v_y^2)} (v_y \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \frac{df_0}{dv}. \quad (2.32b)$$

**Задача 2.32.** Найти температуру электронов для слабоионизованной плазмы, находящейся в поле сверхвысокой частоты. Плотность электронов велика, так что обмен энергией между электронами происходит гораздо интенсивнее, чем между электронами и атомами, частота электромагнитного поля  $\omega$  велика по сравнению с частотой обмена энергией между отдельным электроном и атомами.

Чтобы учесть столкновения между электронами, мы должны ввести в первое из уравнений системы (2.31) интеграл электрон-электронных столкновений. При этом два других уравнения системы (2.31) остаются без изменения. Так как изменение энер-

гии электрона в результате столкновения с электронами происходит интенсивнее, чем при соударении с атомами, то первое из уравнений системы (2.31), как и в задаче 2.22, дает, что интеграл электрон-электронных столкновений равен нулю. Это приводит к максвелловской функции распределения электронов по энергиям (см. задачу 2.22).

Второе и третье уравнения системы (2.31) сохраняются, так что остается в силе и выражение (2.32б). Оно дает возможность определить дрейфовую скорость электронов  $\omega$ :

$$\omega(t) = \frac{eE}{3T_e} \left\langle v^2 \frac{(v_y \cos \omega t + \omega \sin \omega t)}{\omega^2 + v_y^2} \right\rangle.$$

Здесь  $T_e$  — температура электронов, усреднение по скоростям, которое мы обозначили  $\langle \rangle$ , проводится с максвелловской функцией распределения электронов. Остальные обозначения те же, что и в предыдущей задаче.

Напишем уравнение баланса энергии для отдельного электрона. Кинетическое уравнение для электрона, которое имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{eE}{m} \cos \omega t \frac{\partial f}{\partial v_x} = I_{ee} + I_{ea},$$

умножим на кинетическую энергию электрона  $mv^2/2$ , проинтегрируем по скоростям электронов и усредним по времени. Так как, согласно соотношению (1.15),  $\int I_{ee} \frac{mv^2}{2} d\mathbf{v} = 0$ , то получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle + \overline{eE\omega \cos \omega t} = \omega t \int \frac{mv^2}{2} I_{ea} d\mathbf{v}.$$

Здесь черта сверху означает усреднение по времени. Первый член в левой части соотношения, являющийся средним изменением средней энергии электрона в единицу времени, по определению этой величины равен нулю.

Используя выражение для дрейфовой скорости электрона и значения средних величин  $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$ ,  $\overline{\cos \omega t \sin \omega t} = 0$ , найдем выражение для второго слагаемого, которое характеризует собой среднюю энергию, получаемую от поля отдельным электроном в единицу времени:

$$\overline{eE\omega \cos \omega t} = \frac{(eE)^2}{6T_e} \left\langle \frac{v_y v^2}{\omega^2 + v_y^2} \right\rangle.$$

Величина, стоящая в левой части уравнения баланса энергии, которая представляет собой энергию, отдаваемую отдельным электроном газу в результате упругих соударений этого электрона с атомами газа, была вычислена в задаче 2.22. Если воспользоваться полученным там значением, то это приведет к следующему выражению для разности электронной ( $T_e$ ) и атомной ( $T$ )



температур:

$$T_e - T = \frac{M}{6} \left( \frac{eE}{m} \right)^2 \left\langle \frac{v_y v^2}{\omega^2 + v_y^2} \right\rangle / \langle v_y v^2 \rangle.$$

В случае малых частот электромагнитного поля ( $\omega/v_y \ll 1$ ) эта формула совпадает с результатом задачи 2.22, если в полученных в указанной задаче выражениях напряженность электрического поля  $E$  заменить ее эффективным значением  $E/\sqrt{2}$ . При больших частотах электромагнитного поля ( $\omega/v_y \gg 1$ ) разность между электронной температурой и атомной не зависит от частоты соударений электрона с атомами и равна

$$T_e - T = \frac{M}{6} \left( \frac{eE}{m\omega} \right)^2.$$

**Задача 2.33.** Получить выражение для интеграла столкновений электронов друг с другом (интеграл столкновений Ландау).

Существенное упрощение задачи в данном случае связано с тем, что основной вклад в диффузионное сечение столкновения двух электронов, находящихся в идеальной плазме, вносят прицельные параметры соударения, приводящие к рассеянию на малые углы. Поэтому импульс электрона  $\mathbf{p}$  за одно столкновение мало меняется по сравнению с его величиной и интеграл электрон-электронных столкновений  $I_{ee}$  может быть представлен как правая часть уравнения непрерывности

$$I_{ee} = -\partial \mathbf{j} / \partial \mathbf{p}.$$

Однако, в отличие от уравнения Фоккера—Планка (1.67), величина  $\mathbf{j}$  является теперь квадратичной функцией относительно функций распределения электронов по скоростям.

Представим интеграл межэлектронных столкновений в виде

$$I_{ee} = - \int [f(\mathbf{p})f(\mathbf{p}') - f(\mathbf{p} + \Delta)f(\mathbf{p}' + \Delta')] \times \\ \times \mathcal{W} \left( \mathbf{p} + \frac{\Delta}{2}, \mathbf{p}' + \frac{\Delta'}{2}, \Delta, \Delta' \right) d\mathbf{p}' d\Delta. \quad (2.33)$$

Здесь  $\Delta, \Delta'$  — изменение импульсов первого и второго электронов при столкновении,  $\mathcal{W} \left( \mathbf{p} + \frac{\Delta}{2}, \mathbf{p}' + \frac{\Delta'}{2}, \Delta, \Delta' \right)$  — вероятность столкновения электронов, обладающих импульсами  $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$  с переходом в состояние с импульсами  $\mathbf{p} + \Delta, \mathbf{p}' + \Delta'$ , приходящаяся на единицу времени и единицу объема, так что  $\mathcal{W} d\Delta = = |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d\sigma$ , где  $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$  — скорости электронов,  $d\sigma$  — дифференциальное сечение их столкновения, приводящее к изменению импульса на величину  $\Delta$ . Мы представим вероятность  $\mathcal{W}$  зависящей от полусуммы и разности импульсов данного электрона до и после столкновения. Это дает возможность наилучшим образом учесть свойства симметрии вероятности  $\mathcal{W}$ , ибо эта величина

одинакова для прямых и обратных процессов. Отсюда

$$\left[ W \left( \mathbf{p} + \frac{\Delta}{2}, \mathbf{p}' + \frac{\Delta'}{2}, \Delta, \Delta' \right) = W \left( \mathbf{p} + \frac{\Delta}{2}, \mathbf{p}' + \frac{\Delta'}{2}, -\Delta, -\Delta' \right) \right]$$

следует, что вероятность  $W$  — четная функция  $\Delta$ . Из закона сохранения импульсов:  $\Delta = -\Delta'$ .

Разложим подынтегральное выражение в (2.33), учитывая, что изменение импульса при столкновении электронов мало, так что  $|\Delta| \ll |\mathbf{p}|$ . Члены нулевого порядка по  $\Delta$  сокращаются. Члены первого порядка дают

$$\int d\mathbf{p}' d\Delta W \left( f' \frac{\partial f}{\partial p_i} \Delta_i + f \frac{\partial f'}{\partial p_i} \Delta'_i \right).$$

Здесь  $f \equiv f(\mathbf{p})$ ,  $f' \equiv f(\mathbf{p}')$ ,  $p_i$ ,  $p_k$  — соответствующая компонента вектора, по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Поскольку  $W$  — четная функция  $\Delta$  и  $\Delta'$ , данный интеграл по  $d\Delta$  равен нулю.

Во втором приближении по  $\Delta$  получим

$$I_{ee} = \int d\mathbf{p}' d\Delta \left[ W \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} f' \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_k} + \Delta_i \Delta'_k \frac{\partial f'}{\partial p'_k} \frac{\partial f}{\partial p_i} + \Delta'_i \Delta_k f \frac{\partial^2 f'}{\partial p'_i \partial p'_k} \right] + \\ + \frac{1}{2} \left( \Delta_i \frac{\partial W}{\partial p_i} + \Delta'_i \frac{\partial W}{\partial p'_i} \right) \left( \Delta_k \frac{\partial f}{\partial p_k} f' + \Delta'_k \frac{\partial f'}{\partial p'_k} f \right).$$

Проинтегрируем ряд из этих членов по частям:

$$\frac{1}{2} \int d\mathbf{p}' d\Delta \Delta_k \Delta'_i W \frac{\partial f'}{\partial p'_i} \frac{\partial f}{\partial p_k} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}' d\Delta \Delta'_i \Delta_k f' \frac{\partial W}{\partial p'_i} \frac{\partial f}{\partial p_k} = \\ = \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}' d\Delta \Delta_k \Delta'_i \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial p'_i} (W f') = 0, \\ \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}' d\Delta \Delta'_i \Delta_k f W \frac{\partial^2 f'}{\partial p'_i \partial p'_k} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}' d\Delta \Delta'_i \Delta_k f \frac{\partial W}{\partial p'_i} \frac{\partial f'}{\partial p_k} = \\ = \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}' d\Delta \Delta'_i \Delta_k f \frac{\partial}{\partial p'_i} \left( W \frac{\partial f'}{\partial p_k} \right) = 0,$$

поскольку при  $p' \rightarrow \infty$   $f(p') = \frac{df'}{dp'} = 0$ . Используя это, получим

$$I_{ee} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{p}' d\Delta \left[ \Delta_i \Delta_k W f' \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_k} + \Delta_i \Delta'_k W \frac{\partial f'}{\partial p'_k} \frac{\partial f}{\partial p_i} + \right. \\ \left. + \Delta_i \Delta_k \frac{\partial W}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial p_k} f' + \Delta_i \Delta'_k \frac{\partial W}{\partial p_i} \frac{\partial f'}{\partial p'_k} f \right] = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_i} \int d\mathbf{p}' d\Delta \left[ \Delta_i \Delta_k W \frac{\partial f}{\partial p_k} f' + \Delta_i \Delta'_k W f \frac{\partial f'}{\partial p'_k} \right] = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_i} \int d\mathbf{p}' d\Delta W \Delta_i \Delta_k \left( f' \frac{\partial f}{\partial p_k} - f \frac{\partial f'}{\partial p'_k} \right).$$

Таким образом, интеграл межэлектронных столкновений оказывается дивергенцией некоторого потока, как это и следует из

уравнения непрерывности:

$$I_{ee} = - \frac{\partial j_i}{\partial \rho_i}. \quad (2.34)$$

Величина этого потока

$$j_i = \int d\mathbf{p}' \left( f \frac{\partial f'}{\partial \rho_k} - f' \frac{\partial f}{\partial \rho_k} \right) \mathcal{D}_{ik}, \quad (2.35)$$

где

$$\mathcal{D}_{ik} = \int \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} W d\Delta.$$

Полученный результат носит общий характер. Он справедлив в случае, если столкновение рассматриваемых частиц происходит с малым изменением их импульса. Вычислим величину тензора  $\mathcal{D}_{ik}$  для электронов, движущихся в плазме. Изменение импульса электрона, сталкивающегося с другим электроном, при больших прицельных параметрах соударения  $\rho$  мало и равно

$$\Delta_i = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dU}{dx_i} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^2}{r^3} \rho_i dt = \frac{2e^2 \rho_i}{\rho^2 g},$$

поскольку потенциал взаимодействия двух электронов  $U = e^2/r$ , где  $r$  — расстояние между сталкивающимися электронами,  $x_i$  — проекция радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  на данную ось,  $\rho_i$  — проекция  $\rho$  на данную ось,  $g$  — относительная скорость соударения. Отсюда

$$\mathcal{D}_{ik} = \int \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} W d\Delta = \int \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} g d\sigma = \frac{2e^4}{g} \int \frac{\rho_i \rho_k}{\rho^4} d\sigma.$$

Для вычисления величины тензора  $\mathcal{D}_{ik}$  введем временно ось  $x$ , направленную вдоль относительной скорости  $g$ . Так как вектор  $\rho$  перпендикулярен  $g$ , то  $\rho_x = 0$  и  $\mathcal{D}_{xx} = \mathcal{D}_{xy} = \mathcal{D}_{xz} = 0$ . Далее, поскольку  $d\sigma = \rho d\rho d\varphi$  и  $\rho_y = \rho \cos \varphi$ ,  $\rho_z = \rho \sin \varphi$ , то

$$\mathcal{D}_{zz} \sim \int_0^{2\pi} \rho_y \rho_z d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi d\varphi = 0.$$

Отличные от нуля компоненты тензора равны

$$\mathcal{D}_{yy} = \mathcal{D}_{zz} = \frac{2\pi e^4}{g} \int_0^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho}.$$

Этот интеграл расходится на нижнем и на верхнем пределах. Расходимость на нижнем пределе связана с используемым приближением, ибо при больших углах отклонения использованные формулы теряют силу. В качестве нижнего предела интегрирования следует подставить прицельный параметр столкновения, для которого потенциал взаимодействия  $e^2/\rho_1$  оказывается

порядка кинетической энергии сталкивающихся электронов  $\epsilon$ , так что угол рассеяния порядка единицы:

$$\rho_1 \approx e^2/\epsilon.$$

В качестве верхнего предела интегрирования следует выбрать радиус Дебая—Гюккеля  $r_D = \sqrt{T/8\pi Ne^2}$ , на котором происходит экранировка заряда, так что потенциал взаимодействия электронов становится отличным от кулоновского. На основе этого получим

$$\mathcal{D}_{yy} = \mathcal{D}_{zz} = \frac{2\pi e^4}{g} \ln \Lambda, \quad (2.36a)$$

где  $\ln \Lambda \approx \ln(\bar{\epsilon} r_D/e^2) = \ln(T^3/Ne^6)^{1/2}$  — кулоновский логарифм. При нашем способе нахождения кулоновского логарифма выражение под логарифмом определено с точностью до множителя порядка единицы\*). Поэтому полученный результат справедлив, если кулоновский логарифм является достаточно большой величиной,  $\ln \Lambda \gg 1$ . Это имеет место в случае идеальной плазмы.

Перейдем теперь к произвольной системе координат. Тензор может быть построен на векторе относительной скорости  $g$ , ибо после интегрирования по  $d\sigma$  он не зависит от других векторов. Поскольку  $\mathcal{D}_{ik}$  — симметричный тензор, он может быть составлен из комбинаций типа  $g_i g_k$  или  $g^2 \delta_{ik}$  ( $\delta_{ik} = 0, i \neq k$ ;  $\delta_{ik} = 1, i = k$ ). Используя полученное выражение для  $\mathcal{D}_{ik}$  в случае, когда направление одной из осей координат совпадает с направлением  $g$ , получим для произвольной системы координат

$$\mathcal{D}_{ik} = 2\pi e^4 \ln \Lambda \frac{g^2 \delta_{ik} - g_i g_k}{g^3}. \quad (2.36b)$$

**Задача 2.34.** В основной области распределения электронов функция распределения электронов по скоростям максвелловская. Получить выражение для интеграла межэлектронных столкновений в этом случае.

Для этой цели можно было бы использовать интеграл столкновений в форме Ландау (2.34), (2.35), подставив в это выражение максвелловскую функцию распределения вместо  $f'(v)$ .

\*) Для идеальной плазмы, с которой мы имеем дело, радиус Дебая — Гюккеля  $r_D$  значительно превышает среднее расстояние между заряженными частицами  $\sim N^{-1/3}$ . Поэтому интересующая нас величина  $\mathcal{D}_{ik}$  в существенной степени определяется одновременным столкновением нескольких электронов. По этой причине, действуя в рамках двухчастичного соударения электронов, мы не можем претендовать на большую точность. Например, вычисление тензора  $\mathcal{D}_{ik}$  при использовании потенциала взаимодействия  $(e^2/r) \exp(-r/r_D)$  с точным нахождением интеграла по  $dr$  не является уточнением данного результата.]

Мы получим искомый результат другим способом. Сначала заметим, что в отличие от интеграла столкновений в форме Ландау в рассматриваемом случае интеграл межэлектронных столкновений является линейным функционалом от функции распределения для пробного электрона, ибо функция распределения его партнера по столкновению максвелловская. Далее, энергия электрона мало меняется за одно столкновение, ибо в основном рассеяние электрона происходит на малые углы. Поэтому интеграл межэлектронных столкновений в данном случае может быть записан в виде правой части уравнения Фоккера—Планка и согласно формуле (1.73) имеет вид

$$I_{ст}(f) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ \sqrt{\varepsilon} B(\varepsilon) \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{f}{T_e} \right) \right],$$

где  $\varepsilon$ —энергия электрона,  $T_e$ —электронная температура.

Если энергия электрона значительно превышает его тепловую энергию, то для величины  $B(\varepsilon)$  можно воспользоваться выражением, полученным в задаче 1.36 для электрон-атомных столкновений. При получении этого выражения было использовано предположение, что скорость пробного электрона много больше скорости атома. Поскольку в рассматриваемом случае скорость пробного электрона много больше скорости его партнера, то, используя выражение (1.74) в данном случае, имеем для интеграла столкновений

$$I_{ст}(f) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v^3 v \left( f + \frac{T_e}{mv} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right], \quad (2.37)$$

где частота межэлектронных столкновений  $\nu = N_e \sigma^*$ ,  $N_e$ —плотность электронов.

При вычислении диффузионного сечения рассеяния двух электронов  $\sigma^*$  будем считать, что электроны движутся по классической траектории, ионы неподвижны. Тогда при рассеянии на малый угол изменение импульса электрона в направлении, перпендикулярном движению, равно

$$\Delta p_{\perp} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\perp}^{\vec{r}} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{\vec{e}}}{R} \frac{\partial U}{\partial R} dt,$$

где  $\vec{r} = -\partial U / \partial \vec{R}$ —сила, действующая на электрон со стороны иона,  $U = e^2/R$ —кулоновский потенциал взаимодействия электрона и иона,  $R$ —расстояние между ними,  $t$ —время,  $\rho$ —прицельный параметр столкновения. При малых углах рассеяния справедлив закон свободного движения  $R^2 = \rho^2 + v^2 t^2$ , где  $v$ —относительная скорость столкновения, которая в рассматриваемом случае совпадает со скоростью пробного электрона. Отсюда

находим

$$\Delta p_{\perp} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho e^2}{R^3} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho e^2 dt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{2e^2}{\rho v},$$

и угол рассеяния

$$\theta = \frac{\Delta p_{\perp}}{v} = \frac{2e^2}{\rho v^2} = \frac{2e^2}{\epsilon \rho},$$

( $\epsilon = mv^2/2$  — энергия электрона,  $m$  — его масса,  $\mu = m/2$  — приведенная масса двух электронов).

Поскольку дифференциальное сечение рассеяния равно  $d\sigma = 2\pi\rho d\rho$ , то из выражения для диффузионного сечения рассеяния следует, что  $\sigma^*$  расходится при малых прицельных параметрах столкновения:

$$\sigma^* = \int (1 - \cos \theta) 2\pi\rho d\rho \approx \int \frac{\theta^2}{2} 2\pi\rho d\rho = \frac{4\pi e^4}{\epsilon^2} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\rho}.$$

Со стороны малых прицельных параметров этот интеграл следует обрезать там, где угол рассеяния порядка единицы, ибо там использованное разложение незаконно. Имеем  $e^2/\epsilon\rho_{\min} \sim 1$ , т. е.  $\rho_{\min} \sim e^2/\epsilon$ . Со стороны больших прицельных параметров обрежем этот интеграл при  $\rho_{\max} \sim r_D$  ( $r_D$  — радиус Дебая — Гюккеля для плазмы), ибо при этих расстояниях потенциал взаимодействия электрона и иона в плазме перестает быть кулоновским в силу экранировки заряженными частицами плазмы. В результате получим

$$\sigma^* = \frac{4\pi e^4}{\epsilon^2} \ln \Lambda, \quad (2.38)$$

где  $\ln \Lambda = \ln(e^2/\epsilon r_D) \gg 1$  — кулоновский логарифм.

Используя выражение для диффузионного сечения рассеяния (2.38) быстрого электрона на медленных электронах плазмы, преобразуем формулу (2.37) для интеграла электрон-электронных столкновений к виду

$$I_{ст}(f) = \frac{16\pi e^4 N_e \ln \Lambda}{m^2 v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( f + \frac{T_e}{mv} \frac{\partial f}{\partial v} \right). \quad (2.39)$$

Эта формула справедлива для скоростей электронов, значительно превышающих тепловую.

**Задача 2.35.** Выяснить, при каких условиях в слабоионизованной плазме можно ввести отдельно электронную и атомную температуру.

Электронную температуру имеет смысл вводить в тех случаях, когда функция распределения электронов по скоростям максвелловская. Это имеет место в случае, когда частота столкновения электронов друг с другом достаточно велика. Действи-

тельно, кинетическое уравнение (1.2) для функции распределения электронов имеет вид

$$\frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = I_{ee} + I_{ea},$$

где  $I_{ee}$  — интеграл столкновений электронов друг с другом,  $I_{ea}$  — интеграл столкновений электронов с атомами. Как было показано в задаче 2.22 при большой величине частоты столкновений между электронами в нулевом приближении кинетическое уравнение принимает вид

$$I_{ee} = 0,$$

что приводит к максвелловскому распределению для электронов, но с температурой, отличной от температуры газа. Отсюда следует, что электронная температура может быть введена, если выполняется условие  $\nu_{ee} \gg \nu_{ea}$ , где  $\nu_{ee}$  — частота столкновений электронов друг с другом,  $\nu_{ea}$  — частота передачи энергии от электрона к атому. В частности, в случае упругого столкновения электронов с атомами это дает

$$\nu_{ee} \sim N_e \frac{e^4}{T_e^2} \ln \Lambda \sqrt{\frac{T_e}{m}}, \quad \nu_{ea} \sim N_a \frac{m}{M} \sqrt{\frac{T_e}{m}} \sigma_y,$$

$$N_e \gg N_a \frac{m}{M} \frac{\sigma_y T_e^2}{e^4 \ln \Lambda},$$

где  $N_e$ ,  $N_a$  — плотность электронов и атомов соответственно,  $T_e$  — температура электронов,  $\ln \Lambda$  — кулоновский логарифм,  $\sigma_y$  — сечение упругого столкновения электрона с атомом,  $M$  — масса атома. Хотя для слабоионизованной плазмы  $N_e \ll N_a$ , но так как  $T_e^2 \sigma_y / e^4 \Lambda \ll 1$  и  $m/M \ll 1$ , то имеется большая область параметров, в которой данное соотношение справедливо.

**Задача 2.36.** Атомы в слабоионизованном газе возбуждаются под действием внешнего резонансного излучения. Далее, резонансно возбужденные атомы тушатся в результате столкновений с электронами. Считая, что энергия возбуждения атома  $\epsilon_0$  значительно превышает среднюю энергию электронов, определить отрыв электронной температуры от атомной, если в единице объема в единицу времени возбуждается  $dN/dt$  атомов.

При тушении резонансно возбужденного атома электрон уносит энергию возбуждения атома  $\epsilon_0$  и передает ее при столкновениях с другими электронами. Если мощность, которая вносится в электронный газ, много меньше характерных мощностей, которыми электроны обмениваются между собой, то процесс тушения не нарушает максвелловской функции распределения электронов по скоростям (хотя устанавливает электронную температуру). Соответствующий критерий имеет вид

$$N_e \nu_{ee} T_e \gg \epsilon_0 \frac{dN}{dt}.$$

При этом энергия, передаваемая отдельному электрону в единицу времени, равна  $\frac{1}{N_e} \epsilon_0 \frac{dN}{dt}$ . Сравнивая эту величину с соответствующей энергией, отдаваемой атомам газа при упругих столкновениях, получим соотношение

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} I_{ea} \right\rangle = \frac{\epsilon_0}{N_e} \frac{dN}{dt},$$

где  $I_{ea}$  — интеграл столкновения электронов с атомами. Далее, для простоты будем считать, что частота упругого столкновения электрона с атомами  $\nu_y$  не зависит от скорости электрона. Используя вычисления задачи 2.21, перепишем полученное соотношение в виде

$$\frac{3m}{M} \nu_y (T_e - T) = \frac{\epsilon_0}{N_e} \frac{dN}{dt}.$$

Отсюда находим

$$T_e - T = \frac{M}{3M} \frac{1}{N_e \nu_y} \frac{dN}{dt} \epsilon_0.$$

При этом из условия возможности введения электронной температуры  $\nu_{ee} \gg \frac{m}{M} \nu_y$  и условия справедливости максвелловской функции распределения электронов по скоростям следует условие

$$T_e - T \ll \frac{dN}{N_e \nu_{ee} dt} \epsilon_0 \ll T_e,$$

т. е. относительный отрыв температуры электронов от температуры газа невелик.

**Задача 2.37.** Частота электрон-электронных столкновений в слабоионизованном газе значительно превышает частоту упругих столкновений электрона с атомами. Энергия возбуждения электронного уровня  $\epsilon_0$  значительно больше тепловой энергии электронов. Сечение возбуждения этого уровня достаточно велико, так что всякий раз, когда энергия электрона превышает  $\epsilon_0$ , он возбуждает атом. Определить частоту возбуждения атомов отдельным электроном, считая, что тушение этого возбуждения протекает без участия электронов.

Искомый результат не зависит от частоты неупругого столкновения электрона с атомами. Действительно, частота неупругого столкновения настолько велика, что время между двумя соседними неупругими столкновениями пробного электрона с атомами определяется скоростью, с которой этот электрон набирает энергию в результате межэлектронных столкновений. С другой стороны, в силу большой величины частоты неупругих столкновений функция распределения электронов по скоростям резко падает с ростом энергии электрона, как только последняя



превысит  $\varepsilon_0$ . Учитывая это, определим  $\nu_{ea}$  — частоту неупругих столкновений с атомами

$$\nu_{ea} N_e = - \int_{v_0}^{\infty} 4\pi v^2 dv \frac{\partial f}{\partial t},$$

где  $v_0 = (2\varepsilon_0/m)^{1/2}$ ,  $m$  — масса электрона. Для интеграла межэлектронных столкновений  $I_{ст}$  из кинетического уравнения имеем:  $\partial f/\partial t = I_{ст}(f)$ . Используя  $I_{ст}$  (2.39), для частоты возбуждения атомов получим

$$\nu_{ea} N_e = - \int_{v_0}^{\infty} 4\pi v^2 dv I_{ст}(f) = 64\pi^2 e^4 N_e m^{-2} \ln \Lambda \left( f + \frac{T_e}{mv} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \Big|_{v_0}.$$

Определим функцию распределения электронов по скоростям. В силу указанных обстоятельств она является решением уравнения

$$I_{ст}(f) = 0$$

с граничным условием  $f(v_0) = 0$ . В основной области распределения электронов функция распределения электронов максвелловская:

$$f(v) = N_e \left( \frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{mv^2}{2T_e} \right).$$

Решая искомое уравнение с заданными граничными условиями, получим

$$f(v) = N_e \left( \frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \left[ \exp \left( - \frac{mv^2}{2T_e} \right) - \exp \left( - \frac{mv_0^2}{2T_e} \right) \right].$$

Это выражение справедливо при  $mv_0^2/2T_e \gg 1$ , ибо только в этом случае функция распределения в основной области совпадает с максвелловской. В результате для частоты неупругого столкновения электрона с атомами получим

$$\nu_{ea} = 16 \sqrt{2\pi} T_e^{-3/2} m^{-1/2} e^4 N_e \ln \Lambda \exp(-\varepsilon_0/T_e).$$

**Задача 2.38.** Определить функцию распределения электронов по энергиям в области энергий возбуждения атомов, если энергия возбуждения атомов  $\varepsilon_0$  значительно превышает тепловую энергию электронов. Считать, что частота столкновения электронов с атомами газа, приводящая к изменению энергии электронов, значительно меньше частоты межэлектронных столкновений. Константу скорости возбуждения атома электронным ударом за порогом процесса для простоты считать не зависящей от энергии электрона. Определить частоту возбуждения атомов отдельным электроном.

Наша задача состоит в решении кинетического уравнения для функции распределения электронов при учете упругих столкновений электронов друг с другом и неупругих столкновений электронов с атомами газа. Это уравнение имеет вид

$$I_{ee}(f) - \nu_{\text{возб}} f = 0,$$

где  $f$  — функция распределения электронов по энергиям,  $I_{ee}(f)$  — интеграл столкновений между электронами,  $\nu_{\text{возб}}$  — частота возбуждения атомов электронным ударом. Второе слагаемое в этом уравнении следует учитывать при энергиях электрона, превышающих пороговую. При этом мы считаем, что в процессе тушения возбужденных состояний атомов электроны не участвуют, так что этот процесс не включен в кинетическое уравнение.

Используя явный вид для интеграла межэлектронных столкновений (формула (2.37) задачи 2.32), представим данное уравнение в виде

$$\frac{1}{v^2} \frac{d}{dv} \left[ v^3 \nu \left( f + \frac{T_e}{mv} \frac{df}{dv} \right) \right] - \nu_{\text{возб}} f = 0,$$

где  $\nu$  — частота межэлектронных столкновений,  $T_e$  — температура электронов. Учтем, что величина  $v^3 \nu$  не зависит от скорости электрона. Представим функцию распределения электронов в виде  $f(v) = \varphi(v) g(v)$ , где  $\varphi(v)$  — максвелловская функция распределения электронов, так что  $\frac{d\varphi}{dv} = -\frac{mv}{T_e} \varphi$ . Вводя далее энергию электрона  $\varepsilon = mv^2/2$ , получим

$$\frac{d^2 g}{d\varepsilon^2} - \frac{1}{T_e} \frac{dg}{d\varepsilon} - \frac{\nu_{\text{возб}} g}{\nu \varepsilon T_e} = 0.$$

Обезразмерим полученное уравнение, введя параметры  $x = \varepsilon/T_e$ ,  $\alpha = \nu_{\text{возб}} T_e / \nu \varepsilon_0$ . При этом согласно условию задачи  $x_0 = \varepsilon_0/T_e \gg 1$ . Решим полученные уравнения в области  $\varepsilon \sim \varepsilon_0$ . Имеем два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{dx^2} - \frac{dg}{dx} &= 0, & x \leq x_0, \\ \frac{d^2 g}{dx^2} - \frac{dg}{dx} - \alpha g &= 0, & x > x_0. \end{aligned}$$

При этом, поскольку при  $x \sim 1$  функция распределения электронов совпадает с максвелловской, то  $g = 1$  при  $x \rightarrow 0$ .

Решение данных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} g &= C_1 - C_2 e^x, & x \leq x_0; \\ g &= C_3 e^{a_1 x} + C_4 e^{a_2 x}, & x > x_0, \quad a_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + \alpha}. \end{aligned}$$

Из физических соображений следует, что функция распределения электронов меньше максвелловской (т. е.  $g \leq 1$ ). Кроме того, функция  $g(x)$  монотонно убывает с ростом  $x$ . Эти обстоятельства обусловлены неупругими процессами, которые уменьшают число электронов на хвосте функции распределения. Из

монотонного убывания функции  $g(x)$  следует, что  $C_4 = 0$ . Кроме того, в силу этого обстоятельства и положительности  $g(x)$  имеем  $C_1 \sim C_2 e^{x_0}$ , и поскольку  $x_0 \gg 1$ , то  $C_2 \ll C_1$ . Поэтому из условия  $g(0) = 1$  следует, что  $C_1 = 1$ . Таким образом, решение кинетических уравнений приводится к виду

$$g = \begin{cases} 1 - C_2 e^x, & x \leq x_0, \\ C_3 \exp[(1/2 - \sqrt{1/4 + \alpha}) x], & x > x_0. \end{cases}$$

В силу непрерывности функции и ее производной следует, что логарифмические производные этой функции с левой и правой стороны от точки  $x_0$  совпадают. Это дает

$$\frac{C_2 e^{x_0}}{1 - C_2 e^{x_0}} = \sqrt{1/4 + \alpha} - 1,$$

откуда получаем

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1/4 + \alpha} + 1/2 + \alpha} e^{x - x_0}, & x \leq x_0 \\ \frac{\sqrt{1/4 + \alpha} + 1/2}{\sqrt{1/4 + \alpha} + 1/2 + \alpha} \exp[-(\sqrt{1/4 + \alpha} - 1/2)(x - x_0)], & x > x_0. \end{cases}$$

Сравнивая с предыдущей задачей, находим, что условие этой задачи, связанное с пределом сильного возбуждения атомов электронным ударом, имеет вид

$$\alpha = \frac{v_{\text{возб}}}{v(\epsilon_0)} \frac{T_e}{\epsilon_0} \gg 1.$$

Исходя из полученных выражений для функции распределения, определим среднее значение частоты возбуждения атомов  $\bar{v}_{ea}$  отдельным электроном. Эта величина равна

$$\begin{aligned} N_e \bar{v}_{ea} &= \int_{v_0}^{\infty} v_{\text{возб}} f(v) \cdot 4\pi v^2 dv = \int_{v_0}^{\infty} I_{ee}(f) \cdot 4\pi v^2 dv = \\ &= -4\pi v^3 v \left( f + \frac{T_e}{\epsilon_0} \frac{df}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon_0} = -4\pi v^3 v \varphi \frac{d\varphi}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon_0} = \frac{4\pi v_0^3 v \varphi(\epsilon_0) \alpha}{\alpha + 1/2 + \sqrt{1/4 + \alpha}}. \end{aligned}$$

В пределе больших значений  $\alpha$  искомая величина не зависит от частоты неупругого столкновения электрона с атомом и совпадает с результатом предыдущей задачи. В другом предельном случае малых значений  $\alpha$  функция распределения электронов максвелловская при любых энергиях электрона. Поэтому средняя частота возбуждения атомов при соударении с одним электроном не зависит от частоты упругих столкновений между электронами и равна

$$N_e \bar{v}_{ea} = \int_{v_0}^{\infty} 4\pi v^2 dv \varphi(v) v_{\text{возб}} = 4\pi v_0 \frac{T_e}{m} \varphi(\epsilon_0) v_{\text{возб}}.$$

Этот результат вытекает из полученного общего выражения для данной величины.

#### § 4. Плазма во внешних полях

**Задача 2.39.** Определить вклад в проводимость слабоионизованного газа за счет электронов и ионов.

Мы рассматриваем случай, когда слабоионизованный газ находится в электрическом поле и проводимость газа  $\Sigma$  есть коэффициент пропорциональности между плотностью электрического тока и напряженностью электрического поля  $E$ :  $\mathbf{j} = \Sigma \mathbf{E}$ . При этом для изотропного газа в отсутствие магнитного поля  $\Sigma$  — скалярная величина.

Электрический ток складывается из двух частей — тока за счет электронов и тока за счет ионов:

$$\mathbf{j} = -eN_e \mathbf{w}_e + eN_i \mathbf{w}_i,$$

здесь  $\mathbf{w}_e$ ,  $\mathbf{w}_i$  — средние скорости электронов и ионов,  $N_e$ ,  $N_i$  — плотности электронов и ионов, которые для квазинейтральной плазмы равны.

Вводя подвижность электронов и ионов в газе на основе соотношения  $\mathbf{w}_{e,i} = K_{e,i} \mathbf{E}$  ( $K$  — подвижность заряженной частицы) и учитывая, что электроны и ионы движутся в электрическом поле в разные стороны, получим для проводимости

$$\Sigma = eN_e (K_e + K_i).$$

Воспользуемся соотношением Эйнштейна, которое при малых электрических полях является точным, при больших полях должно пониматься как оценка. Получим  $K \sim e\mathcal{D}/T$ , где  $T$  — средняя энергия движения частиц. Отсюда находим, что вклады в проводимость плазмы за счет электронов и ионов пропорциональны коэффициенту диффузии соответствующих частиц в газе. Однако коэффициент диффузии по порядку величины

$$\mathcal{D} \sim v\lambda \sim v/N\sigma,$$

где  $v$  — характерная скорость частицы,  $\lambda \sim 1/N\sigma$  — длина свободного пробега частицы в газе ( $N$  — плотность газа,  $\sigma$  — сечение упругого столкновения рассматриваемой частицы на частице газа). Сечения упругого столкновения для электрона и иона с частицей газа одного порядка. Отсюда находим, что отношение для коэффициентов диффузии  $\mathcal{D}_e$  электрона и  $\mathcal{D}_i$  иона по порядку величины равно

$$\frac{\mathcal{D}_e}{\mathcal{D}_i} \sim \frac{v_e}{v_i} \sim \sqrt{\frac{M}{m}},$$

где  $v_e$ ,  $v_i$  — характерная скорость электрона и иона соответственно,  $m$ ,  $M$  — масса электрона и иона.

Отсюда можно заключить, что вклад в проводимость за счет движения ионов в  $\sqrt{M/m}$  раз меньше, чем за счет электронов.

Тем самым проводимость слабоионизованного газа практически определяется только движением электронов.

**Задача 2.40.** Определить проводимость слабоионизованного газа, находящегося в скрещенных магнитном и переменном электрическом полях, используя  $\tau$ -приближение (см. задачу 1.20).

$\tau$ -приближение соответствует замене интеграла столкновений величиной  $-(f-f^0)/\tau$ , где  $1/\tau$ —в данном случае эффективная частота столкновения электрона с атомами газа. Кинетическое уравнение для  $\tau$ -приближения принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{f-f^0}{\tau},$$

$f^0$ —равновесная функция распределения в отсутствие полей. Будем считать, что функция распределения электронов не зависит от пространственных координат. Тогда, умножив кинетическое уравнение на  $\mathbf{v}$  и проинтегрировав по электронным скоростям, получим уравнение для дрейфовой скорости электрона  $\mathbf{w}$ :

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} - \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{\mathbf{w}}{\tau}.$$

Это уравнение совпадает с уравнением движения электрона, причем столкновение электрона с атомами газа приводит к появлению силы трения  $m\mathbf{w}/\tau$ .

В рассматриваемом случае внешняя сила  $\mathbf{F} = eEe^{i\omega t} + \frac{e}{c}[\mathbf{w}H]$ .

Представив решение в виде  $\mathbf{w}e^{i\omega t}$ , получим систему уравнений для компонент скорости

$$\begin{aligned} m \left( i\omega + \frac{1}{\tau} \right) \omega_x &= eE + \frac{e}{c} \omega_y H, \\ m \left( i\omega + \frac{1}{\tau} \right) \omega_y &= -\frac{e}{c} \omega_x H. \end{aligned}$$

При этом ось  $x$  направлена по электрическому полю, а ось  $z$ —по магнитному. Решение этой системы уравнений:

$$\begin{aligned} \omega_x + i\omega_y &= \frac{eE}{m} \left[ \frac{1}{\tau} + i(\omega + \omega_H) \right]^{-1}, \\ \omega_x - i\omega_y &= \frac{eE}{m} \left[ \frac{1}{\tau} + i(\omega - \omega_H) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда проводимость газа равна

$$\Sigma = \frac{j_x}{E} = \frac{N_e e^2 \omega}{E} \left[ \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega_H^2 - \omega^2)\tau^2 + 2i\omega\tau} \right] \Sigma_0,$$

где  $\Sigma_0 = N_e e^2 \tau / m$ —проводимость в постоянном электрическом поле в отсутствие магнитного поля,  $N_e$ —плотность электронов,  $\omega_H = eH/mc$ —ларморовская частота. Из этой формулы следует, что

в стационарном случае под действием магнитного поля проводимость газа уменьшается согласно формуле

$$\Sigma = \frac{\Sigma_0}{1 + \omega^2 \tau^2}.$$

Это означает, что если частота столкновений мала, электрон движется по окружностям, что ограничивает его дрейфовую скорость.

Пусть  $\omega_H \tau \gg 1$ . Будем изменять частоту электрического поля. Как видно, при  $\omega = \omega_H$  проводимость имеет максимум:  $\Sigma = \Sigma_0/2$ . Этот эффект носит название циклотронного резонанса. Электрон движется по окружности, причем частота электрического поля совпадает с частотой вращения. Поэтому направление импульса, передаваемого от электрического поля свободному электрону, всегда совпадает с направлением движения, так что в отсутствие столкновений электрон должен был бы непрерывно увеличивать свою энергию (подобно электрону, движущемуся только в электрическом поле). Столкновения с атомами газа ограничивают энергию электрона и определяют проводимость газа.

**Задача 2.41.** К инертному газу добавлена присадка щелочного металла, которая слабо ионизируется. Определить, какое количество присадки обеспечит максимальную проводимость смеси при данном значении плотности инертного газа, температуре электрона и напряженности электрического поля при малых полях, если система находится в термодинамическом равновесии.

Проводимость газа равна

$$\Sigma = N_e e K,$$

где  $N_e$  — плотность электронов,  $K$  — подвижность электронов. При малой степени ионизации, согласно формуле Саха (2.14), плотность электронов  $N_e \sim N_{\text{пр}}^{1/2}$ , где  $N_{\text{пр}}$  — плотность атомов щелочного металла (присадки). Подвижность электронов при малых полях, полученная на основе формулы (2.24б) для несимметричной части функции распределения (2.20), равна

$$K = \frac{8e}{3\sqrt{\pi}m} \int_0^{\infty} \frac{t^4 e^{-t^2} dt}{v_y}, \quad t = \sqrt{\frac{mv^2}{2T}}, \quad (2.40)$$

причем частота столкновения электронов с атомами  $v_y = v(N_a \sigma_a^* + N_{\text{пр}} \sigma_{\text{пр}}^*)$ , где  $N_a$  — плотность атомов инертного газа,  $\sigma_a^*$ ,  $\sigma_{\text{пр}}^*$  — диффузионное сечение упругого рассеяния электрона на атоме инертного газа и щелочного металла соответственно. Таким образом, проводимость

$$\Sigma = AN_{\text{пр}}^{1/2} \int_0^{\infty} \frac{t^3 e^{-t^2} dt}{N_{\text{пр}} \sigma_{\text{пр}}^* + N_a \sigma_a^*},$$

где  $A$  — некоторая константа. Дифференцируя это выражение по  $N_{\text{пр}}$ , находим, что максимальная проводимость отвечает следующей плотности атомов присадки:

$$\int_0^{\infty} \frac{(N_{\text{пр}}\sigma_{\text{пр}}^* - N_a\sigma_a^*)}{(N_{\text{пр}}\sigma_{\text{пр}}^* + N_a\sigma_a^*)^2} t^3 e^{-t^2} dt = 0.$$

Как следует отсюда, плотность атомов присадки  $N_{\text{пр}} \sim N_a\sigma_a^*/\sigma_{\text{пр}}^*$ . Поскольку сечение упругого рассеяния электрона на атомах инертного газа  $\sigma_a^*$  меньше сечения упругого рассеяния на атомах щелочного металла  $\sigma_{\text{пр}}^*$  примерно на два порядка, то при оптимальных условиях процентное содержание щелочного металла мало.

**Задача 2.42.** Определить диэлектрическую проницаемость плазмы в  $\tau$ -приближении (задача 1.20).

Установим связь между диэлектрической проницаемостью и проводимостью плазмы. Проводимость плазмы  $\Sigma$  вводится как коэффициент пропорциональности в законе Ома между компонентой плотности электрического тока  $\mathbf{j}$  и напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{j}_{\alpha} = \Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \mathbf{E}_{\beta}.$$

При этом зависимость напряженности электрического поля (как и плотности электрического тока) от координаты и времени определяется гармонической зависимостью ( $\mathbf{E}_{\beta}$  не зависит от координаты и времени), индексы  $\alpha$  и  $\beta$  в приведенных величинах являются компонентами  $x, y, z$  для соответствующих векторов и тензора.

Будем считать по-прежнему, что электрические свойства плазмы определяются электронами, так что  $\mathbf{j} = -eN_e\boldsymbol{\omega}$ , где  $N_e$  — плотность электронов,  $\boldsymbol{\omega}$  — средняя скорость электронов. Отсюда

$$-eN_e\omega_{\alpha} = \Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_{\beta} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Представим теперь выражение для диэлектрической проницаемости,

$$D_{\alpha} \equiv E_{\alpha} + 4\pi P_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_{\beta} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}.$$

Здесь  $\mathbf{D}$  — вектор диэлектрической индукции плазмы,  $\mathbf{P}$  — поляризация единицы объема плазмы, которая представляет собой дипольный момент единицы объема плазмы, создаваемый под действием внешнего электрического поля. Учтем зависимость координаты отдельного электрона от времени, которая имеет вид  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'e^{-i\omega t}$ , где  $\mathbf{r}_0$  — не зависит от поля, а  $\mathbf{r}'$  определяется движением электрона во внешнем поле. Отсюда получаем для средней скорости электрона в электрическом поле

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -i\omega\mathbf{r}'e^{-i\omega t},$$

так что поляризация плазмы равна

$$P = -e \sum_k r'_k e^{-i\omega t} = -\frac{ieN_e}{\omega} \mathcal{W},$$

где сумма берется по электронам, находящимся в единице объема. Отсюда находим

$$-\frac{4\pi ieN_e \omega \alpha}{\omega} = (\epsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) E_\beta e^{i(kr - \omega t)},$$

$$\delta_{\alpha\beta} = 1, \text{ если } \alpha = \beta \text{ и } \delta_{\alpha\beta} = 0, \text{ если } \alpha \neq \beta.$$

Сравнивая полученные соотношения, находим связь между тензорами диэлектрической проницаемости и проводимости плазмы:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega} \Sigma_{\alpha\beta}. \quad (2.41)$$

Используем значения тензора проводимости для слабоионизованного газа, движущегося в переменном электрическом поле и постоянном магнитном поле, направленном вдоль оси  $z$ . Считая, что проводимость слабоионизованного газа определяется электронами, и используя результаты задачи 2.38, получим для тензора диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k=0) - \delta_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \frac{\omega_0^2 \tau (i - \omega \tau)}{[1 + (\omega_H^2 - \omega^2) \tau^2 + 2i\omega\tau] \omega} & \frac{i\omega_0^2 \omega_H \tau^2}{[1 + (\omega_H^2 - \omega^2) \tau^2 + 2i\omega\tau] \omega} & 0 \\ \frac{i\omega_0^2 \tau^2 \omega_H}{[1 + (\omega_H^2 - \omega^2) \tau^2 + 2i\omega\tau] \omega} & \frac{\omega_0^2 \tau (i - \omega \tau)}{[1 + (\omega_H^2 - \omega^2) \tau^2 + 2i\omega\tau] \omega} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i\omega_0^2 \tau}{\omega (1 - i\omega\tau)} \end{vmatrix}.$$

Здесь  $\omega_0 = (4\pi N_e e^2/m)^{1/2}$  — плазменная частота,  $\omega_H = eH/mc$  — ларморовская частота.

При отсутствии магнитного поля недиагональные элементы тензора диэлектрической проницаемости равны нулю, а диагональные элементы равны

$$\epsilon = 1 + \frac{\omega_0^2 \tau (i - \omega \tau)}{\omega (1 + \omega^2 \tau^2)}.$$

В частности, в пределе высоких частот электрического поля  $\omega\tau \gg 1$  имеем  $\epsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2$ . Диэлектрическая проницаемость не зависит от частоты соударений, ибо средняя скорость электрона определяется частотой поля.

В другом предельном случае малой частоты электрического поля  $\omega\tau \ll 1$  тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k=0) - \delta_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \frac{i\omega_0^2 \tau}{\omega (1 + \omega_H^2 \tau^2)} & \frac{i\omega_0^2 \omega_H \tau^2}{\omega (1 + \omega_H^2 \tau^2)} & 0 \\ \frac{i\omega_0^2 \omega_H \tau^2}{\omega (1 + \omega_H^2 \tau^2)} & \frac{i\omega_0^2 \tau}{\omega (1 + \omega_H^2 \tau^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i\omega_0^2 \tau}{\omega} \end{vmatrix},$$



**Задача 2.43.** Связать проводимость и диэлектрическую проницаемость плазмы в отсутствие внешних полей с невозмущенной функцией распределения электронов по скоростям, используя  $\tau$ -приближение.

Функция распределения электронов по скоростям в отсутствие внешних полей в  $\tau$ -приближении является решением кинетического уравнения Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = -\frac{f - f_0}{\tau}.$$

Будем считать, что мы внесли в плазму электрическое поле малой напряженности, зависящее от координаты и времени по закону  $E e^{i(kr - \omega t)}$ . Это вызовет появление тока в плазме, который пропорционален этой величине. Вычислив коэффициент пропорциональности между плотностью тока и напряженностью электрического поля, мы определим проводимость плазмы, отвечающую рассматриваемой частоте и волновому вектору.

Будем считать, как и ранее, что электрический ток в плазме определяется электронами. Зададим функцию распределения по скоростям в виде

$$f = f^{(0)} + \delta f e^{i(kr - \omega t)}.$$

Первый член этого разложения определяется решением ранее представленного кинетического уравнения. В следующем приближении для рассматриваемого кинетического уравнения учтем появление электрического поля. Это приближение имеет следующий вид:

$$-i\omega \delta f + i\mathbf{k}\mathbf{v} \delta f - \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{\delta f}{\tau}.$$

Решая это уравнение, получим

$$\delta f = \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} \left( i\omega - i\mathbf{k}\mathbf{v} - \frac{1}{\tau} \right)^{-1}.$$

Отсюда находим, что введение слабого электрического поля приводит к появлению электрического тока в плазме, плотность которого равна

$$\mathbf{j} = -eN_e \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} = \frac{N_e e^2}{im} \int \frac{\mathbf{v} \left( E \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} \right) e^{i(kr - \omega t)}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i/\tau} d\mathbf{v},$$

где  $N_e$  — плотность электронов, функция распределения нормирована на единицу ( $\int f^{(0)} d\mathbf{v} = 1$ ).

В результате получаем для тензора проводимости плазмы

$$\Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{N_e e^2}{im} \int \frac{v_\alpha \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_\beta} d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i/\tau}. \quad (2.42a)$$

Соответственно, для тензора диэлектрической проницаемости плазмы на основе соотношения (2.41) получим

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega_0^2}{\omega} \int \frac{v_\alpha \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_\beta} d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i/\tau}, \quad (2.426)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{4\pi N_e e^2/m}$  — плазменная частота.

В частности, в случае  $\mathbf{k} = 0$ , вычисляя интеграл по частям,  $\int v_\alpha \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_\beta} d\mathbf{v} = -\delta_{\alpha\beta}$ , имеем

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k} = 0) = \delta_{\alpha\beta} \left[ 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega + i/\tau)} \right],$$

что совпадает с ранее полученными результатами.

**Задача 2.44.** Вычислить скорость диссипации энергии от внешнего источника в слабоионизованном газе, находящемся в скрещенных переменном электрическом и постоянном магнитном полях.

Энергия, поглощаемая единицей объема слабоионизованного газа в единицу времени, равна  $\mathbf{j}\mathbf{E}$ , где  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока в газе, возникающая под действием внешнего электрического поля напряженностью  $\mathbf{E}$ . В постоянном электрическом поле согласно закону Ома  $\mathbf{j} = \Sigma_0 \mathbf{E}$ , где  $\Sigma_0$  — проводимость слабоионизованного газа в постоянном электрическом поле. Отсюда находим

$$\mathbf{j}\mathbf{E} = q_0 \equiv \Sigma_0 E^2,$$

где джоулево тепло  $q_0 \equiv \Sigma_0 E^2$  представляет собой энергию, поглощаемую единицей объема газа в единицу времени.

В случае переменного поля представим напряженность электрического поля в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathbf{E} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}^* e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}].$$

При таком способе записи мы учли, что  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  является действительной величиной, а множитель  $1/\sqrt{2}$  введен так, чтобы величина  $\mathbf{E}$  в данном выражении характеризовала среднюю плотность электрической энергии в плазме таким же образом, как и напряженность постоянного электрического поля.

На основе закона Ома в рассматриваемом случае для плотности электрического тока можно записать:

$$\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_\beta e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \Sigma_{\alpha\beta}(-\omega, -\mathbf{k}) E_\beta^* e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}].$$

При этом из условия действительности плотности электрического тока следует, что

$$\Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \Sigma_{\alpha\beta}^*(-\omega, -\mathbf{k}).$$

На основе полученных выражений для энергии, поглощаемой в единицу времени в единице объема, имеем

$$\overline{\mathbf{jE}} = \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_{\alpha}^* E_{\beta} + \frac{1}{2} \Sigma_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{k}) E_{\alpha} E_{\beta}^* = \frac{1}{2} (\Sigma_{\alpha\beta} + \Sigma_{\beta\alpha}^*) E_{\alpha}^* E_{\beta}.$$

Здесь черта сверху обозначает усреднение по времени, по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В рассматриваемом случае слабоионизованного газа, находящегося в скрещенных электрическом и магнитном полях, направив вектор напряженности электрического поля, как обычно, по оси  $x$ . Получим

$$\overline{\mathbf{jE}} = \frac{1}{2} (\Sigma_{xx} + \Sigma_{xx}^*) |E|^2.$$

Используя выражение для рассматриваемой компоненты тензора проводимости, найдем

$$\overline{\mathbf{jE}} = \frac{q_0}{2} \left[ \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega_H^2 - \omega^2)\tau^2 + 2i\omega\tau} + \frac{1 - i\omega\tau}{1 + (\omega_H^2 - \omega^2)\tau^2 - 2i\omega\tau} \right],$$

где  $q_0$  — выделяемое тепло в постоянном электрическом поле с той же плотностью энергии, что и данное переменное поле; остальные обозначения те же, что и раньше.

Рассмотрим предельные случаи. При отсутствии магнитного поля ( $\omega_H\tau \rightarrow 0$ )

$$\overline{\mathbf{jE}} = \frac{q_0}{1 + \omega^2\tau^2}.$$

В постоянном электрическом поле ( $\omega\tau \rightarrow 0$ )

$$\overline{\mathbf{jE}} = \frac{q_0}{1 + \omega_H^2\tau^2}.$$

Как видно, в обоих случаях получаем одинаковые зависимости от характерных параметров.

При наличии циклотронного резонанса поглощение в резонансе ( $\omega_H = \omega$ ) составляет

$$\overline{\mathbf{jE}} = q_0 \frac{1 + 2\omega^2\tau^2}{1 + 4\omega^2\tau^2}.$$

При  $\omega\tau \gg 1$  поглощение в резонансе лишь вдвое меньше, чем в постоянном поле. В широкой области частот при  $\omega\tau \gg 1$  имеем

$$\overline{\mathbf{jE}} = \frac{q_0}{2} \left[ 1 + \frac{(\omega_H^2 - \omega^2)^2 \tau^2}{4\omega^2} \right]^{-1}.$$

Как видно, ширина резонанса составляет  $\Delta\omega \sim 1/\tau \ll \omega$ . Вблизи резонанса  $|\omega - \omega_H| \ll \omega$  эта формула может быть представлена в виде

$$\overline{\mathbf{jE}} = \frac{q_0}{2 [1 + (\omega - \omega_H)^2 \tau^2]}.$$

**Задача 2.45.** Вычислить проводимость слабоионизованной плазмы, степень ионизации которой достаточно велика, так что проводимость определяется соударением электронов и ионов.

Согласно формуле (2.40) подвижность электронов в газе при малых напряженностях поля равна

$$K = \frac{8e}{3\sqrt{\pi m}} \int_0^{\infty} \frac{t^4 e^{-t^2} dt}{v_y},$$

где  $t = \sqrt{mv^2/2T}$ ,  $v_y$  — частота упругих столкновений электронов с рассеивающими частицами. Это не может быть соударение с электронами, ибо при межэлектронных столкновениях сохраняется полный импульс электронной компоненты. Поэтому в рассматриваемом случае в качестве частоты соударения следует взять эту величину для столкновений между электронами и ионами.

Частота соударений между электронами и ионами по определению равна

$$\nu = N_i v \sigma_{ei}^*,$$

где  $N_i$  — плотность ионов,  $v$  — скорость электронов,  $\sigma_{ei}^*$  — диффузионное сечение рассеяния электрона на ионе. Для этой величины используем диффузионное сечение столкновения двух электронов (2.38), изменив в нем значение приведенной массы сталкивающихся частиц. Это дает:

$$\sigma_{ei}^* = \frac{\pi e^4}{\varepsilon^2} \ln \Lambda,$$

где  $\varepsilon$  — энергия электрона.

Подставляя выражение для диффузионного сечения рассеяния электрона на ионе в формулу для подвижности и используя максвелловскую функцию распределения электронов по скоростям, находим

$$K = \frac{2(2T_e)^{3/2}}{N_e e^3 m^{1/2} \pi^{3/2} \ln \Lambda},$$

( $T_e$  — температура электронов). Отсюда имеем для проводимости квазинейтральной плазмы:

$$\Sigma = N_e e K = \frac{2(2T_e)^{3/2}}{e^2 m^{1/2} \pi^{3/2} \ln \Lambda}.$$

Полученные зависимости справедливы в том случае, когда частота столкновения электрона с ионом значительно превышает частоту соударения электрона с нейтральными частицами слабоионизованного газа. Сравнивая выражения для частот соударения, находим, что это справедливо при условии

$$\frac{N_e}{N} \gg \frac{\sigma_{en} T_e^2}{\pi e^4 \ln \Lambda},$$

где  $N$  — плотность нейтральных частиц слабоионизованного газа,  $\sigma_{en}^*$  — характерное значение диффузионного сечения рассеяния электронов на нейтральных частицах. Как видно, в силу большой величины кулоновского сечения рассеяния эффект рассеяния электронов на ионах становится существенным при малой степени ионизации газа  $N_e \ll N$ .

**Задача 2.46.** Имеем плазму высокой проводимости, в которой направленная скорость электронов значительно превышает направленную скорость ионов. Внутри плазмы под действием тока электронов и внешних условий возникают магнитные поля, которые влияют на свойства плазмы. Показать, что в пределе высокой проводимости плазмы магнитные силовые линии вморожены в плазму, т. е. совпадают с линиями тока электронов.

Для описания движения плазмы в рассматриваемой ситуации мы используем уравнение непрерывности для электронов, уравнение Эйлера, уравнение Пуассона и уравнения Максвелла. Полученная система уравнений в совокупности описывает движение электронов плазмы и поля в плазме. Она имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div} (N_e \boldsymbol{\omega}) &= 0, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{\omega} \nabla) \boldsymbol{\omega} + \frac{\nabla p}{MN} - \frac{\mathbf{F}}{M} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e (N_i - N_e), \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -\frac{4\pi}{c} e N_e \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  — скорость направленного движения электронов,  $N_e$ ,  $N_i$  — плотности электронов и ионов соответственно. Данная система уравнений носит название системы уравнений магнитной гидродинамики.

При рассматриваемых условиях, когда ионы можно считать неподвижными, в лабораторной системе координат возникает электрическое поле, действующее на электроны и равное  $\mathbf{E}' = -\frac{1}{c} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{H}]$ . Поскольку проводимость плазмы велика, то за счет этого поля в плазме возникает ток. Он будет течь до тех пор, пока перемещением электронов не будет создано электрическое поле напряженностью

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{H}],$$

которое в плазме высокой проводимости уравновесит поле движущихся электронов. Подставляя напряженность этого поля в

предпоследнее из уравнений магнитной гидродинамики, получим:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{H}].$$

Сравним характер изменения магнитного поля, которое описывается полученным уравнением, с характером движения электронов в плазме. Раскрывая операцию  $\text{rot} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{H}]$  с учетом последнего из уравнений Максвелла,  $\text{div} \mathbf{H} = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \text{rot} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{H}] - \boldsymbol{\omega} (\nabla \mathbf{H}) + (\mathbf{H} \nabla) \boldsymbol{\omega} - \mathbf{H} (\nabla \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \nabla) \mathbf{H} = \\ = (\mathbf{H} \nabla) \boldsymbol{\omega} - \mathbf{H} \text{div} \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \nabla) \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение  $\text{div} \boldsymbol{\omega}$ , найденное из уравнения непрерывности  $\left( \frac{\partial N_e}{\partial t} + N_e \text{div} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \nabla N_e = 0 \right)$ , получим

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H} \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \nabla) \mathbf{H} + \frac{\mathbf{H}}{N_e} \frac{\partial N_e}{\partial t} + \frac{\mathbf{H}}{N_e} (\boldsymbol{\omega} \nabla N_e).$$

Разделив уравнение на  $N_e$ , преобразуем его к виду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{H}}{N_e} \right) = \left( \frac{\mathbf{H}}{N_e} \nabla \right) \boldsymbol{\omega},$$

где полная производная представляет собой производную в точке, движущейся вместе с плазмой, и равна  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{\omega} \nabla)$ . Из полученного уравнения сделаем заключение относительно характера движения плазмы и изменения поля плазмы.

Выделим элементарный объем плазмы длиной  $d\mathbf{l}$  и площадью поперечного сечения  $ds$ , так что  $d\mathbf{l}$  направлено первоначально вдоль магнитного поля. Внутри данного объема находится  $N_e ds d\mathbf{l}$  электронов и его пронизывает магнитный поток, равный  $H ds$ . Наша задача определить, как этот поток меняется со временем.

Пусть на одном конце отрезка  $d\mathbf{l}$  скорость плазмы равна  $\boldsymbol{\omega}$ . Тогда на другом конце отрезка скорость равна  $\boldsymbol{\omega} + (d\mathbf{l} \nabla) \boldsymbol{\omega}$  и за время  $\delta t$  этот отрезок изменится на величину  $(d\mathbf{l} \nabla) \boldsymbol{\omega} \delta t$ . Поэтому уравнение, которому удовлетворяет длина рассматриваемого отрезка, имеет вид

$$\frac{d}{dt} (d\mathbf{l}) = (d\mathbf{l} \nabla) \boldsymbol{\omega}.$$

Это уравнение совпадает с уравнением для  $\mathbf{H}/N_e$ . Поскольку в начальный момент времени вектора  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{H}/N_e$  были одинаково направлены, то в процессе движения их направления совпадают. Кроме того, со временем сохраняется отношение этих величин

$$\frac{H}{N_e d\mathbf{l}} = \text{const}, \text{ т. е. } \frac{H ds}{N_e d\mathbf{l} ds} = \text{const}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что магнитный поток, пронизывающий элемент плазмы с заданным количеством электронов, не из-

меняется со временем. Таким образом, магнитные силовые линии «вморожены» в плазму, т. е. электроны плазмы с высокой проводимостью движутся вдоль магнитных силовых линий.

**Задача 2.47.** Прямой ток силой  $\mathcal{I}$  проходит через плазму. Определить величину радиуса плазменного шнура.

Считая, что направленная скорость электронов  $\omega$  много больше скорости ионов, находим, что на каждый электрон плазмы действует сила

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} = \frac{e}{c} [\boldsymbol{\omega}\mathbf{H}].$$

Будем считать, что внутри плазмы дрейфовая скорость электронов  $\omega$  постоянна и направлена вдоль оси  $z$ . Тогда уравнение Эйлера принимает вид

$$\nabla p_e - \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{H}] = 0,$$

где  $\mathbf{j} = -eN_e\boldsymbol{\omega}$  — плотность тока электронов,  $p_e$  — давление в плазме. Подставляя плотность тока из уравнения Максвелла

$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H}$ , получим

$$\nabla p_e - \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] = 0.$$

Или, так как  $[\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] = (\mathbf{H}\nabla) \mathbf{H} - \frac{1}{2} \nabla H^2$ , имеем

$$\nabla \left( p_e + \frac{H^2}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}\nabla) \mathbf{H} = 0.$$

Величина  $H^2/8\pi$  носит название магнитного давления и может быть рассмотрена как давление, создаваемое магнитным полем. Полученное уравнение связывает распределение плазмы и магнитного поля в пространстве.

При прохождении прямого тока большой силы через газ будем считать, что ток создает плазменный столб, давление в котором определяется электронами плазмы. Этот столб имеет форму цилиндра. Преобразуем полученное уравнение. Пусть  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля, т. е.  $\mathbf{H} = nH$ . Тогда

$$(\mathbf{H}\nabla) \mathbf{H} = H^2 (n\nabla) \mathbf{n} + nH (n\nabla) H = \frac{H^2}{R} \mathbf{n} + \nabla_{\parallel} \frac{H^2}{2},$$

где  $R$  — радиус кривизны магнитной силовой линии, равный бесконечности в рассматриваемом случае поля прямого тока, а оператор  $\nabla_{\parallel}$  соответствует дифференцированию в направлении магнитного поля. Учитывая это, получим

$$\nabla_{\perp} \left( p_e + \frac{H^2}{8\pi} \right) = 0,$$

здесь  $\nabla_{\perp}$  соответствует дифференцированию в направлении, перпендикулярном к магнитному полю. Отсюда следует, что во всем

пространстве полное давление, состоящее из давления плазмы  $p_e$  и давления магнитного поля, постоянно, т. е.

$$p_e + \frac{H^2}{8\pi} = \text{const.}$$

Считая, что плазма имеет форму цилиндрического столба, напишем это условие на границе плазмы. Будем считать, что магнитное поле не проникает внутрь столба. Это имеет место, если ток в основном сосредоточен на границе столба. Тогда на границе плазмы внутри нее давление равно  $p_e$ , а вне плазмы полное давление составляет  $H^2/8\pi$ .

Пусть радиус столба равен  $r_0$ , так что напряженность магнитного поля, создаваемая током  $\mathcal{J}$  на границе столба, равна  $H = 2\mathcal{J}/cr_0$ . Приравнявая выражения для давления вне и внутри плазмы, имеем

$$p_e = \frac{\mathcal{J}^2}{2\pi c^2 r_0^2},$$

откуда

$$r_0 = \frac{\mathcal{J}}{c} \sqrt{\frac{1}{2\pi p_e}}.$$

**Задача 2.48.** Слабоионизованная плазма, содержащая ионы двух изотопов массой  $m_1$  и  $m_2$ , создается в газе, который находится в цилиндрической трубке с радиальным электрическим полем напряженностью  $E$  и продольным магнитным полем  $H$  (установка типа «Гомополяр»). В пределе высокой напряженности магнитного и электрического поля определить разность токов для ионов разных изотопов в радиальном направлении.

Уравнение движения для ионов первого изотопа имеет вид

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{w}_1}{dt} = eE + \frac{e}{c} [\boldsymbol{w}_1 H] - \mu_1 \boldsymbol{w}_1 \nu + \frac{m_1 \boldsymbol{w}_1 \tau \rho}{\rho^2}.$$

Здесь  $\boldsymbol{w}_1$  — средняя скорость ионов первого изотопа, первые два слагаемые представляют собой силу, действующую на ион со стороны электрического и магнитного поля соответственно; третье слагаемое — сила трения из-за столкновения ионов с частицами газа,  $\mu$  — приведенная масса иона и частицы газа. Если приведенные массы иона и частицы газа для двух изотопов ионов близки ( $\mu_1 \approx \mu_2 = \mu$ ), то мало отличаются и частоты столкновений  $\nu$  для иона каждого из изотопов с частицами газа. В дальнейшем мы будем считать это условие выполненным, т. е. частота столкновения иона с частицами газа  $\nu$  одинакова для обоих изотопов. Последнее слагаемое в данном уравнении представляет собой центробежную силу, так что  $\boldsymbol{w}_\tau$  — касательная компонента скорости,  $\rho$  — радиус-вектор, проведенный от оси цилиндра в перпендикулярном к ней направлении.



Уравнение движения для ионов второго изотопа имеет такой же вид с точностью до замены индексов у скорости и массы иона. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только уравнения для иона первого изотопа, а полученный результат используем и для второго изотопа. В связи с этим для простоты записи индекс у скорости иона, характеризующий номер изотопа, будем опускать.

Представленное уравнение следует решить в пределе больших полей, когда частота ларморовской прецессии для иона  $\omega_H = eH/mc$  значительно превышает частоту столкновений иона с частицами газа  $\nu$ ,

$$\omega_H \gg \nu,$$

и радиус Лармора для иона много меньше характерных размеров системы,

$$\omega/\omega_H \ll \rho.$$

Учитывая последнее соотношение, мы пренебрегаем зависимостью входящих в уравнение параметров от расстояния  $\rho$  до оси и не включаем в уравнение действующие на ион малые силы, не зависящие от его массы (например, силу, возникающую из-за неоднородного распределения плотности ионов по радиусу).

Учитывая представленные соотношения, разложим скорость иона по степеням  $1/H$ , представив ее в виде  $w = w^{(0)} + w^{(1)} + \dots$ . В нулевом приближении уравнение принимает вид

$$eE + \frac{e}{c} w_{\tau}^{(0)} H = 0,$$

и его решение  $w_{\tau}^{(0)} = -c \frac{E}{H}$ . В первом приближении это уравнение в компонентах запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e}{c} w_{\tau}^{(1)} H - \mu \nu w_{\rho}^{(1)} + \frac{m_1 (w_{\tau}^{(0)})^2}{\rho} &= 0, \\ -\frac{e}{c} w_{\rho}^{(1)} - \mu \nu w_{\tau}^{(1)} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где  $w_{\rho}^{(1)}$  — компонента скорости вдоль вектора  $\rho$ . Решая эту систему уравнений с учетом, что  $eH/\mu c \gg \nu$ , получим

$$w_{\rho}^{(1)} = \frac{\mu \nu c^2}{e^2 H^2} \frac{m_1 (w_{\tau}^{(0)})^2}{\rho} = m_1 \frac{\mu \nu c^4 E^2}{e^2 H^4 \rho}.$$

Подобное выражение получим для средней скорости ионов второго изотопа в направлении радиуса трубки:

$$w_{\rho}^{(2)} = m_2 \frac{\mu \nu c^4 E^2}{e^2 H^4 \rho}.$$

При таком движении ионов происходит некоторое разделение изотопов, так что ионы более легкого изотопа распределяются ближе к центру, чем более тяжелого.

## ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

Дальнодействующее кулоновское взаимодействие заряженных частиц в плазме влияет не только на ее статические характеристики, но и отражается на волновых свойствах плазмы. Сами колебательные движения плазмы, зависящие от характера внешних полей и распределения плазмы в пространстве, а также распределения заряженных частиц по скоростям, весьма многообразны. Колебания в плазме играют более заметную роль, чем роль акустических колебаний в процессах, протекающих в газе. Это обусловлено дальнодействующим взаимодействием заряженных частиц в плазме; и по этой причине многие процессы поглощения и переработки вводимой в плазму энергии, а также процессы установления равновесия, протекают через возбуждение волн в плазме. В результате в плазме развивается широкий спектр колебаний, в которых может быть сосредоточена значительная энергия и которые могут влиять как на процессы установления равновесия, так и на усредненные характеристики плазмы. Поэтому волны в плазме играют особо важную роль.

### § 1. Малые колебания в плазме

Малые колебания в плазме отвечают случаю малой интенсивности волн, когда волновые движения не влияют на равновесные свойства плазмы. Тогда волны в плазме могут быть рассмотрены как возмущения, накладываемые на равновесные свойства плазмы, и при определении равновесных характеристик в плазме наличием волн можно пренебречь. По этой же причине взаимодействием волн с разной длиной волны также можно пренебречь. В соответствии с этим каждая характеристика плазмы при исследовании волн может быть представлена в виде

$$A = A_0 + A_1 e^{i(kr - \omega t)},$$

где  $A_0$  — данная величина в отсутствие колебаний,  $A_1$  — амплитуда колебаний,  $k$  — волновой вектор рассматриваемой волны, связанный с длиной волны соотношением  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\omega$  — частота волны. В этом приближении наша задача состоит в установлении соотношения между частотой колебаний  $\omega$  и волновым вектором  $k$ . Такое соотношение носит название дисперсионного соотношения. Сам подход, в котором пренебрегается влиянием колебаний на свойства плазмы и взаимодействием между отдельными волнами, называется линейной теорией колебаний.

**Задача 3.1.** Получить дисперсионное соотношение для звука, распространяющегося в неподвижном газе.

Воспользуемся для этой цели уравнением непрерывности (1.16) и уравнением Эйлера (1.18):

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} N v_{0k} = 0, \quad \frac{\partial v_{0k}}{\partial t} + \frac{1}{MN} \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_j} = 0. \quad (3.1)$$

Здесь  $v_0$  — скорость направленного движения газа,  $N$  — плотность газа,  $M$  — масса отдельной частицы газа,  $P_{jk}$  — тензор давлений, который, согласно формуле (1.17) для неподвижного газа, находящегося в термодинамическом равновесии, равен  $P_{jk} = MN \langle v_j v_k \rangle = p \delta_{jk}$ , где  $p$  — давление газа.

Учитывая малость амплитуды колебаний, представим параметры неподвижного газа в виде

$$N = N_0 + N' e^{i(kr - \omega t)}, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' e^{i(kr - \omega t)}, \quad p = p_0 + p' e^{i(kr - \omega t)}.$$

Здесь  $N_0$ ,  $p_0$  — плотность и давление газа в отсутствие колебаний, величины  $N'$ ,  $p'$  и  $\mathbf{v}'$  отвечают отклонению от равновесия. Подставляя эти соотношения в уравнения (3.1), получим следующую систему уравнений:

$$-i\omega N' + ikN_0 \mathbf{v}' = 0, \quad -i\omega \mathbf{v}' + \frac{1}{MN_0} ikp' = 0.$$

Отсюда получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \frac{k^2 p'}{M N'}.$$

Связь между величинами  $p'$  и  $N'$  найдем из закона адиабатического изменения параметров газа в процессе распространения звука  $pN^{-\gamma} = \text{const}$ , где  $\gamma = c_p/c_v$  и  $c_p$ ,  $c_v$  — теплоемкость газа при постоянном давлении и объеме, соответственно. Это дает  $p'/p_0 = \gamma N'/N_0$ . Далее, воспользовавшись уравнением состояния идеального газа  $p_0 = N_0 T$  ( $T$  — температура газа), приводим дисперсионное соотношение к виду

$$\omega = k \sqrt{\gamma T / M}. \quad (3.2)$$

Как видно, скорость звука в газе  $\sqrt{\gamma T / M}$  оказывается порядка тепловой скорости частиц.

**Задача 3.2.** Определить частоту колебаний электронной компоненты квазинейтральной плазмы в случае бесконечной длины волны.

Наряду с рассмотренными в предыдущих задачах типами волн, которые распространяются в различных средах, в плазме возникают специфические колебания. Один из таких типов колебаний, который связан с движением электронов, мы рассмотрим в данной задаче. Физика этого типа колебаний состоит в следующем. Если сместить все электроны в некоторой области

пространства, то в плазме возникают электрические поля, которые возвращают электроны к их равновесному распределению. Колебания электронов под действием этих полей и приводят к появлению плазменных колебаний. В отличие от электромагнитных волн, плазменные колебания, как и звук, относятся к продольным волнам, ибо направление, в котором происходят колебания напряженности электрического поля, совпадают с направлением распространения волны.

Данное условие задачи соответствует тому, что, начиная с некоторой плоскости  $x=0$ , мы сдвинули все электроны плазмы бесконечных размеров влево на расстояние  $\Delta x$ . Тогда вблизи плоскости  $x=0$  образовался положительно заряженный слой плазмы шириной  $\Delta x$ , а на бесконечности—слой отрицательно заряженной плазмы той же толщины. Под действием этих слоев в плазме возникает электрическое поле, которое влияет на заряженные частицы и стремится их сдвинуть так, чтобы ликвидировать слои с избыточным зарядом, т. е. возникают колебания плазмы. Мы рассмотрим тот тип колебаний, который определяется движением электронной компоненты, а ионы не успевают за электронами и поэтому не участвуют в рассматриваемом типе колебаний.

При нахождении частоты колебаний мы воспользуемся системой координат, в которой плазма, находящаяся слева от границы раздела ( $x < 0$ ), покоится. Уравнение движения для электронов, находящихся справа от границы раздела, имеет вид

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + \Delta x) \equiv m \Delta \ddot{x} = -eE,$$

где  $x$ —координата электрона,  $e$ ,  $m$ —его заряд и масса,  $E$ —напряженность электрического поля, возникающего под действием слоев с избыточным зарядом. Добавим сюда уравнение Пуассона

$$\operatorname{div} E \equiv \frac{dE}{dx} = \begin{cases} 4\pi N_0 e, & 0 \leq x \leq \Delta x, \\ 0, & \Delta x < x, \end{cases}$$

здесь  $N_0$ —равновесная плотность заряженных частиц в плазме. Поскольку в рассматриваемой системе координат при  $x < 0$  направленное движение отсутствует, то при  $x < 0$  имеем  $E=0$ . На основе этого, решая уравнение Пуассона, получим  $E = 4\pi N_0 e \Delta x$ ,  $x > \Delta x$ , так что уравнение движения для электронов, находящихся справа от поверхности раздела, принимает вид

$$\Delta \ddot{x} + \frac{4\pi N_0 e^2}{m} \Delta x = 0. \quad ;$$

Это уравнение характеризует колебательное движение электронной компоненты относительно границы раздела с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi N_0 e^2}{m}}. \quad (3.3)$$

Рассмотренный тип колебаний носит название плазменных или ленгмюровских колебаний.

**Задача 3.3.** Получить дисперсионное соотношение для плазменных волн, которые отвечают движению электронной компоненты в плазме. Столкновением электронов с частицами плазмы пренебречь.

Составим функцию распределения электронов в плазме из двух частей:  $f = f_0(v) + f'(v)$ . Первое слагаемое соответствует функции распределения в отсутствие плазменных колебаний, второе слагаемое определяется наличием плазменных колебаний и мало по сравнению с первым. Учитывая малость колебаний, получим из кинетического уравнения (1.5) следующее уравнение для функции распределения  $f'$ , отвечающей колебаниям:

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f' - \frac{eE'}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0. \quad (3.4)$$

К этому уравнению добавим уравнение Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{E}' = -4\pi eN \int f' d\mathbf{v}. \quad (3.5)$$

Здесь функция распределения нормирована на единицу:  $\int f d\mathbf{v} = 1$ .

При написании уравнений (3.4) и (3.5) мы считали, что внешние поля отсутствуют. Представим зависимость  $f'$ ,  $\mathbf{E}'$  от времени и координаты в виде плоской волны  $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$ . Учтем продольность волны (векторы  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{k}$  имеют одинаковое направление). Исключая величины  $f'$  и  $\mathbf{E}'$  из системы уравнений (3.4), (3.5), получим следующее дисперсионное соотношение для плазменных волн:

$$\frac{\omega_0^2}{k^2} \int \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \frac{dv}{v_x - \omega/k} = 1. \quad (3.6)$$

Будем считать, что переменные в кинетическом уравнении для функции распределения электронов по скоростям в отсутствие поля разделяются, так что она может быть представлена в виде  $f(\mathbf{v}) = f(v_x) \phi(v_\rho)$ . Тогда дисперсионное соотношение (3.6) принимает вид

$$\frac{\omega_0^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \frac{dv_x}{v_x - \omega/k} = 1.$$

Подынтегральная функция имеет полюс при  $v_x = \omega/k$ . Обход этого полюса дает возможность определить мнимую часть

интеграла:

$$\frac{\omega_0^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} dv_x + i\pi \frac{\omega_0}{k^2} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \Big|_{v_x=\omega/k} = 1,$$

причем первый интеграл берется в смысле главного значения. Разлагая подынтегральное выражение для малых значений волновых векторов, получим

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_0^2}{kv_x} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} dv_x \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{v_x k}{\omega} \right)^n + i\pi \frac{\omega_0^2}{k^2} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \Big|_{v_x=\omega/k} = 1.$$

Ограничившись первыми членами разложения, имеем

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \langle v_x^2 \rangle \right) + i\pi \frac{\omega_0^2}{k^2} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \Big|_{v_x=\omega/k} = 1.$$

Или, учитывая, что данное рассмотрение приемлемо при  $k^2 \langle v_x^2 \rangle \ll \omega^2$ , найдем

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 3k^2 \langle v_x^2 \rangle + i\pi \frac{\omega_0^4}{k^2} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \Big|_{v_x=\omega/k}. \quad (3.7)$$

**Задача 3.4.** Выяснить, при каком условии в звуковой волне, распространяющейся в газе, выполняются адиабатические условия.

Это имеет место в случае, если за время прохождения звуковой волной не успевают произойти обмен энергией между областями сжатия и разрежения газа. При этом согласно адиабатическим условиям области сжатия и области разрежения газа будут обладать разной температурой. Оценим, какое время  $\tau_{\text{равн}}$  необходимо для выравнивания этих температур, и сравним его с характерным временем, за которое сжатие газа в данной точке пространства сменяется разрежением. Последняя величина порядка  $1/\omega$ , где  $\omega$  — частота волны. Как видно, условия данной задачи выполняются при выполнении соотношения  $\omega \tau_{\text{равн}} \gg 1$ .

Уравнение распространения тепла имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (c_p T) = \nabla (\kappa \nabla T),$$

где  $T$  — температура газа,  $\kappa$  — его теплопроводность,  $c_p$  — теплоемкость единицы объема газа при постоянном давлении. Как следует из этого уравнения, характерное время, за которое тепло передается на расстояние порядка  $r$ , оказывается порядка  $r^2 c_p / \kappa$ . При этом теплоемкость единицы объема газа порядка плотности частиц  $N$ , характерное расстояние, которое мы должны использовать при оценке времени выравнивания, порядка длины звуковой волны  $1/k$  ( $k$  — волновой вектор волны). Таким образом, условие

адиабатичности звуковой волны имеет вид:

$$\tau_{\text{равн}} \sim N/k^2\kappa, \quad \omega\tau_{\text{равн}} \sim N\omega/k^2\kappa \gg 1.$$

Теплопроводность газа  $\kappa$  порядка  $v_T/\sigma$  (см. задачу 1.20), где  $\sigma$  — характерное сечение столкновения частиц газа,  $v_T \sim \sqrt{T/M}$  — тепловая скорость частиц газа ( $T$  — температура газа,  $M$  — масса частиц газа). Вводя длину пробега частиц газа  $\lambda \sim 1/N\sigma$  и используя дисперсионное соотношение между частотой звуковой волны и ее волновым вектором  $\omega \sim v_T k$ , запишем условие адиабатичности звуковой волны в виде:

$$\lambda k \ll 1.$$

Мы получили, что адиабатические условия в звуковой волне выполняются, если длина звуковой волны много больше длины свободного пробега частиц газа.

**Задача 3.5.** Выяснить условие адиабатичности плазменных волн, распространяющихся в слабоионизованном газе. Считать при этом, что температура электронов не совпадает с температурой газа и обмен энергией между электронами происходит быстрее, чем между электронами и атомами.

Критерий применимости адиабатических условий в волне был получен в предыдущей задаче и имеет вид

$$\frac{\kappa k^2}{c_p \omega} \ll 1.$$

Используем оценку теплоемкости единицы объема электронного газа  $c_p \sim N_e$ , и оценку для теплопроводности, обусловленной электронами,  $\kappa \sim N_e v_e / N \sigma_{ea} \sim N_e v_e \lambda$ , где  $N_e$  — плотность электронов,  $v_e$  — их характерная скорость,  $N$  — плотность частиц газа,  $\lambda \sim 1/N \sigma_{ea}$  — длина пробега электронов в газе,  $\sigma_{ea}$  — характерное сечение соударения электронов с атомами. На основе этих оценок получим:

$$\frac{v_e \lambda k^2}{\omega} \ll 1.$$

Введем радиус Дебая — Гюккеля  $r_D \sim v_e / \omega_0$  ( $\omega_0$  — плазменная частота, которая порядка частоты  $\omega$  рассматриваемых плазменных колебаний). Получим следующий критерий адиабатичности плазменных колебаний:

$$\lambda r_D k^2 \ll 1.$$

Заметим, что плазменные колебания распространяются в газе, если их плазменная частота  $\omega_0$  значительно превышает частоту упругого соударения электронов с частицами газа:  $\omega_0 \gg N v_e \sigma_{ea} \sim v_e / \lambda$ . Этот критерий можно записать в виде:

$$\lambda \gg r_D.$$

Отсюда следует, что во всяком случае, если даже длина волны плазменных колебаний превышает или сравнима с длиной пробега электронов в газе ( $\lambda k \lesssim 1$ ), то для плазменных колебаний, распространяющихся в слабоионизованном газе, выполняются адиабатические условия.

**Задача 3.6.** Получить дисперсионное соотношение для второй ветви колебаний плазмы, возникающих при отсутствии внешних полей,—ионного звука.

Ионный звук представляет собой колебания, связанные с движением тяжелой компоненты плазмы—ионов. Перемещение ионов создает электрическое поле, в котором и происходит колебание ионной компоненты. При этом электроны, как более легкая компонента, успевают быстро перераспределяться, т. е. их пространственное распределение определяется законом Больцмана:

$$N_e = N_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right) = N_0 \left(1 + \frac{e\varphi}{T_e}\right).$$

Здесь  $N_e$ —плотность электронов,  $T_e$ —температура электронной компоненты,  $N_0$ —средняя плотность заряженных частиц в плазме,  $\varphi$ —потенциал электрического поля, обусловленный колебаниями плазмы. Малость колебаний позволила нам произвести разложение в показателе экспоненты.

Далее мы представим параметры ионной компоненты плазмы с учетом малых колебаний в следующем виде:

$$N_i = N_0 + N'_i e^{i(kx - \omega t)}, \quad \omega_i = \omega'_i e^{i(kx - \omega t)}, \quad \varphi = \varphi' e^{i(kx - \omega t)}.$$

Здесь  $N_i$ —плотность ионов,  $\omega_i$ —средняя скорость ионов,  $\varphi$ —потенциал электрического поля. Величины  $N'_i$ ,  $\omega'_i$ ,  $\varphi'$  представляют собой амплитуды колебаний для соответствующих величин, которые связаны с колебаниями ионной компоненты. Используя уравнения, связывающие параметры ионной компоненты, мы далее получим дисперсионное соотношение между частотой  $\omega$  и волновым вектором  $k$  рассматриваемых колебаний.

Подставим введенные соотношения для параметров плазмы в уравнение непрерывности для ионов, которое имеет вид

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(N_i \omega_i) = 0.$$

Получим следующее соотношение между амплитудой колебаний для параметров ионной компоненты:

$$\omega N'_i = k N_0 \omega'_i. \quad (3.8a)$$

Далее используем уравнение движения для ионной компоненты:

$$M \frac{d\omega_i}{dt} = eE = -e\nabla\varphi \quad (M—масса иона). \text{ Получим}$$

$$M\omega\omega' = ek\varphi'. \quad (3.8b)$$



Уравнение Пуассона имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \equiv -\Delta\varphi = 4\pi e (N_i - N_e).$$

Подставляя в него представленные ранее соотношения для плотности электронов и ионов, получим с учетом пространственного распределения электрического потенциала и распределения Больцмана для плотности электронов:

$$k^2\varphi' = 4\pi e N_i' - \frac{4\pi e^2 N_0}{T_e} \varphi'. \quad (3.8\text{в})$$

Исключая из найденной системы уравнений амплитуды колебаний для плотности и средней скорости ионов, а также потенциала электрического поля, приходим к следующему дисперсионному соотношению:

$$\omega^2 = \frac{k^2 T_e / M}{1 + k^2 r_D^2}. \quad (3.9)$$

Здесь  $r_D = \sqrt{T_e / 4\pi N_e e^2}$  — радиус Дебая — Гюккеля, причем мы считаем, что температура электронов значительно превышает температуру ионов. Рассматриваемый тип колебания, связанный с движением ионной компоненты, носит название ионного звука.

В случае, если длина волны для ионного звука велика по сравнению с радиусом Дебая — Гюккеля, то полученное дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega = \sqrt{T_e / M} k \quad (3.10)$$

и по своей форме совпадает с дисперсионным соотношением для обычного звука. Эту аналогию нетрудно продолжить, ибо взаимодействие заряженных частиц в плазме экранируется на расстоянии порядка радиуса Дебая — Гюккеля, и на характерных расстояниях порядка длины волны оказывается короткодействующим, как и в газе. При этом электронная компонента влияет на характер распределения полей и поэтому скорость распространения ионного звука определяется температурой электронов.

В другом предельном случае, когда длина волны колебаний ионной компоненты значительно превышает радиус Дебая — Гюккеля, колебание определяется дальнедействующим кулоновским взаимодействием ионов. При этом дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^2 = \frac{4\pi N_0 e^2}{M},$$

т. е. вид, подобный соотношению для плазменных колебаний, но отвечающей движению более тяжелой компоненты.

**Задача 3.7.** Получить дисперсионное соотношение для ионного звука, исходя из кинетического уравнения для электронов и ионов плазмы. Считать, что функция распределения электронов и ионов по скоростям максвелловская, и что температура электронов  $T_e$  значительно превышает температуру ионов  $T_i$ , а длина волны колебаний значительно больше радиуса Дебая—Гюккеля плазмы.

Поскольку ионный звук представляет собой колебания ионной компоненты плазмы, то для его исследования наряду с движением электронов необходимо учесть движение ионов.

Из кинетического уравнения для электронов и ионов и уравнения Пуассона получим вместо уравнений (3.4) и (3.5), учитывая гармоническую зависимость рассматриваемых характеристик плазмы от координаты и времени, следующие уравнения:

$$-i(\omega - kv_e) f'_e = \frac{eE'}{m} \frac{\partial f_e}{\partial v_e}, \quad -i(\omega - kv_i) f'_i = -\frac{eE'}{M} \frac{\partial f_i}{\partial v_i},$$

$$ikE' = 4\pi Ne \left( \int f'_i dv_i - \int f'_e dv_e \right).$$

Здесь  $f'_e, f'_i$  — часть функции распределения ионов и электронов, связанная с колебаниями плазмы,  $E'$  — отвечающая колебаниям напряженность поля,  $\omega, k$  — частота и волновой вектор колебаний,  $f_e, f_i$  — максвелловская функция распределения электронов и ионов,  $v_e, v_i$  — проекция скорости электронов и ионов на направление распространения волны,  $m, M$  — масса электрона и иона. Так как

$$\frac{\partial f_e}{\partial v_e} = -\frac{mv_e}{T_e} f_e, \quad \frac{\partial f_i}{\partial v_i} = -\frac{Mv_i}{T_i} f_i,$$

то дисперсионное соотношение для обеих ветвей колебаний принимает вид

$$1 = \frac{\omega_0^2}{k^2} \left( \frac{m}{T_i} \int \frac{v_i f_i dv_i}{\omega/k - v_i} + \frac{m}{T_e} \int \frac{v_e f_e dv_e}{\omega/k - v_e} \right). \quad (3.11)$$

Это дисперсионное соотношение может быть использовано для исследования плазменных колебаний и ионного звука. При рассмотрении низкочастотной ветви колебаний (ионного звука) будем считать  $kv_i \ll \omega \ll kv_e$ . Разлагая с учетом этих соотношений знаменатель в подынтегральном выражении, получим

$$1 = -\frac{\omega_0^2}{k^2} \frac{m}{T_e} - i\pi \frac{\omega_0^2}{k^2} \frac{m}{T_e} (v_e f_e) \Big|_{v_e = \omega/k} - i\pi \frac{\omega_0^2}{k^2} \frac{m}{T_i} (v_i f_i) \Big|_{v_i = \omega/k} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{m}{M}.$$

Так как  $kv_e \ll \omega$ , то

$$\omega^2 = k^2 \frac{T_e}{M} - i\pi \frac{\omega^3}{k} \sqrt{\frac{m}{2\pi T_e}} - i\pi \frac{\omega^3}{k} \sqrt{\frac{M}{2\pi T_i}} \exp\left(-\frac{M\omega^2}{2k^2 T_i}\right). \quad (3.12)$$

Определим отношение коэффициента затухания  $\delta$  в частоте  $\omega$ , считая  $\delta \ll \omega$  и  $T_i \ll T_e$ . Имеем:

$$\delta = \frac{\pi\omega^2}{2k} \sqrt{\frac{m}{2\pi T_e}} + \frac{\pi\omega^2}{2k} \sqrt{\frac{M}{2\pi T_i}} \exp\left(-\frac{M\omega^2}{2k^2 T_i}\right). \quad (3.12a)$$

Отсюда ( $\omega = k\sqrt{T_e/M}$ ) получим  $\frac{\delta}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi m}{8M}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi T_e}{T_i}} \exp\left(-\frac{T_e}{2T_i}\right)$ . Из этого выражения следует, что коэффициент затухания ионного звука  $\delta$  мал по сравнению с частотой ионного звука только в случае, если температура электронов значительно превышает температуру ионов. Поэтому ионный звук способен распространяться в плазме лишь при больших электронных температурах по сравнению с ионными температурами.

Таким образом, в плазме в отсутствие внешних полей появляется два типа колебаний плазмы (рис. 3.1). Первая, высокочастотная ветвь носит название плазменных колебаний и обусловлена движением электронной компоненты плазмы. Вторая, низкочастотная ветвь, связана с движением ионной компоненты плазмы в самосогласованном поле электронов. Электроны, обладая большими скоростями, адиабатически приспосабливаются к перемещениям ионов и поэтому влияют на их движение. По этой причине частота ионного звука зависит от параметров электронной компоненты плазмы.

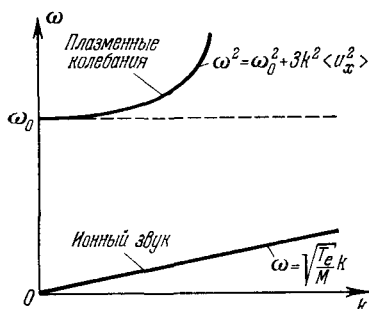


Рис. 3.1. Колебания в плазме в отсутствие внешних полей.

**Задача 3.8.** Получить из дисперсионного соотношения (3.11) дебаевское экранирование поля в плазме.

Экранирование постоянного электрического поля, проникающего внутрь плазмы, определяется влиянием электронов и ионов, так что для определения его величины следует воспользоваться дисперсионным соотношением, учитывающим движение и электронной, и ионной компонент плазмы. Для этой цели мы используем соотношение (3.11), которое получено без предположений о малости волнового вектора. Зависимость поля в волне от времени и координаты имеет вид  $E = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$ , а при  $\omega = 0$  это выражение переходит  $E = E_0 e^{-\alpha x}$ ,  $k = i\alpha$ . Считая функцию распределения электронов и ионов по скоростям максвелловской, получим из дисперсионного соотношения (3.11) при  $\omega = 0$ :

$$k^2 = -m\omega_0^2 \left( \frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i} \right) = -r_D^{-2},$$

где радиус Дебая—Гюккеля определяется формулой (2.7). Отсюда  $k = i/r_D$  и  $E = E_0 \exp(-x/r_D)$ .

**Задача 3.9.** Получить дисперсионное соотношение для электромагнитной волны, распространяющейся в плазме.

Воспользуемся уравнениями Максвелла, связывающими напряженности электрического  $E$  и магнитного  $H$  полей в электромагнитной волне:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} H &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{j}$ —ток частиц в плазме. Исключая из этих уравнений напряженность магнитного поля  $H$ , приведем их к виду

$$\Delta E - \nabla \operatorname{div} E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi \mathbf{j}}{c^2}. \quad (3.13)$$

Амплитуда электромагнитной волны мала, и волна не изменяет характеристики плазмы. Поэтому напряженность электрического поля можно представить в виде двух частей  $E_0 + E'$ , так что первое слагаемое соответствует полю в отсутствие электромагнитных волн, а второе определяется наличием электромагнитной волны. Уравнение Максвелла (3.13) разбивается на два независимых уравнения, причем уравнение для напряженности поля электромагнитной волны удовлетворяет уравнению (3.13), если входящий в это уравнение ток обусловлен электромагнитной волной. Если пренебречь скоростью ионов по сравнению со скоростью электронов, то ток равен

$$\mathbf{j} = -N_e e \mathbf{v}'_e,$$

где  $N_e$ —плотность электронов,  $\mathbf{v}'_e$ —часть скорости электронов, обусловленная электромагнитной волной. Эту скорость можно определить из уравнения движения электрона  $m d\mathbf{v}'_e/dt = -eE'$ , и с учетом этого уравнения для напряженности электромагнитного поля (3.13) принимает вид

$$\Delta E' - \operatorname{grad} \operatorname{div} E' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E'}{\partial t^2} + \frac{4\pi N_e e^2}{mc^2} E'.$$

Для плоской волны  $E' = E'_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ . Подставляя выражение в ранее полученное уравнение, получим дисперсионное соотношение, связывающее частоту электромагнитной волны  $\omega$  и величину волнового вектора  $\mathbf{k}$ . При этом учитываем поперечность электромагнитной волны  $\mathbf{k}E = 0$ , что дает

$$\omega^2 = \omega_0^2 + k^2 c^2, \quad (3.14)$$

где

$$\omega_0 = (4\pi N_e e^2/m)^{1/2} \quad (3.15)$$

— плазменная частота. Из дисперсионного соотношения (3.14) следует, что в плазме могут распространяться электромагнитные волны, частота которых больше плазменных частот. При малой плотности заряженных частиц в плазме дисперсионное соотношение (3.14) совпадает с дисперсионным соотношением для электромагнитной волны в вакууме  $\omega = kc$ .

**Задача 3.10.** Выяснить характер распространения электромагнитных волн в плазме при условиях, когда движением ионов можно пренебречь.

Выведем при заданных условиях дисперсионное соотношение для электромагнитных волн, которое по своему характеру аналогично уравнению предыдущей задачи, но в которое мы включим затухание, обусловленное соударениями. Из уравнений Максвелла можно получить уравнение (3.13) для напряженности электрического поля волны. С учетом того, что зависимость характеристик волны от времени и координат имеет вид  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , перепишем это уравнение в виде:

$$k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} - \frac{4\pi i\omega}{c^2} \mathbf{j}, \quad (3.16a)$$

где  $\mathbf{j} = -eN_e \mathbf{v}_e$  — плотность электронного тока ( $N_e$  — плотность электронов,  $\mathbf{v}_e$  — их средняя скорость в волне). Из поперечности электромагнитной волны следует  $\mathbf{k}\mathbf{E} = 0$ , т. е.  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ . Отсюда находим, что плазма остается квазинейтральной и возмущения под действием волны приводят к движению электронов.

При заданных условиях задачи мы можем пренебречь движением ионов, так что электрический ток, влияющий на распространение электромагнитной волны, обусловлен движением электронов. Определим его, исходя из кинетического уравнения для электронов, которое мы используем в  $\tau$ -приближении:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f - \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\nu(f - f_0).$$

Здесь  $f_0$  — равновесная функция распределения электронов по скоростям в плазме в отсутствие электромагнитной волны,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля волны,  $\nu$  — частота столкновений электронов с частицами газа. Представим функцию распределения электронов в виде  $f = f_0 + f'$ , где добавка  $f'$  обусловлена электромагнитной волной и ее зависимость от времени и координат задается в обычном виде  $f' \sim \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ . Учитывая это, приведем кинетическое уравнение к виду

$$f'(-i\omega + i\mathbf{k}\mathbf{r} - \nu) - \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Выбрав направление распространения  $\mathbf{k}$  вдоль оси  $z$ , напряженность поля электромагнитной волны—вдоль оси  $x$ , получим

$$j' = \frac{ieE}{km} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} (\omega - kv_z + iv)^{-1}.$$

Согласно уравнению (3.16а) направления векторов напряженности электрического поля волны и электрического тока совпадают. Поэтому электрический ток направлен по оси  $x$  и по определению равен

$$j_x = -eN_0 \langle v_x \rangle = -\frac{ie^2E}{m} \int \frac{v_x \frac{\partial f_0}{\partial v_x} dv_x}{\omega - kv_z + iv}.$$

Здесь  $N_0$ —плотность электронов, угловые скобки означают усреднение по скоростям электронов. Вычисляя интеграл по частям, получим

$$\mathbf{j} = \frac{iN_0e^2E}{m} \left\langle \frac{1}{\omega - kv_z + iv} \right\rangle. \quad (3.16б)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.16а), приходим к следующему дисперсионному соотношению:

$$\omega^2 = k^2c^2 + \omega\omega_0^2 \left\langle \frac{1}{\omega - kv_z + iv} \right\rangle,$$

где  $\omega_0$ —плазменная частота.

При больших частотах полученное дисперсионное соотношение переходит в соотношение задачи 3.9, но с учетом затухания:

$$\omega^2 = k^2c^2 + \omega_0^2 \left( 1 - \frac{iv}{\omega} \right).$$

В другом предельном случае  $\omega \ll k\sqrt{T_e/m}$  ( $T_e$ —температура электронов), имеем, определив вычет подынтегральной функции:

$$0 = k^2c^2 - i \frac{\omega\omega_0^2}{k} \sqrt{\frac{\pi m}{2T_e}}.$$

Отсюда находим

$$\omega = -i \sqrt{\frac{2T_e}{\pi m}} \frac{c^2 k^3}{\omega_0^2}.$$

На основе полученного дисперсионного соотношения вычислим глубину, на которую проникает поперечная волна малой частоты при прохождении в плазму. Пусть ось  $z$  направлена перпендикулярно границе плазмы и в этом направлении распространяется электромагнитная волна. Поскольку зависимость амплитуды волны от координаты имеет вид  $e^{ikz}$ , то волна затухает при проникновении в плазму по закону  $\exp(-z/\delta)$ , где  $1/\delta = \text{Im } k$ . В случае волн малой частоты получаем для характерной глубины  $\delta$ , на которой затухает волна:

$$\delta = \frac{1}{\text{Im } k} = 2 \left( \frac{2T_e}{\pi m} \right)^{1/6} \left( \frac{c^2}{|\omega| \omega_0^2} \right)^{1/3}. \quad (3.17)$$

Как видно, для поперечной волны глубина проникновения волны в плазму  $\delta \rightarrow \infty$  в пределе малых частот  $\omega$ . Характер проникновения поперечной волны в плазму носит название аномального скин-эффекта для продольной волны, рассмотренного в задаче 2.6.

**Задача 3.11.** Получить дисперсионное соотношение для высокочастотных волн, распространяющихся в плазме в постоянном магнитном поле. Плазму считать холодной, т. е. давление газа мало по сравнению с магнитным давлением.

Получим общую систему уравнений для волн, распространяющихся в плазме при наличии магнитного поля. Для этой цели используем уравнение Максвелла и уравнения движения заряженных частиц. Исключив из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

магнитное поле волны  $\mathbf{H}'$  и учитывая гармоническую зависимость напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и тока частиц  $\mathbf{j}$  от координаты и времени ( $\sim \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$ ]), получим следующее уравнение:

$$k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} + i \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{j}. \quad (3.18a)$$

Другое уравнение, связывающее величины  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{j}$ , вытекает из уравнения движения частиц. При этом для холодной плазмы мы можем пренебречь тепловым движением частиц, так что их поведение определяется только внешними полями:

$$m \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] \right), \\ M \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] \right).$$

Здесь  $\mathbf{v}_e$ ,  $\mathbf{v}_i$  — скорость электрона и иона соответственно,  $\mathbf{H}$  — напряженность внешнего магнитного поля; магнитным полем волны пренебрегаем. Ток заряженных частиц  $\mathbf{j} = Ne(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$ , где  $N$  — их плотность, скорость центра инерции  $\mathbf{V} = (m\mathbf{v}_e + M\mathbf{v}_i)/M$ . Учитывая гармоническую зависимость характеристик волны от времени и координат  $\sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ , а также условие  $M \gg m$ , приведем уравнение движения к виду

$$\mathbf{V} = \frac{i}{M\omega Nc} [\mathbf{j}\mathbf{H}], \\ -i\omega\mathbf{j} = \frac{\omega_0^2}{4\pi} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{H}] \right) - \frac{e}{mc} [\mathbf{j}\mathbf{H}],$$

где  $\omega_0^2 = 4\pi Ne^2/m$  — плазменная частота (3.3). Исключая из этих уравнений величину  $\mathbf{V}$ , получим

$$(\omega^2 - \omega_{eH}\omega_{iH})\mathbf{j} + \omega_{eH}\omega_{iH}\mathbf{h}(\mathbf{j}\mathbf{h}) + i\omega\omega_{eH}[\mathbf{j}\mathbf{h}] - i\frac{\omega_0^2\omega}{4\pi}\mathbf{E} = 0. \quad (3.18b)$$

Здесь  $\mathbf{h}$  — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля  $\mathbf{H}$ ,  $\omega_{eH} = eH/mc$ ,  $\omega_{iH} = eH/Mc$  — ларморовская частота для электрона и иона соответственно.

Система уравнений (3.18) позволяет получить дисперсионные соотношения для волн, распространяющихся в холодной плазме. В частности, при отсутствии магнитного поля ( $\omega_{eH} = \omega_{iH} = 0$ ) эта система уравнений сводится к уравнению

$$k^2 E - \mathbf{k}(\mathbf{k}E) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2} E.$$

Отсюда получаем дисперсионное соотношение для продольной волны ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}$ )  $\omega = \omega_0$ , а для поперечной электромагнитной волны ( $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$ )  $\omega^2 = \omega_0^2 + k^2 c^2$ . Это согласуется с ранее полученными результатами (см. задачи 3.2, 3.9).

Используя уравнения (3.18) при выводе дисперсионных соотношений для высокочастотных волн, будем считать  $\omega_0 \geq \omega_{eH}$ , так что членами, содержащими ионную ларморовскую частоту  $\omega_{iH}$ , будем пренебрегать. При этом уравнение (3.18б) принимает вид

$$\omega^2 \mathbf{j} + i\omega \omega_{eH} [\mathbf{j}\mathbf{h}] - i \frac{\omega_0^2 \omega}{4\pi} \mathbf{E} = 0.$$

Для волн, поляризованных вдоль магнитного поля ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ ), зависимость характеристик от магнитного поля исключается, ибо  $[\mathbf{j}\mathbf{h}] = 0$ . В этом случае получаем две волны: продольную ( $\omega = \omega_0$ ) и поперечную ( $\omega^2 = \omega_0^2 + k^2 c^2$ ) электромагнитные волны.

Рассмотрим случай, когда волна поляризована перпендикулярно магнитному полю и распространяется в перпендикулярном ему направлении. Возьмем направление магнитного поля за ось  $x$ , направление распространения волны  $\mathbf{k}$  — за ось  $y$ . Тогда система уравнений (3.18), записанная в компонентах векторов, принимает вид

$$\begin{aligned} \omega^2 j_y + i\omega \omega_{eH} j_z - i \frac{\omega_0^2 \omega}{4\pi} E_y &= 0, \\ \omega^2 j_z - i\omega \omega_{eH} j_y - i \frac{\omega_0^2 \omega}{4\pi} E_z &= 0, \\ \frac{\omega^2}{c^2} E_y + i \frac{4\pi\omega}{c^2} j_y &= 0, \\ \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_z + i \frac{4\pi\omega}{c^2} j_z &= 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений приводит к следующему дисперсионному соотношению:

$$(\omega^2 - \omega_0^2) (\omega^2 - k^2 c^2 - \omega_0^2) - (\omega^2 - k^2 c^2) \omega_{eH}^2 = 0. \quad (3.19)$$

Полученное уравнение описывает два типа волн: продольные плазменные и поперечные электромагнитные волны. Если частоты этих волн сильно различаются, то они становятся независимыми.



Это справедливо при  $k^2 c^2 \gg \omega_0^2$ , причем дисперсионное соотношение для электромагнитных волн, как это следует из уравнения (3.19), принимает вид  $\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_0^2$ , а для плазменных  $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_{eH}^2$ .

**Задача 3.12.** Получить дисперсионное соотношение для низкочастотных волн, распространяющихся в холодной плазме в постоянном магнитном поле.

Для нахождения дисперсионного соотношения воспользуемся системой уравнений (3.18). Частота рассматриваемых волн мала,  $\omega \ll \omega_{iH}$ . Кроме того, чтобы рассматриваемые колебания плазмы могли быть четко отделены от электромагнитных волн, будем считать  $kc \gg \omega$ . Из полученного результата будет видно, что это условие (скорость распространения волн мала по сравнению со скоростью света) всегда выполняется. При использовании вышеуказанных соотношений система уравнений (3.18) приводится к виду

$$k^2 E - \mathbf{k} (\mathbf{k} E) = i \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{j}, \quad (3.20a)$$

$$\omega_{eH} \omega_{iH} [\mathbf{j} - \mathbf{h} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{h})] + i \frac{\omega_0^2 \omega}{4\pi} \mathbf{E} = 0. \quad (3.20b)$$

Как следует из системы уравнений (3.20), возможно существование двух типов низкочастотных волн в магнитном поле.

1) Магнитогидродинамические волны. Эти волны распространяются вдоль магнитного поля ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$ ) и поляризованы в перпендикулярном магнитному полю направлении ( $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ ). Система уравнений (3.18) приводит к следующему дисперсионному соотношению для магнитогидродинамических волн:

$$\omega = kc \frac{\sqrt{\omega_{eH} \omega_{iH}}}{i\omega_0} = k \frac{H}{\sqrt{4\pi MN}}. \quad (3.21)$$

2) Магнитный звук. Это поперечные волны ( $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$ ), которые распространяются перпендикулярно магнитному полю ( $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ ) и поляризованы также в перпендикулярном магнитному полю направлении ( $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ ). Дисперсионное соотношение для магнитного звука также описывается формулой (3.21). Хотя магнитогидродинамические волны и магнитный звук имеют разную физическую природу, при не очень коротких длинах волн ( $\omega \ll \omega_{iH}$ ) они распространяются с одинаковой скоростью и им соответствует одинаковое дисперсионное соотношение (3.21).

Магнитогидродинамические волны часто называют альфвеновскими волнами по имени открывшего их шведского физика Х. Альфвена. Фазовая скорость обоих типов волн (магнитогидродинамических и магнитного звука), которая равна

$$c_A = \frac{\omega}{k} = \frac{H}{\sqrt{4\pi MN}},$$

носит название альфвеновской скорости.

Можно составить простую физическую модель для обоих типов колебаний. При рассматриваемых условиях выполняются условия магнитной гидродинамики (см. задачу 2.44), когда плазма обладает бесконечной проводимостью, и поэтому магнитные силовые линии вморожены в плазму. Тогда всякое смещение магнитных силовых линий вызывает смещение плазмы и в силу упругости плазмы это движение носит волновой характер. Определим скорость распространения рассматриваемых упругих колебаний, которая по определению равна  $c = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$ , где  $p$  — давление,  $\rho = MN$  — плотность в плазме. Давление холодной плазмы совпадает с магнитным давлением  $p = H^2/8\pi$ , так что скорость распространения волн равна

$$c = \left( \frac{H}{4\pi M} \frac{\partial H}{\partial N} \right)^{1/2}.$$

Далее, поскольку магнитные силовые линии вморожены в плазму, то  $\partial H / \partial N = H/N$ . Таким образом, получаем, что скорость распространения рассматриваемых колебаний совпадает с альфвеновской скоростью:

$$c = c_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi MN}}.$$

Сами колебания могут быть двух типов в зависимости от направления их распространения. Если колебание магнитной силовой линии распространяется вдоль магнитной силовой линии, т. е. параллельно магнитному полю, то мы имеем дело с альфвеновской волной. Она аналогична волне, бегущей вдоль упругой струны. Колебание данной магнитной силовой линии через плазму может вызывать колебание соседних силовых линий, т. е. вызывать волну, распространяющуюся перпендикулярно магнитному полю. В этом случае мы имеем дело с магнитным звуком.

**Задача 3.13.** Рассмотреть распространение волн в замагниченной холодной плазме с частотой, много меньшей ларморовской частоты электронов, но много большей ларморовской частоты ионов.

Для получения дисперсионного соотношения воспользуемся ранее полученными уравнениями для параметров волны. Первое из уравнений вытекает из системы уравнений Максвелла и имеет вид уравнения (3.13). Полагая в этом уравнении частоту малой,

$$\omega \ll kc,$$

представим его в виде

$$k^2 E - k(kE) - i \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{j} = 0. \quad (3.22a)$$

Здесь  $k$  — волновой вектор волны,  $E$  — напряженность электрического поля волны,  $\omega$  — частота,  $c$  — скорость света,  $\mathbf{j}$  — плотность

тока. В рассматриваемом случае ток обусловлен движением электронов, так что  $\mathbf{j} = -eN_0v_e$ , где  $N_0$  — плотность электронов,  $v_e$  — скорость электронов в волне. Используем уравнение движения для электронов

$$m \frac{dv_e}{dt} = -|eE - \frac{e}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] ,$$

где  $\mathbf{H}$  — напряженность внешнего магнитного поля. Подставляя зависимость скорости электронов в волне от времени  $\mathbf{v}_e \sim \sim \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$  и вводя ларморовскую частоту электронов  $\omega_H = = eH/mc$ , приведем это уравнение к виду

$$-i\omega \mathbf{v}_e + \omega_H [\mathbf{v}_e \mathbf{h}] + \frac{eE}{m} = 0 ,$$

$\mathbf{h}$  — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля.

Используя малость частоты волны по сравнению с ларморовской частотой электронов и вводя плазменную частоту электронов (3.3)

$$\omega_0 = \left( \frac{4\pi N_0 e^2}{m} \right)^{1/2} ,$$

преобразуем последнее уравнение к виду

$$\mathbf{E} = \frac{4\pi\omega_H}{\omega_0^2} [\mathbf{j} \mathbf{h}] , \quad (3.22б)$$

где  $\mathbf{j}$  — ток электронов. Это уравнение непосредственно вытекает из уравнения (3.20б), если в указанном уравнении в соответствии с используемыми здесь предположениями оставить только два последних члена.

Подставляя напряженность электрического поля волны из уравнения (3.22б) в уравнение (3.22а), получим следующее уравнение:

$$k^2 [\mathbf{j} \mathbf{h}] - \mathbf{k} (\mathbf{k} [\mathbf{j} \mathbf{h}]) - i \frac{\omega_0^2}{\omega_H c^2} \mathbf{j} = 0 . \quad (3.23)$$

Распишем это уравнение в компонентах. Выберем в качестве оси  $z$  направление внешнего магнитного поля (единичный вектор  $\mathbf{h}$  направлен вдоль оси  $z$ ), а волновой вектор поместим в плоскости  $xz$ . Тогда компоненты данного уравнения в направлении  $x$  и  $y$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} (k^2 - k_x^2) j_y - i \frac{\omega_0^2}{\omega_H c^2} j_x &= 0 , \\ -k^2 j_x - \frac{i\omega_0^2}{\omega_H c^2} j_y &= 0 . \end{aligned}$$

Из условия обращения детерминанта этого уравнения в нуль получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega = \frac{\omega_H c^2}{\omega_0^2} k k_z \equiv \frac{\omega_H c^2 k^2}{\omega_0^2} \cos \theta . \quad (3.24)$$

Здесь  $\theta$  — угол между направлением распространения волны и направлением внешнего магнитного поля. Рассмотренные волны впервые были обнаружены в атмосфере Земли и получили название свистящих атмосферик.

Нетрудно установить, что частота свистящих атмосферик значительно превышает частоту альфвеновских волн и магнитного звука. Действительно, для свистящих атмосферик, распространяющихся вдоль магнитного поля, с учетом (3.21), (3.23) имеем

$$\omega = \omega_A^2 / \omega_{iH},$$

где  $\omega_A$  — частота альфвеновской волны,  $\omega_{iH}$  — ларморовская частота ионов. Поскольку согласно условию данной задачи  $\omega \gg \omega_{iH}$ , то отсюда следует, что  $\omega_A \gg \omega_{iH}$  и  $\omega \gg \omega_A$ . Тем самым мы имеем дело с рядом соотношений:

$$\omega_{eH} \gg \omega \gg \omega_A \gg \omega_{iH}, \quad kc \gg \omega,$$

которые позволяют разделить разные типы волн, возникающие в магнитоактивной плазме и имеющие разную физическую природу. Природа свистящих атмосферик целиком связана с движением электронов. Движение электронов и связанный с этим ток в магнитоактивной плазме в соответствии с формулой (3.22б) вызывают появление электрического поля. А электрическое поле, в свою очередь, согласно уравнению (3.22а) приводит к появлению тока электронов в плазме. Это в конечном итоге и создает рассматриваемые колебания плазмы.

**Задача 3.14.** Выяснить поляризацию свистящих атмосферик, распространяющихся вдоль магнитного поля.

В данном случае [уравнение (3.23) с учетом дисперсионного соотношения для свистящих атмосферик принимает вид

$$[jh] = ij.$$

Если его расписать в компонентах, то мы получим  $j_x = ij_y$ . Подобную связь найдем между компонентами электрического поля волны, если воспользуемся уравнением (3.22б). Это уравнение дает  $E_y = iE_x$ . Таким образом, рассматриваемая волна обладает круговой поляризацией.

Рассматриваемая волна, распространяющаяся вдоль магнитного поля, имеет винтовую структуру. Направление вращения поляризации волны совпадает с направлением вращения электронов. Ее возникновение можно представить себе следующим образом. В некоторой области пространства электроны случайно приобрели скорость в направлении, перпендикулярном магнитному полю. Это движение создает электрическое поле и заставляет электроны вращаться в перпендикулярной к магнитному полю плоскости. Такое возмущение передается на соседние области пространства, но со сдвигом по фазе. Данная волна носит название геликона.

**Задача 3.15.** Исследовать волновые свойства неоднородной плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле. Направление магнитного поля перпендикулярно направлению, в котором изменяется плотность плазмы.

При рассматриваемых условиях дрейф электронов в направлении градиента плотности плазмы приводит к возникновению электрического поля в направлении, перпендикулярном магнитному полю и направлению градиента плотности. Это электрическое поле вызывает обратное движение электронов. Возникающие при этом волны носят название дрейфовых волн. Далее мы получим дисперсионное соотношение для дрейфовых волн.

Будем считать, что фазовая скорость дрейфовых волн велика по сравнению с тепловой скоростью ионов и мала по сравнению с тепловой скоростью электронов:

$$\sqrt{T_i/M} \ll \omega/k \ll \sqrt{T_e/m}.$$

Здесь  $\omega$  — частота дрейфовой волны,  $k$  — волновой вектор,  $T_e$ ,  $T_i$  — температура электронов и ионов,  $m$ ,  $M$  — масса электрона и иона соответственно. Левое соотношение позволяет нам пренебречь движением ионов при исследовании дрейфовых волн. Согласно правому соотношению в процессе распространения дрейфовой волны поддерживается равновесное бальцмановское распределение электронов, имеющее вид

$$N_e = N_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right),$$

где  $N_e$  — плотность электронов при наличии дрейфовой волны,  $N_0$  — плотность электронов в отсутствие дрейфовой волны,  $\varphi$  — потенциал электрического поля волны. Учитывая малость амплитуды волны и представляя плотность электронов в виде  $N_e = N_0 + N'$ , находим

$$N' = N_0 \frac{e\varphi}{T_e}.$$

Воспользуемся уравнением непрерывности для электронов, имеющих среднюю скорость  $v_e$ :

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div}(N_e v_e) = 0.$$

Отсюда получим

$$-i\omega N' + v_{ex} \frac{\partial N_0}{\partial x} = 0,$$

здесь  $\omega$  — частота дрейфовой волны, равновесная плотность плазмы изменяется в направлении  $x$ , и  $v_{ex}$  — дрейфовая скорость электронов под действием магнитного поля и электрического поля волны. Эта скорость равна

$$v_{ex} = \frac{cE_y}{H} = -\frac{ick_y\varphi}{H},$$

где направление  $y$  перпендикулярно направлению магнитного поля и направлению, в котором изменяется плотность плазмы.

Подставим полученное выражение для дрейфовой скорости электронов в уравнение непрерывности для электронов и исключим из последнего связанные с колебаниями плотность электронов и потенциал электрического поля, воспользовавшись при этом больцмановским распределением электронов. Получим следующее дисперсионное соотношение для дрейфовых волн:

$$\omega = -k_y \frac{cT_e}{eH} \frac{d \ln N_0}{dx}.$$

Найденное дисперсионное соотношение получено в предположении, что фазовая скорость волны много меньше тепловой скорости электронов и много больше тепловой скорости ионов. Этот критерий с учетом самого дисперсионного соотношения может быть представлен в виде:

$$1 \ll \frac{\omega_H L}{\sqrt{T_e/m}} \ll \sqrt{\frac{M T_e}{m T}},$$

где  $\omega_H = eH/mc$  — ларморовская частота электронов,  $L$  — характерный размер, на котором заметно изменяется плотность плазмы.

**Задача 3.16.** Получить дисперсионное соотношение для распространяющихся в плазме волн, используя диэлектрическую проницаемость плазмы.

Общий способ получения дисперсионного соотношения, устанавливающего связь между частотой волн и ее волновым вектором, можно сформулировать, используя опыт предыдущих задач. Он состоит в следующем. В линейном приближении записываются уравнения, учитывающие происходящие в волне процессы. Это означает, что амплитуды колебаний параметров плазмы в волне считаются малыми по сравнению с характерными значениями этих параметров в плазме. Далее, в полученной системе линейных уравнений используется условие существования ненулевого решения, которое соответствует равенству нулю определителя этой системы. То же соотношение можно получить, исключив из этой системы уравнений все величины, кроме одной, и потребовав, чтобы в оставшемся единственном уравнении коэффициент при искомой величине обратился в нуль. Это также является условием существования ненулевого решения.

Такую процедуру можно проделать в общем виде, используя связь между электрическими и магнитными параметрами в плазме на основе уравнений Максвелла, а специфику процессов, отвечающих данной волне, включить в диэлектрическую проницаемость плазмы. В результате получим уравнение (3.18а), которое, будучи

расписанным в компонентах, имеет вид

$$k^2 E_\alpha - k_\alpha k_\beta E_\beta - \frac{\omega^2}{c^2} E_\alpha - i \frac{4\pi\omega}{c^2} j_\alpha = 0$$

(по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Далее используем закон Ома,  $j_\alpha = \Sigma_{\alpha\beta} E_\beta$ , где  $\Sigma_{\alpha\beta}$  — проводимость плазмы, и соотношение (2.41) между проводимостью и диэлектрической проницаемостью. В результате получим

$$k^2 E_\alpha - k_\alpha k_\beta E_\beta - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta = 0.$$

Неи нулевое решение этой системы уравнений для компонент напряженности электрического поля существует в том случае, когда детерминант полученной системы уравнений обращается в нуль:

$$\left| k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} \right| = 0.$$

Это и есть дисперсионное соотношение для рассматриваемого типа волн, причем особенности этих волн обусловлены зависимостью  $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, k)$ .

Наиболее простой случай имеет место для изотропной плазмы, когда тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  диагонален. В этом случае волны разделяются на продольные и поперечные в соответствии с направлением электрического поля волны в направлении распространения волны или перпендикулярно ему. Дисперсионное соотношение для продольных волн имеет вид

$$\varepsilon_{\parallel}(\omega, k) = 0, \quad (3.25a)$$

а для поперечных волн

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \varepsilon_{\perp}(\omega, k) = 0, \quad (3.25b)$$

где  $\varepsilon_{\parallel}$ ,  $\varepsilon_{\perp}$  — диэлектрическая проницаемость в направлении распространения волны и в перпендикулярном ему направлении.

В частности, для холодной плазмы  $kv_e \ll \omega$  ( $v_e$  — характерная скорость электронов) имеем согласно формуле (2.43)

$$\varepsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2;$$

здесь  $\omega_0$  — частота плазменных колебаний. Отсюда на основе формулы (3.25a) для продольных плазменных колебаний при  $k=0$  в соответствии с формулой (3.7) получим

$$\omega = \omega_0.$$

Для поперечных — электромагнитных колебаний формула (3.25b) дает

$$\omega^2 = \omega_0^2 + k^2 c^2,$$

что совпадает с соотношением (3.14).

Удобство дисперсионного соотношения, выраженного через диэлектрическую проницаемость с помощью (3.25), связано с тем, что отдельные компоненты плазмы вносят независимый вклад в диэлектрическую проницаемость плазмы. Поэтому отдельные группы электронов и ионов при исследовании колебаний плазмы, происходящих при их участии, при таком подходе могут быть учтены независимо.

## § 2. Затухание и раскачка волн в плазме

Взаимодействие колебаний плазмы с самой плазмой и внешними полями, в которых плазма находится, приводит к обмену энергией между колебаниями плазмы и другими степенями ее свободы или внешними полями. Если волны теряют энергию, то они затухают, если забирают энергию, то раскачиваются. В первом случае появление колебаний в плазме не отражается существенно на ее параметрах, ибо случайно возникшие малые колебания в плазме не будут далее развиваться. Во втором случае малые колебания будут нарастать и в конечном итоге могут достичь такой амплитуды, что приведут к изменению параметров плазмы. Такое состояние плазмы называется неустойчивым, а сами развивающиеся колебания плазмы — неустойчивостями.

Неустойчивости бывают разных типов. В одном из них раскачка колебаний обусловлена различным характером взаимодействия отдельных групп заряженных частиц с волнами. Такие неустойчивости, которые в конечном счете приводят к перераспределению заряженных частиц по скоростям, носят название кинетических неустойчивостей. Примером кинетической неустойчивости является пучковая неустойчивость, которая возникает при прохождении пучка электронов в плазме. В этом случае электроны пучка резонансно взаимодействуют с плазменными колебаниями и, раскачивая их, замедляются.

Другие типы неустойчивостей вызывают пространственное перераспределение заряженных частиц в плазме. Среди них наиболее быстро развиваются гидродинамические неустойчивости. Они возникают, если пространственное распределение плазмы неустойчиво по отношению к малым перемещениям. В этом случае при развитии неустойчивости происходит распад пространственной конфигурации плазмы. Более медленными являются диссипативная или перегревная неустойчивость, основу которой составляет повышенное выделение энергии в некоторой области плазмы при малых возмущениях, а этот эффект далее усиливает возникшее возмущение плазмы. Еще более медленными оказываются дрейфовые неустойчивости, которые развиваются за времена ухода заряженных частиц из плазмы.

Развитие неустойчивости приводит к тому, что нарастающие волны достигают конечной амплитуды, которая определяется их



взаимодействием с частицами и другими типами волн плазмы. В результате в плазме может быть возбуждено большое число волн и шумов, взаимодействие которых с плазмой приводит к нерегулярному поведению электрических полей, возникающих в плазме, а также других параметров плазмы. Такое состояние плазмы называется турбулентным. При этом в колебаниях и шумах плазмы сосредоточена конечная энергия, которая может быть сравнима с тепловой энергией плазмы.

Для анализа явлений, характеризующих возникновение и развитие турбулентности плазмы, необходимо исследование взаимодействия волн конечной амплитуды с плазмой и друг с другом. Эти взаимодействия приводят к целому ряду своеобразных и изящных эффектов. К их числу, в частности, относится модуляционная неустойчивость, которая связана с распадом пакета волн, распространяющегося в плазме, на отдельные сгустки — солитоны

**Задача 3.17.** Исследовать затухание плазменных волн в бесстолкновительной плазме.

Представим частоту плазменных колебаний в виде  $\omega = \text{Re } \omega - i\delta$ . Согласно дисперсионному соотношению (3.7), для коэффициента затухания плазменных волн  $\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \ll 1\right)$  получим

$$\delta = - \left. \frac{\pi \omega_0^3}{2k^2} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \right|_{v_x = \omega/k} \quad (3.26)$$

Если величина  $\left. \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \right|_{v_x = \omega/k}$  отрицательна, то знак  $\delta$  соответствует затуханию волны. Этот тип затухания носит название затухания Ландау. В частности, при максвелловской функции распределения коэффициент затухания  $\delta$  равен

$$\delta = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^3}{k^2} \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \exp\left(-\frac{m\omega_0^2}{2k^2 T} - \frac{3}{2}\right). \quad (3.27)$$

Как следует отсюда, при  $kr_D \sim (k/\omega_0) \sqrt{T/m} \ll 1$  коэффициент затухания много меньше частоты плазменных волн.

Если величина  $\left. \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \right|_{v_x = \omega/k}$  положительна, то коэффициент затухания отрицателен и волна усиливается. Она забирает энергию от электронов и нарастает до тех пор, пока не станут существенными нелинейные эффекты, обусловленные взаимодействием между волной и частицами. Таким образом, распределение электронов с положительной производной функции распределения неустойчиво по отношению к появлению плазменных волн. Такая ситуация имеет место, если в плазму запускается пучок электронов. Даже в отсутствие столкновений с частицами газа электроны замедляются, отдавая свою энергию быстро нарастающим плазменным волнам. Такой тип неустойчивости носит название пучковой неустойчивости.

Выясним физику затухания и раскачки колебаний. Для этого перейдем в систему координат, в которой волна покоится. Те электроны, энергия которых в системе координат, связанной с волной, меньше амплитуды колебаний  $U_0$  (рис. 3.2), захватываются потенциальной ямой.

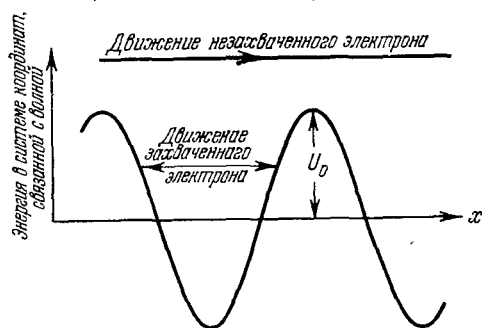


Рис. 3.2. Взаимодействие плазменных волн с электронами.

Они находятся в этой яме, забирая и возвращая энергию волне до тех пор, пока обмен энергией с другими электронами не выведет их из этого состояния. Если скорость электрона, захваченного волной, несколько превышает фазовую скорость волны, то, отражаясь от стенок потенциальной ямы, он отдает энергию волне.

Действительно, пусть электрон со скоростью  $v_\phi + u$  отразился от стенки потенциальной ямы. При упругом рассеянии от стенки ямы он меняет скорость  $u$  на  $-u$  в системе координат, связанной с волной. Изменение энергии электрона в лабораторной системе координат равно

$$\frac{1}{2}m(v_\phi - u)^2 - \frac{1}{2}m(v_\phi + u)^2 = -2mv_\phi u,$$

так что он отдает энергию волне. Захваченные электроны, скорость которых меньше фазовой скорости волны, приобретают энергию от волны. Чтобы определить знак обмена энергией между волной и всеми электронами, проинтегрируем изменение энергии по всем захваченным электронам. Имеем

$$\int_{-u_0}^{u_0} f(v_\phi + u) \Delta \varepsilon du = \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{v=v_\phi} \int_{-u_0}^{u_0} u \Delta \varepsilon du, \quad u_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}},$$

ибо изменение энергии одного электрона  $\Delta \varepsilon = -2mv_\phi u$  при взаимодействии с волной — нечетная функция скорости  $u$ .

Таким образом, знак обмена энергией между электронами и волной определяется знаком производной  $\frac{\partial f}{\partial v_x} \Big|_{v_\phi}$ . Если эта производная отрицательна, т. е. медленных электронов больше, чем быстрых, то электроны забирают энергию от волны и волна затухает. При положительном знаке  $\frac{\partial f}{\partial v_x} \Big|_{v_\phi}$  электроны отдают энергию волне, амплитуда волны увеличивается и возникает неустойчивость. Используя простые соображения, мы не могли определить величину коэффициента затухания, ибо при этом мы не учитывали обмена энергией между электроном и волной, когда элект-

рон движется внутри потенциальной ямы. Однако из этой простой физической картины можно получить критерий применимости формулы (3.26), что трудно определить из других соображений.

Как видно, двигаясь в правой части потенциальной ямы, электрон отдает энергию волне, поскольку компонента скорости электрона вдоль волны со временем уменьшается. Но, перейдя в левую часть потенциальной ямы, электрон забирает энергию от волны. Если бы не было столкновений между электронами, то захваченный электрон бесконечно долго колебался бы в потенциальной яме, обмениваясь энергией с волной и меняя свою скорость по периодическому закону. Однако при выводе формулы (3.26) мы считали, что функция распределения электронов по скоростям не зависит от волны. Это означает, что частота установления равновесия электронов по скоростям  $\nu$  значительно превышает частоту колебания отдельного электрона в потенциальной яме  $\omega$  ( $\omega \ll \nu$ ). Частота колебания электрона

$$\omega \sim u_0 k \sim \sqrt{eU_0/mk} \sim \sqrt{eE'k/m} \quad (E' \sim U_0 k),$$

здесь  $E'$  — напряженность поля в волне,  $k$  — волновой вектор волны. Отсюда

$$eE' \ll mv^2/k,$$

где  $\nu$  — частота столкновения электронов с электронами или другими частицами плазмы, приводящая к обмену энергией порядка  $eE'/k$ .

**Задача 3.18.** Определить коэффициент затухания плазменных колебаний в результате столкновения электронов с частицами плазмы. Для интеграла столкновений использовать  $\tau$ -приближение (см. задачу 1.20).

Дисперсионное соотношение для продольных колебаний представим в виде

$$\varepsilon(\omega, k) = 0.$$

Действительно, возникновение случайных полей в плазме вызывает перемещение заряженных частиц, что компенсирует действие этих полей. Поэтому электрическая индукция, отвечающая собственным колебаниям плазмы, равна нулю. Для изотропной плазмы это условие соответствует обращению в нуль диэлектрической проницаемости.

В рассматриваемом случае для диэлектрической проницаемости плазмы используем формулу (2.42б). Подстановка этого выражения в дисперсионное соотношение в пределе  $k \rightarrow 0$  дает

$$1 = \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega + i/\tau)}.$$

Учитывая в этом соотношении, что  $\omega_0 \tau \gg 1$ , перепишем его в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 - i\omega_0/\tau, \quad \omega = \omega_0 - i/2\tau.$$

Как видно, роль столкновений сводится к тому, что в правую часть дисперсионного соотношения (3.7) для плазменных колебаний следует добавить член  $-i\omega_0/\tau$ .

Таким образом, столкновения электронов с частицами плазмы приводят к затуханию плазменных волн с инкрементом затухания  $1/(2\tau)$ . Плазменные колебания существуют, если выполняется условие  $\omega_0 \tau \gg 1$ .

**Задача 3.19.** Показать, что электрон-электронные столкновения в идеальной плазме не могут привести к коэффициенту затухания плазменных колебаний, сравнимому с их частотой.

Коэффициент затухания плазменных колебаний, обусловленный электрон-электронными соударениями, порядка частоты столкновения между электронами,  $\delta \sim Nv\sigma$ , где  $N$  — плотность электронов,  $v \sim \sqrt{T/m}$  — характерная скорость столкновения электронов,  $\sigma \sim e^4/T^2$  — сечение соударения электронов, обусловленное кулоновским взаимодействием между ними. Сравнивая частоту столкновений с частотой плазменных колебаний, находим

$$\frac{\delta}{\omega_0} \sim \frac{N\sqrt{T/m}e^4/T^2}{\omega_0} \sim \left(\frac{e^6 N}{T^3}\right)^{1/2} \ll 1.$$

**Задача 3.20.** Определить коэффициент затухания плазменных колебаний на основании уравнения движения отдельного электрона в поле волны.

Уравнение движения электрона в поле волны имеет вид

$$m \frac{dv_x}{dt} = -eE \cos(kx - \omega t),$$

где  $E$  — напряженность поля в волне. Мы рассматриваем волны малой амплитуды, так что это уравнение можно решать по теории возмущений, причем малый параметр теории возмущений пропорционален  $E$ . Представим скорость электрона в виде разложения  $v_x = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$ , где  $v_n \sim E^n$ . Получим из уравнения движения

$$\begin{aligned} m \frac{dv_0}{dt} &= 0, \quad m \frac{dv_1}{dt} = -eE \cos(kx_0 - \omega t), \\ m \frac{dv_2}{dt} &= -eE \{ \cos[k(x_0 + x_1) - \omega t] - \cos(kx_0 - \omega t) \} = \\ &= eEkx_1 \sin(kx_0 - \omega t) = eEk \int_0^t \sin(kx_0 - \omega t) v_1 dt, \end{aligned}$$

где координата электрона  $x = x_0 + x_1 + \dots$ , а  $x_0$  отвечает нулевому приближению,  $x_0 + x_1$  — первому приближению и т. д. При этом при  $t = 0$   $v_0 = \text{const}$  и  $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$ .

Изменение энергии электрона в единицу времени с точностью до членов  $\sim E^2$  равно

$$\frac{d\epsilon}{dt} = m v_x \frac{dv_x}{dt} = m v_0 \frac{dv_1}{dt} + m v_1 \frac{dv_1}{dt} + m v_0 \frac{dv_2}{dt}.$$

Решим уравнения движения для электрона и найдем величины, необходимые для определения выражения  $d\epsilon/dt$ . Имеем в нулевом приближении:  $x_0 = v_0 t + a$ , где  $a$  — координата электрона в начальный момент времени. Отсюда в первом приближении

$$v_1 = - \frac{eE}{m} \frac{\sin [(kv_0 - \omega) t + ak] - \sin ak}{kv_0 - \omega}$$

и

$$x_1 = \int_0^t v_1 dt = - \frac{eE}{m} \left\{ \frac{\cos ka - \cos [ka + (kv_0 - \omega) t]}{(kv_0 - \omega)^2} - \frac{t \sin ka}{kv_0 - \omega} \right\}.$$

Усредним величину  $d\epsilon/dt$  по начальному положению электрона  $a$ . Так как  $\overline{\sin ka} = \overline{\cos ka} = 0$ ,  $\overline{\sin^2 ka} = \overline{\cos^2 ka} = 1/2$ , то получаем

$$\overline{\frac{d\epsilon}{dt}} = \frac{e^2 E^2}{2m} \left[ \frac{\sin (kv_0 - \omega) t}{kv_0 - \omega} + \frac{v_0 k \sin (kv_0 - \omega) t}{(kv_0 - \omega)^2} + \frac{v_0 k t \cos (kv_0 - \omega) t}{kv_0 - \omega} \right].$$

Найденное выражение усредним по скоростям электронов. Это приведет к следующему выражению для изменения энергии электронов в единицу времени в единице объема:

$$\frac{dW_e}{dt} = \frac{e^2 E^2 N_e}{2m} \int f(v_0) \left[ \frac{\sin (kv_0 - \omega) t}{kv_0 - \omega} + \frac{v_0 k \sin (kv_0 - \omega) t}{(kv_0 - \omega)^2} + \frac{v_0 k t \cos (kv_0 - \omega) t}{kv_0 - \omega} \right] dv_0,$$

где функция распределения электронов по скоростям нормирована на единицу и интеграл берется в смысле главного значения. Устремим  $t$  к нулю. При этом первое слагаемое обратится в нуль. Подынтегральные выражения последних двух слагаемых имеют особенность при  $v_0 = \omega/k$ , так что в этих слагаемых перейдем к пределу  $t \rightarrow 0$  после интегрирования по скоростям. Поскольку интеграл  $\int \frac{f(v_x) dv_x}{kv_x - \omega}$  берется в смысле главного значения, то эта величина конечна. Поэтому при  $t \rightarrow 0$  последнее слагаемое обращается в нуль и не вносит вклада в интеграл  $dW_e/dt$ . При вычислении интеграла от второго слагаемого в подынтегральном выражении разложим функцию распределения  $f(v_0)$  по степеням  $v_0 - \omega/k$ . Интеграл от первого члена разложения равен нулю

в силу нечетности подынтегральной функции, от второго члена равен

$$\begin{aligned} \frac{dW_e}{dt} &= \frac{e^2 E^2}{2m} N_e \left. \frac{\partial f}{\partial v_x} \right|_{v_x = \omega/k} \frac{\omega}{k} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_0 \frac{\sin(kv_0 - \omega)t}{kv_0 - \omega} = \\ &= \frac{N_e e^2 E^2 \omega}{2mk^2} \left. \frac{\partial f}{\partial v_x} \right|_{v_x = \omega/k} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\sin z}{z} = \frac{\pi e^2 E^2 \omega N_e}{2mk^2} \left. \frac{\partial f}{\partial v_x} \right|_{v_x = \omega/k}. \end{aligned}$$

Интеграл от остальных членов разложения обращается в нуль при  $t \rightarrow 0$ .

Изменение плотности энергии волны  $W_B$  равно

$$\frac{dW_B}{dt} = - \frac{dW_e}{dt},$$

причем плотность энергии волны

$$W_B = \frac{E^2}{4\pi} \overline{\cos^2(kx - \omega t)} = \frac{E^2}{8\pi}.$$

Изменение плотности энергии волны в единицу времени

$$\frac{dW_B}{dt} = - 2\delta W_B = - \frac{4\pi^2 \omega e^2}{mk^2} N_e \left. \frac{\partial f}{\partial v_x} \right|_{\omega/k} W_B,$$

откуда

$$\delta = - \frac{2\pi^2 \omega e^2 N_e}{mk^2} \left. \frac{\partial f}{\partial v_x} \right|_{\omega/k} = - \frac{\pi \omega_0^3}{2k^2} \left. \frac{\partial}{\partial v_x} \right|_{\omega/k},$$

ибо частота волны  $\omega \approx \omega_0$ . В этом приближении данный результат совпадает с формулой (3.26).

**Задача 3.21.** Рассмотреть возбуждение плазменных колебаний при движении в плазме монохроматического пучка электронов малой интенсивности.

Пусть пучок  $\vec{T}$  входит в плазму со скоростью  $u$ , плотность электронов плазмы равна  $N_0$ , плотность электронов пучка  $N_p$ , температура плазмы равна нулю. Наша задача получить дисперсионное соотношение для плазменных колебаний в этом случае и определить декремент нарастания этих колебаний.

Как обычно, мы рассмотрим малые колебания и представим параметры пучка и плазмы в виде компоненты, имеющейся в отсутствие колебаний, плюс малая добавка за счет колебаний, которая меняется по гармоническому закону. Для электронов плазмы из уравнения непрерывности и уравнения движения получим:

$$-i\omega N'_e + ikN_0 \omega'_e = 0, \quad -i\omega m \omega'_e = -eE',$$

где  $\omega'_e$ ,  $N'_e$  — скорость электронов плазмы и плотность электронов плазмы, которые обусловлены колебаниями;  $E'$  — напряженность электрического поля, создаваемого за счет колебаний. Исключая

из этих уравнений скорость электронов, получим

$$N'_e = -\frac{ikeE'}{m\omega^2} N_0.$$

Подобным образом получаем систему уравнений для электронов пучка:

$$-i\omega N'_n + ikuN'_n + ikN_n\omega'_n = 0, \quad -i\omega m\omega'_n = -eE',$$

где  $\omega'_n$ ,  $N'_n$ —скорость и плотность электронов пучка, обусловленная колебаниями. Исключая отсюда вызываемую колебаниями скорость электронов пучка, получим

$$N'_n = -\frac{ikeE'}{(\omega - ku)^2} N_n.$$

Далее воспользуемся уравнением Пуассона, которое в данном случае имеет следующий вид:

$$ikE' = -4\pi e (N'_e + N'_n).$$

Подставляя сюда выражения для величин  $N'_e$ ,  $N'_n$  и сокращая напряженность электрического поля, приходим к дисперсионному соотношению в форме:

$$1 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{\omega_0^2 N_n / N_0}{(\omega - ku)^2}, \quad (3.28)$$

где  $\omega_0 = (4\pi N_0 e^2 / m)^{1/2}$ —частота плазменных колебаний для электронов плазмы.

В отсутствие пучка ( $N_n = 0$ ) это дисперсионное соотношение принимает вид  $\omega = \omega_0$ , в который переходит формула (3.7) при нулевой температуре плазмы.

Наиболее сильное взаимодействие пучка имеет место с волнами, у которых фазовая скорость  $\omega/k$  близка к скорости пучка. Кроме того, частота плазменных волн близка к плазменной частоте. Поэтому далее мы рассмотрим волны с частотами

$$\omega = \omega_0 + \delta.$$

Наибольшие значения коэффициента нарастания, являющегося мнимой частью  $\delta$ , отвечают волнам, волновой вектор которых равен  $k = \omega_0 / u$ . Подставляя данное разложение с указанным значением волнового вектора в дисперсионное соотношение и разлагая по параметру  $\delta/\omega_0$ , получим

$$\delta = \omega_0 \left( \frac{N_n}{2N_0} \right)^{1/2} e^{2i\pi n/3},$$

где  $n$ —целое число. Поскольку  $|\delta/\omega_0| = (N_n/2N_0)^{1/3} \ll 1$ , то выполненное разложение законно.

Проанализируем полученный результат. Зависимость плотности электронов от времени и координат имеет вид

$$N = N_0 + N'_e \exp(-i\omega t + ikx),$$

так что если мнимая часть частоты, совпадающая с мнимой частью  $\delta$ , положительна, то имеет место нарастание волны. Максимальное значение коэффициента нарастания плазменных волн соответствует  $n = 1$  и составляет

$$\text{Im } \omega = \text{Im } \delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{N_{\text{п}}}{2N_0} \right)^{1/3} \omega_0 = 0,69 \left( \frac{N_{\text{п}}}{N_0} \right)^{1/3} \omega_0.$$

Обратная величина характеризует время раскочки плазменных колебаний, т. е. время, за которое амплитуда колебаний возрастает в  $e$  раз. Если это время мало по сравнению со временем столкновения электронов пучка с частицами плазмы, то торможение пучка электронов в плазме может быть обусловлено плазменными колебаниями.

**Задача 3.22.** Найти порог возникновения неустойчивости при раскочке плазменных колебаний электронным пучком.

Проанализируем дисперсионное соотношение (3.28) для плазменных колебаний, возбуждаемых монохроматическим пучком электронов. График первой части этого соотношения представлен на рис. 3.3. Рассмотрим предельные случаи в зависимости от отношения параметров задачи  $ku/\omega$  (волновой вектор  $k$  однозначно определяется геометрическими размерами системы, в которой находится плазма).

При этом, как и ранее, будем считать, что плотность электронов в пучке  $N_{\text{п}}$  много меньше плотности электронов  $N_0$  в плазме ( $N_{\text{п}} \ll N_0$ ).

В случае  $ku \gg \omega_0$  дисперсионное соотношение (3.28) разбивается на две независимые ветви

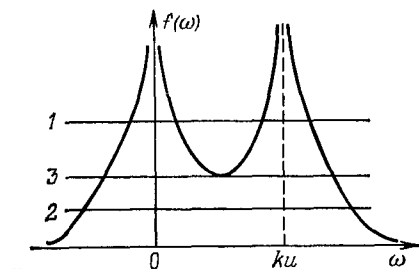


Рис. 3.3. Зависимость правой части дисперсионного соотношения (3.28) от частоты.

вблизи  $\omega = 0$  и  $\omega = ku$ . Их решения имеют вид

$$\omega = \left( ku \pm \omega_0 \sqrt{\frac{N_{\text{п}}}{N_0}} \right) \left[ 1 - \frac{\omega_0^2}{2(ku)^2} \right],$$

$$\omega = \pm \omega_0 \left[ 1 - \frac{\omega_0^2}{2(ku)^2} \frac{N_{\text{п}}}{N_0} \right].$$

Существенно при этом, что все четыре решения дисперсионного соотношения (3.28) действительны, и затухание отсутствует. На рис. 3.3 значение ординаты, равное единице, соответствует в этом случае прямой 1.

В другом предельном случае,  $ku \ll \omega_0$ , значение частоты близко к  $ku$ , так что единицей в дисперсионном соотношении (3.28)



можно пренебречь по сравнению с  $\omega_0^2/\omega^2$ . Это дает

$$\omega = ku (1 \pm i\sqrt{N_n/N_0}).$$

Два других решения соответствуют  $\omega \gg ku$ . Для них вторым слагаемым в правой части дисперсионного соотношения (3.28) можно пренебречь по сравнению с первым, так что эти решения имеют вид

$$\omega = \pm \omega_0.$$

Поскольку первые два решения мнимые, они не могут быть получены из рис. 3.3. Поэтому в рассматриваемом предельном случае на графике представлены только два последних решения. При этом равное единице значение ординаты соответствует прямой 2.

Существенно при этом, что во втором случае решения комплексные, так что одно из них отвечает раскачке колебаний электронным пучком. (Фазовая скорость колебаний  $\omega/k$  совпадает со скоростью электронов в пучке.) Очевидно, порог появления неустойчивости отвечает переходу от одного предельного случая к другому. На рис. 3.3 это соответствует случаю, когда единичная ордината касается внутренней кривой графика (3.28) (прямая 3).

Решение дисперсионного соотношения (3.28) в пороге появления неустойчивости (прямая 3) дает

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{N_n}{N_0}\right)^{1/3}} = \frac{ku}{1 + (N_n/N_0)^{1/3}}.$$

Отсюда находим соотношение между параметрами системы, при которых возможно появление неустойчивости:

$$\frac{ku}{\omega_0} \leq \left[1 + \left(\frac{N_n}{N_0}\right)^{1/3}\right]^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{N_n}{N_0}\right)^{1/3}.$$

При таком соотношении между параметрами в плазме имеются колебания, фазовая скорость которых  $\omega/k$  совпадает со скоростью электронов в пучке, и поэтому такие колебания хорошо раскачиваются. Энергия электронного пучка в этом случае перерабатывается в энергию плазменных колебаний.

**Задача 3.23.** Электроны движутся относительно ионов в плазме со скоростью  $u$ . Определить порог возникновения неустойчивости, связанной с раскачкой плазменных колебаний. Считать, что скорость электронов в пучке значительно превышает тепловую скорость электронов.

Дисперсионное соотношение в этом случае подобно (3.28) с точностью до замены плазменной частоты электронов в первом слагаемом на плазменную частоту ионов и с учетом, что плотность

электронов в пучке равна полной плотности электронов:

$$1 = \frac{\omega_+^2}{\omega^2} + \frac{\omega_0^2}{(\omega - ku)^2},$$

где  $\omega_+^2 = \omega_0^2 m/M$  — квадрат плазменной частоты ионов,  $\omega_0$  — плазменная частота электронов,  $m$ ,  $M$  — масса электронов и ионов соответственно. Это уравнение эквивалентно дисперсионному соотношению (3.28), так что его анализ может быть проведен по той же схеме, которая была использована в предыдущей задаче.

Перепишем дисперсионное соотношение в виде

$$1 = \frac{\omega_0^2}{(\omega - ku)^2} + \frac{m\omega_0^2/M}{\omega^2}.$$

Порог возникновения неустойчивости согласно результатам предыдущей задачи находится вблизи  $ku \approx \omega_0$ . В этой области параметров будем исследовать полученное дисперсионное соотношение. Положим  $ku = \omega_0 + \Delta\omega$ , где расстройка  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Кроме того,  $\omega \ll \omega_0$ . На основе этого перепишем дисперсионное уравнение, учитывая в первом слагаемом правой части первые два члена разложения по степеням  $\omega/\omega_0$ . Имеем

$$1 = \frac{\omega_0^2}{(ku)^2} + \frac{2\omega\omega_0}{(ku)^3} + \frac{\omega_0^2 m/M}{\omega^2}.$$

Или, учитывая  $ku - \omega_0 = \Delta\omega \ll \omega_0$ , получим уравнение

$$-2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + 2 \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{m}{M} = 0,$$

которое удобно записать в виде

$$f(\omega) \equiv \omega^3 - \omega^2 \Delta\omega + \frac{\omega_0^3}{2} \frac{m}{M} = 0.$$

Порог неустойчивости отвечает решению этого уравнения, при котором одновременно  $f'(\omega) = 0$ . В этой точке происходит переход от трех действительных решений уравнения  $f(\omega) = 0$  к одному действительному и двум мнимым. Решение указанных уравнений дает

$$\omega = \frac{2}{3} \Delta\omega, \quad \Delta\omega = \frac{3}{2} \omega_0 \left( \frac{m}{M} \right)^{1/3}.$$

Таким образом, порог неустойчивости соответствует следующему соотношению между параметрами системы:

$$ku \ll \omega_0 \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{m}{M} \right)^{1/3} \right].$$

Данная неустойчивость электронного тока относительно ионов носит название неустойчивости Бунемана. Полученные результаты

находятся в полной аналогии с результатами предыдущей задачи с точностью до замены величин  $\omega - ki$  и  $N_n/N_0$  в предыдущей задаче на величины  $\omega$  и  $m/M$  соответственно в данной задаче.

Неустойчивость Бунемана связана с раскачкой колебаний ионов за счет взаимодействия ионов с пучком электронов. При этом мы считаем, что разброс электронов по скоростям мал по сравнению со скоростью электронного пучка. Отметим, что рассматриваемые колебания ионов, взаимодействующие с электронным пучком, отличаются от ионного звука (3.9).

**Задача 3.24.** Рассмотреть затухание свистящих атмосферик (см. задачу 3.13) в слабоионизованном газе, учитывая столкновение электронов с частицами газа.

Свистящие атмосферики — колебания с частотой, много меньшей ларморовской частоты электронов, но много большей ларморовской частоты ионов. Дисперсионное соотношение для свистящих атмосферик получено в задаче 3.13. Мы выведем его здесь с учетом столкновений электронов и частиц газа. Для этого в уравнении движения электронов необходимо учесть силу трения, обусловленную столкновением электронов с частицами газа. С учетом силы трения уравнение движения для электронов принимает вид

$$m \frac{d\mathbf{w}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{w}_e \mathbf{H}] - m\mathbf{w}_e \nu;$$

здесь  $\mathbf{w}_e$  — средняя скорость электронов,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля волны,  $\mathbf{H}$  — напряженность внешнего магнитного поля,  $\nu$  — частота столкновений электронов с частицами газа, и последнее слагаемое в правой части уравнения описывает силу трения, действующую на электроны в результате соударений с частицами газа.

Повторяя выкладки, сделанные в задаче 3.13, и учитывая силу трения, приведем уравнение движения электрона к виду

$$(-i\omega + \nu)\mathbf{j} + \omega_H [\mathbf{j}\mathbf{h}] - \frac{\omega_0^2}{4\pi} \mathbf{E} = 0, \quad (3.29)$$

где плотность тока электрона в волне  $\mathbf{j} = -eN_0\mathbf{w}_e$ . Пренебрегая первым слагаемым в этом уравнении (так как  $\omega \ll \omega_H$ ), и подставляя найденное отсюда выражение для напряженности электрического поля в уравнение (3.22а), вместо (3.23) получим

$$\nu k^2 \mathbf{j} - \nu \mathbf{k} (\mathbf{k}\mathbf{j}) + \omega_H k^2 [\mathbf{j}\mathbf{h}] - \omega_H \mathbf{k} (\mathbf{k}[\mathbf{j}\mathbf{h}]) - i \frac{\omega \omega_0^2}{c^2} \mathbf{j} = 0.$$

Распишем это уравнение в компонентах. Вводя систему координат, как и в задаче 3.13, имеем

$$\begin{aligned} \left( \nu k_z^2 - i \frac{\omega \omega_0^2}{c^2} \right) j_x + \omega_H k_z^2 j_y - \nu k_x k_z j_z &= 0, \\ -\omega_H k^2 j_x + \left( \nu k^2 - i \frac{\omega \omega_0^2}{c^2} \right) j_y &= 0, \\ -\nu k_x k_z j_x - \omega_H k_x k_z j_y + \left( \nu k_x^2 - i \frac{\omega \omega_0^2}{c^2} \right) j_z &= 0. \end{aligned}$$

Используя условие обращения в нуль детерминанта данного уравнения и учитывая в полученном дисперсионном соотношении слабость затухания ( $\nu \ll \omega_H$ ), получим окончательно

$$\omega = \frac{\omega_H}{\omega_0} c^2 k^2 \cos \theta \left( 1 - i \frac{\nu}{\omega_H \cos \theta} \right), \quad (3.30)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{k}$ .

Как видно, затухание в рассматриваемой волне слабее для замагниченных электронов, когда частота столкновения электронов с частицами газа много меньше ларморовской частоты электронов,  $\nu \ll \omega_H$ . Поэтому рассматриваемые волны могут существовать даже в случае, когда их частота значительно меньше частоты соударений электронов с частицами газа.

**Задача 3.25.** Исследовать распространение и затухание циклотронных волн в холодной замагниченной плазме. Эти волны движутся в направлении магнитного поля и имеют частоту, близкую к ларморовской частоте — частоте вращения электронов в постоянном магнитном поле.

Выведем дисперсионное соотношение для поперечных волн в холодной плазме, которые распространяются вдоль магнитного поля и определяются движением электронов. Будем считать, что эти волны создаются вращением электронов в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Тогда они поляризованы в плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному полю, т. е. векторы электрического поля волны и скорости электронов лежат в этой плоскости.

Воспользуемся ранее полученными уравнениями. Одно из них уравнение (3.16а), в котором использованы уравнения Максвелла для полей волны. Учитывая, что волновой вектор волны  $\mathbf{k}$  перпендикулярен напряженности электрического поля в волне  $\mathbf{E}$ , представим это уравнение в виде

$$(\omega^2 - k^2 c^2) \mathbf{E} + 4\pi i \omega \mathbf{j} = 0. \quad (3.31a)$$

Здесь плотность тока  $\mathbf{j}$  создается электронами, так что  $\mathbf{j} = -e N_0 \mathbf{v}_e$ , где  $N_0$  — плотность электронов,  $\mathbf{v}_e$  — их средняя скорость.

Второе уравнение — уравнение движения для электронов, причем ионы, как более тяжелая компонента, при заданных условиях считаются неподвижными. Уравнение (3.29) имеет вид

$$(-i\omega + \nu)\mathbf{j} + \omega_H[\mathbf{j}\mathbf{h}] - \frac{\omega_0^2}{4\pi}\mathbf{E} = 0, \quad (3.316)$$

где  $\nu$  — частота столкновения электрона с частицами газа,  $\omega_H$  — лармсрѳовская частота для электронов,  $\omega_0$  — плазменная частота,  $\mathbf{h}$  — единичный вектор в направлении магнитного поля. Подставляя плотность электронного тока из уравнения (3.31а) в уравнение (3.32б), получим

$$[(-i\omega + \nu)(\omega^2 - k^2c^2) + i\omega\omega_0^2]\mathbf{E} + (\omega^2 - k^2c^2)\omega_H[\mathbf{E}\mathbf{h}] = 0.$$

Расписав это уравнение в компонентах и потребовав обращение определителя в нуль, приходим к следующему дисперсионному соотношению:

$$[\omega(\omega^2 - k^2c^2 - \omega_0^2) + i\nu(\omega^2 - k^2c^2)]^2 - (\omega^2 - k^2c^2)^2\omega_H^2 = 0.$$

Будем считать, что  $kc \gg \omega_0$  и  $\nu \ll \omega_0$ . Находим, что наше решение распадается на электромагнитную волну с частотой, близкой  $kc$ , и циклотронную волну, частота которой равна

$$\omega = \omega_H \left( 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_H^2 - k^2c^2} \right) - i\nu.$$

Как видно, циклотронная волна в замагниченной плазме ( $\nu \ll \omega_H$ ) медленно затухает. Частота циклотронной волны близка к частоте вращения электронов в постоянном магнитном поле.

**Задача 3.26.** Выяснить устойчивость плазменного шнура, возникающего при прохождении прямого тока через плазму и находящегося во внешнем магнитном поле, относительно перетяжки. Перетяжка отвечает изменению радиуса шнура на некоторой высоте, но аксиальная симметрия при этом сохраняется.

Будем считать, что изменение радиуса столба при перетяжке происходит одновременно на большой длине, так что радиус кривизны магнитных силовых линий при этом значительно превышает радиус столба. Тогда полное давление в плазменном столбе и вне его при искажении формы столба сохраняется. Кроме того, будем считать, что на плазменный столб наложено внешнее магнитное поле в направлении тока, равное по величине  $H_z$ .

Пусть радиус столба  $r_0$  изменился на  $\delta r_0$ . Тогда, поскольку магнитные силовые линии вморожены в плазму, магнитный поток через плазменный столб  $H_z \pi r_0^2$  сохраняется, т. е. изменение продольного магнитного поля внутри плазмы  $\delta H_z$  связано с изменением

радиуса столба  $\delta r_0$  соотношением

$$\frac{\delta H_z}{H_z} + \frac{2\delta r_0}{r_0} = 0.$$

Далее, полный ток, протекающий через плазму, не изменяется при рассматриваемых искажениях. Он равен  $\mathcal{J} = \frac{cr_0}{2} H_\Phi$ , где  $H_\Phi$  — напряженность магнитного поля, создаваемого током. Отсюда находим, что изменение радиуса столба и напряженности магнитного поля связаны соотношением

$$\frac{\delta H_\Phi}{H_\Phi} + \frac{\delta r_0}{r_0} = 0.$$

При изменении радиуса столба внутри плазменного столба возникает дополнительное магнитное давление  $\delta \frac{H_z^2}{8\pi} = \frac{H_z}{4\pi} \delta H_z$ ; изменение магнитного давления вне плазмы составляет  $\frac{H_\Phi}{4\pi} \delta H_\Phi$ . В частности, если радиус столба уменьшается, то внутреннее и внешнее магнитные давления положительны и плазменный столб устойчив. Это имеет место, если внутреннее давление превышает внешнее магнитное давление, т. е.

$$H_z \delta H_z > H_\Phi \delta H_\Phi.$$

В этом случае магнитное давление стремится вернуть плазменный столб к начальному состоянию. Выполнение этого же соотношения требуется в случае увеличения радиуса плазменного столба.

Используя соотношение между изменениями внутреннего и внешнего магнитных полей, которое имеет вид  $\frac{\delta H_z}{H_z} = 2 \frac{\delta H_\Phi}{H_\Phi}$ , получим следующее условие устойчивости плазменного столба:

$$H_z^2 \geq \frac{1}{2} H_\Phi^2.$$

Как видно, действуя внешним магнитным полем на плазменный шнур, возникающий под действием прямого тока, можно сделать этот шнур устойчивым относительно искажений типа перетяжки. При нарушении данного условия может произойти разрыв плазменного шнура в некотором месте. Такая неустойчивость развивается за время перемещения плазмы на расстояние порядка радиуса шнура и относится к быстрым гидродинамическим неустойчивостям.

**Задача 3.27.** Электрический ток протекает через слабоионизованный одноатомный газ, находящийся в промежутке между двумя параллельными бесконечными электродами. Функция распределения электронов по скоростям максвелловская, температура электронов значительно превышает температуру газа и частота упругого соударения электрона с атомами не зависит от скорости электрона. Выяснить устойчивость тока относительно изменений плотности электронов.

При рассматриваемых условиях напряженность электрического поля, определяемая разностью потенциалов между электродами, неизменна. Поэтому дрейфовая скорость электронов  $w = eE/mv$  также не меняется при случайных изменениях плотности тока. Следовательно, величинами, которые могут отклоняться от своего равновесного значения, являются только плотность и температура электронов. Эти величины связаны формулой Саха или подобным соотношением, т. е.  $N_e \sim \exp(-J/T_e)$ , где  $N_e$ ,  $T_e$  — равновесная плотность и температура электронов,  $J$  — потенциал ионизации атомов. Отсюда находим, что отклонение плотности электронов  $N'_e$  и температуры электронов  $T'_e$  от равновесных значений  $N_e$  и  $T_e$  связаны соотношением

$$\frac{N'_e}{N_e} = \frac{J}{T_e} \frac{T'_e}{T_e}$$

и так как температура электронов [много меньше потенциала ионизации атома ( $T_e \ll J$ ), то

$$\frac{N'_e}{N_e} \gg \frac{T'_e}{T_e}.$$

Теперь проследим за изменением выделения и поглощения энергии электронной компоненты при случайном изменении плотности электронов. Если увеличение плотности электронов сопровождается ростом энергии, заключенной в электронной компоненте, то равномерное распределение тока по сечению неустойчиво. При этом случайное увеличение плотности электронов в некоторой области вызовет дальнейшее ее увеличение. При обратном соотношении равномерное распределение тока устойчиво.

Напишем уравнение баланса для изменения энергии, заключенной в электронной компоненте. Энергия, приходящаяся на единицу объема и содержащаяся в электронной компоненте, равна  $\frac{3}{2} N_e T_e$ . Отсюда получаем уравнение баланса для изменения энергии, содержащейся в единице объема электронной компоненты:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} N_e T_e \right) = N_e e E w - 3 N_e \frac{m}{M} v T_e.$$

Первый член в правой части представляет собой энергию, забираемую от поля электронами в единицу времени в единице объема, второй — энергию, отдаваемую газу в единицу времени в единице объема. Эти выражения для случая  $v = \text{const}$  получены в задаче 2.18.

В равновесии производная от средней энергии электронов по времени равна нулю, так что  $eE\omega = 3 \frac{m}{M} v T_e$  (см. задачу 2.19). Это выражение и определяет температуру электронов. Обозначив через  $W_0$  величину  $N_e e E \omega$ , напишем уравнение для изменения параметров электронной компоненты при малом отклонении их от равновесия. На основе вышеприведенного уравнения баланса для энергии электронов имеем

$$\frac{3}{2} T_e \frac{dN'_e}{dt} + \frac{3}{2} N_e \frac{dT'_e}{dt} = \frac{N'_e}{N_e} W_0 - \frac{N'_e}{N_e} W_0 - \frac{T'_e}{T_e} W_0.$$

Поскольку  $T'_e/T_e \ll N'_e/N_e$ , можно пренебречь производной от температуры электронов. Используя связь между возмущениями температуры и плотности электронов, получим

$$\frac{dN'_e}{dt} = - \frac{T'_e}{T_e} \frac{W_0}{3/2 T_e} \equiv - N'_e \frac{T_e}{J} \frac{W_0}{3/2 N_e T_e}.$$

Решив это уравнение, находим, что равномерное распределение тока при рассматриваемых условиях устойчиво. Всякое случайное отклонение плотности электронов от равновесного значения затухает по закону  $N'_e \sim e^{-\gamma t}$ , где показатель затухания равен

$$\gamma = \frac{T_e}{J} \frac{N_e e E \omega}{3/2 N_e T_e} = \frac{2eE\omega}{3J}.$$

**Задача 3.28.** Слабоионизованный газ находится в промежутке между двумя бесконечными электродами, параллельно которым включено постоянное магнитное поле. Между электродами поддерживается постоянная разность потенциалов и протекает электрический ток. Используя условия предыдущей задачи, выяснить возможность возникновения ионизационной неустойчивости, которая связана с развитием ионизации в отдельных областях плазмы.

Рассмотрим сначала характер движения электронов в слабоионизованном газе, которыми, как обычно, определяются возникающие в нем токи. Геометрия рассматриваемой системы, которая характерна для магнитогидродинамического генератора, представлена на рис. 3.4.

Плазменный слой ограничен по координате  $x$ , в этом направлении протекает электрический ток  $\mathbf{j}_0 = -eN_0\boldsymbol{\omega}_0$  ( $N_0$  — равновесная плотность электронов,  $\boldsymbol{\omega}_0$  — их средняя скорость). Направление напряженности электрического поля оказывается расположенным в плоскости  $xy$ . При этом уравнение движения для электронов



имеет вид

$$m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [\boldsymbol{\omega}\mathbf{H}] - m\boldsymbol{\omega}\nu,$$

где  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  — напряженность электрического и магнитного поля соответственно,  $\boldsymbol{\omega}$  — средняя скорость электронов,  $\nu$  — частота столкновения электронов с атомами, которая при заданных условиях не зависит от температуры электронов.

Расписывая это уравнение в стационарном случае для компонент  $x$  и  $y$ , получим

$$\begin{aligned} -eE_x - m\omega_H\omega_y - \nu m\omega_x &= 0, \\ -eE_y + m\omega_H\omega_x - \nu m\omega_y &= 0, \end{aligned}$$

$\omega_H = \frac{eH}{mc}$  — ларморовская частота электрона. Решая эту систему уравнений, находим

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\frac{e(E_x - E_y\omega_H/\nu)}{m\nu(1 + \omega_H^2/\nu^2)}, \\ \omega_y &= -\frac{e(E_x\omega_H/\nu + E_y)}{m\nu(1 + \omega_H^2/\nu^2)}. \end{aligned}$$

Используем тот факт, что ток в направлении оси  $y$  отсутствует, т. е. средняя скорость электронов вдоль оси  $y$  равна нулю. Это приводит к следующей величине напряженности электрического поля, возникающего в направлении оси  $y$ :

$$E_y = -\frac{\omega_H}{\nu} E_x + \frac{m\omega_H\omega_x}{e}.$$

Решение рассматриваемого уравнения удобно записать в векторном виде

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{eE\nu}{m(\omega_H^2 + \nu^2)} + \frac{e[\mathbf{E}\boldsymbol{\omega}_H]}{m(\omega_H^2 + \nu^2)},$$

где вектор  $\boldsymbol{\omega}_H = e\mathbf{H}/mc$ . Поскольку средняя скорость электронов и напряженность электрического поля однозначно связаны, то имеет смысл решить систему уравнений относительно напряженности электрического поля. Из этой системы уравнений получим

$$\mathbf{E} = -\frac{m\nu}{e}\boldsymbol{\omega} - \frac{m}{e}[\boldsymbol{\omega}_H\boldsymbol{\omega}].$$

Теперь проанализируем возможность возникновения ионизационной неустойчивости. Она носит следующий характер. Пусть в некоторой области плазмы увеличилась плотность электронов.

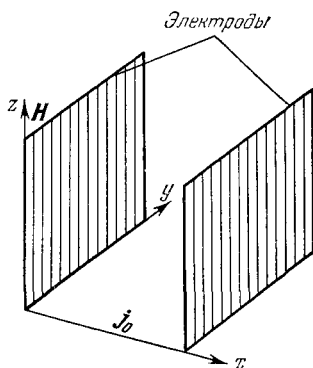


Рис. 3.4. Конфигурация полей в плазме при появлении ионизационной неустойчивости.

В результате процессов, связанных с протеканием тока в плазме, в этой области изменяется выделение и поглощение тепла. Пусть увеличение энергии превышает передачу энергии от электронов газу. Тогда в силу связи между температурой и плотностью электронов плотность электронов будет далее возрастать. В таком случае рассматриваемый процесс неустойчив, так что случайное изменение плотности электронов в некоторой области плазмы приводит к существенному изменению этой величины. Это и есть ионизационная неустойчивость.

Заметим, что развитие ионизационной неустойчивости происходит за времена порядка времени ионизации, т. е. медленно по сравнению с временами движения электронов. С другой стороны, за время развития ионизационной неустойчивости не успевает произойти отвод тепла.

Наша задача при установлении ионизационной неустойчивости — выяснить соотношение между законами изменения энергии электронной компоненты и плотности электронов. Определим эту связь. Тепловыделение единицы объема в единицу времени равно  $\mathbf{jE}$  ( $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля). Пусть мы имеем возмущение плотности электронов  $N'_e$ , которое вызывает возмущение напряженности электрического поля  $\mathbf{E}'$  и средней скорости электронов  $\mathbf{w}'$ . При этом изменение энергии, получаемой электронами в единице объема в единицу времени равно

$$W' = -eN' \omega_0 E_0 - eN_0 \omega' E_0 - eN_0 \omega_0 E',$$

где индексом «0» отмечены невозмущенные значения параметров.

Используем ранее полученное соотношение между напряженностью электрического поля и средней скоростью электронов. Это соотношение в силу линейности связывающих данные параметры уравнений одинаково для невозмущенных и возмущенных параметров и имеет вид

$$\mathbf{E} = -\frac{mv}{e} \boldsymbol{\omega} - \frac{m}{e} [\boldsymbol{\omega}_H \boldsymbol{\omega}].$$

На основе данного соотношения получим для изменения тепловыделения в единице объема в единицу времени за счет рассматриваемого возмущения

$$W' = N' m \omega_0^2 v + 2N_0 m \omega_0 \boldsymbol{\omega}' v.$$

Связь между возмущением плотности  $N'$  и скорости электронов  $\boldsymbol{\omega}'$  получим из уравнения непрерывности для электронов, которое в силу медленности развития неустойчивости представим в стационарном виде:  $\operatorname{div}(N\boldsymbol{\omega}) = 0$ . Подставляя зависимость возмущений от координаты  $\mathbf{r}$  в виде  $e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}$ , где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор рассматриваемого колебания, получим

$$N_0 (\boldsymbol{\omega}' \mathbf{k}) + N' (\boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{k}) = 0.$$

Следующая наша задача — исключить из выражения для изменения получаемой электронами энергии возмущенную скорость электронов  $\boldsymbol{w}'$ . Но для этого необходимо определить направление  $\boldsymbol{w}'$ . Используем тот факт, что возмущение развивается медленно и поэтому является потенциальным, т. е.  $\boldsymbol{E}' = -\nabla\varphi'$  ( $\varphi'$  — возмущение для потенциала электрического поля). Тогда, учитывая, что зависимость возмущенных параметров от координаты  $\varphi' \sim e^{ikr}$ , получим:  $\boldsymbol{E}' = -i\boldsymbol{k}\varphi'$ , т. е. векторы  $\boldsymbol{E}'$  и  $\boldsymbol{k}$  лежат на одной линии (но не всегда совпадают по направлению). На основе этого, используя соотношение между величинами  $\boldsymbol{w}'$  и  $\boldsymbol{E}'$ , получим

$$\boldsymbol{w}' = \text{const} \cdot \left( \boldsymbol{k} - \frac{1}{v} [\boldsymbol{k}\omega_H] \right).$$

Умножая вектор  $\boldsymbol{w}'$  на себя, с точностью до знака найдем значение коэффициента пропорциональности. В результате выражение для вектора возмущения скорости представим в виде

$$\boldsymbol{w}' = \pm \frac{\omega' (v\boldsymbol{k} - [\boldsymbol{k}\omega_H])}{k \sqrt{\omega_H^2 + v^2}}.$$

Подставим это выражение в соотношение, полученное из уравнения непрерывности. Это дает

$$\omega' = \mp \frac{N'}{N_0} \frac{\omega_0}{v} \sqrt{\omega_H^2 + v^2} \cos \alpha,$$

где  $\cos \alpha = k_x/k$  ( $\alpha$  — угол между векторами  $\boldsymbol{k}$  и  $\boldsymbol{w}_0$ ). Используем полученное соотношение в выражении для изменения энергии, приобретаемой электронами в единице объема в единицу времени. Получим

$$W' = N' \frac{m\omega_0^2}{\tau} (1 - 2 \cos^2 \alpha + \omega_H \tau \sin 2\alpha),$$

причем это соотношение не зависит от выбранного знака в выражении для  $\boldsymbol{w}'$ .

Изменение энергии, отдаваемой электронами атомам газа в единице объема за единицу времени, определяется упругими соударениями электронов с атомами газа. Выражение для этой величины было найдено в предыдущей задаче, и с учетом соотношения между возмущениями температуры и плотностью электронов составляет

$$\frac{N'_e}{N_e} W_0 \left( 1 + \frac{T_e}{J} \right),$$

где  $W_0 = m\omega_0^2 v N_e$  — энергия, рассеиваемая электронами в единице объема за единицу времени в результате соударения их с атомами.

С учетом полученных соотношений приходим к следующему уравнению баланса для энергии электронной компоненты, содержащейся в единице объема:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} N_e T_e \right) = N_e' m \omega_0^2 v \left( \frac{\omega_H}{v} \sin 2\alpha - \cos^2 \alpha - \frac{T_e}{J} \right).$$

Проанализируем выражение, находящееся в скобках в правой части полученного уравнения. Если это выражение положительно, то всякое случайное отклонение плотности электронов от равновесного значения продолжает увеличиваться, т. е. возникает неустойчивость. Данное выражение как функция направления волнового вектора для возникающего возмущения (или угла  $\alpha$ ) имеет максимум при  $\operatorname{tg} 2\alpha = -\omega_H/v$ . Для такого возмущения уравнение баланса для плотности энергии электронной компоненты приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} N_e T_e \right) = N_e' m \omega_0^2 v \left( \frac{\sqrt{\omega_H^2 + v^2}}{v} - 1 - \frac{T_e}{J} \right).$$

Отсюда следует, что ионизационная неустойчивость при рассматриваемой конфигурации полей имеет порог. При заданных условиях задачи она имеет место, если  $\omega_H/v \geq \sqrt{2T_e/J}$ . При больших значениях параметра  $\omega_H/v$  ионизационная неустойчивость возникает в случае возмущений, распространяющихся под углом  $45^\circ$  к направлению тока; при малых значениях этого параметра наиболее неустойчивые возмущения распространяются почти перпендикулярно к току.

**Задача 3.29.** Исследовать возникновение токово-конвективной неустойчивости для слабоионизованной плазмы положительного столба газового разряда. Плазма имеет цилиндрическую симметрию, вдоль оси цилиндра включено постоянное магнитное поле  $H_0$  и электрическое поле  $E_0$ , создающее ток электронов в газоразрядной плазме. Плазма неоднородна по радиусу, электроны и ионы плазмы замагничены.

Рассматриваемую неустойчивость можно представить себе следующим образом. Допустим, в некотором сечении мы повернули электроны относительно ионов. Такое движение вызывает появление азимутального электрического поля, которое поддерживает возникновение этого движения. Теперь разберемся в характере рассматриваемой неустойчивости. Она развивается достаточно медленно, так что при этом квазинейтральность плазмы сохраняется. Допустим, что мы создали малую неоднородность плазмы в направлении тока, т. е. плотность плазмы в соседних сечениях цилиндра различна. Поскольку через плазму протекает ток, который должен сохраняться, то уменьшение плотности плазмы в некотором

сечении должно компенсироваться возникновением дополнительного электрического поля.

Теперь допустим, что мы создали «косое» возмущение плотности, так что для его компенсации возникает электрическое поле, направленное под некоторым углом к оси цилиндра. Тогда азимутально направленная компонента электрического поля заставит вращаться электроны и ионы, и при соответствующем направлении возмущения будет его усиливать, т. е. приведет к возникновению неустойчивости.

Давайте получим дисперсионное соотношение для рассматриваемых возмущений. Плазма квазинейтральна и замагничена, так что электроны и ионы движутся во внешнем магнитном поле со скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = c \frac{[\mathbf{E}H_0]}{H_0^2},$$

где  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля. Магнитным полем волны в силу медленности возмущения можно пренебречь. Кроме того, по этой причине поле потенциально, т. е.  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ,  $\varphi$  — потенциал электрического поля.

Используем условие сохранения плотности тока:  $j_z = \Sigma E_z$ , где  $\Sigma$  — проводимость плазмы,  $E_z$  — напряженность электрического поля вдоль оси  $z$ , которая направлена параллельно оси цилиндра. Напряженность электрического поля является суммой напряженностей внешнего поля и поля волны. Учитывая, что все характеристики волны пропорциональны  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ , имеем для напряженности электрического поля  $E_z = E_0 - ik_z\varphi$ . Проводимость плазмы пропорциональна плотности электронов, так что

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma' = \Sigma_0 \left( 1 + \frac{N'_e}{N_0} \right),$$

где  $\Sigma_0$ ,  $N_0$  — проводимость плазмы и плотность электронов при отсутствии возмущений;  $\Sigma'$ ,  $N'_e$  — те же величины, связанные с рассматриваемыми возмущениями. С учетом полученных соотношений условие сохранения плотности тока в направлении поля представим в виде

$$-\Sigma_0 ik_z\varphi + \Sigma' E_0 = 0, \quad \text{или} \quad -ik_z\varphi + \frac{N'_e}{N_0} E_0 = 0$$

Уравнение непрерывности для электронов имеет вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N_e \boldsymbol{\omega}) - \mathcal{D}_a \frac{\partial^2 N_e}{\partial z^2} = 0.$$

Здесь  $\mathcal{D}_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии для плазмы. При этом мы пренебрегли диффузионным потоком электронов в направлении, перпендикулярном магнитному полю, считая диффузионный поток электронов в этом направлении малым. Огра-

ничиваясь членами первого порядка малости и учитывая зависимость возмущенных параметров от времени и координаты, преобразуем это уравнение к виду

$$(-i\omega + k_z^2 \mathcal{D}_a) N_e' + \omega_x \frac{\partial N_0}{\partial x} = 0,$$

где ось  $x$  выбрана в направлении наиболее резкого изменения равновесной плотности.

Из ранее полученных соотношений получим выражения для азимутальной скорости электронов

$$\omega_x = \frac{cE_y}{H_0} = -\frac{c}{H_0} i k_y \Phi = -\frac{k_y c E_0}{k_z H_0} \frac{N_e'}{N}.$$

Подставив его в полученное уравнение, приходим к следующему дисперсионному соотношению:

$$i\omega = k_z^2 \mathcal{D}_a + \frac{k_y c E_0}{k_z H_0 L}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{L} = -\frac{d \ln N_0}{dx}.$$

Отсюда следует, что рассматриваемая неустойчивость ( $\text{Im } \omega < 0$ ) развивается при соответствующем знаке отношения  $k_y/k_z$ . Эта неустойчивость имеет порог по электрическому полю. Что касается магнитного поля, то на него с самого начала наложено условие, что оно достаточно велико.

При рассматриваемых соотношениях оптимальные условия для раскачки неустойчивости отвечают напряженности магнитного поля, для которой ларморовская частота вращения ионов сравняется с частотой соударения ионов с частицами газа. Токовоконвективная неустойчивость имеет порог, который связан с диффузией заряженных частиц. Именно, если процесс диффузии происходит быстро, то диффузия рассасывает возмущения в плазме, не позволяя им развиваться.

**Задача 3.30.** Выяснить возможность появления неустойчивости в газоразрядной слабоионизованной плазме, в которой ток задается внешней цепью. Считать, что возникающее в плазме возмущение переносится вместе с током.

При заданных условиях мы имеем слабоионизованную плазму, находящуюся в электрическом поле. Под действием этого поля в плазме поддерживается ток электронов. При этом, если сопротивление внешней цепи значительно превосходит сопротивление разрядного промежутка, то ток в разрядном промежутке не изменяется со временем. В такой системе могут возникнуть возмущения плотности электронов или других характеристик плазмы, которые переносятся вместе с электронами. Наша задача — выяснить устойчивость системы относительно таких возмущений.

Будем считать данные возмущения, которые распространяются вместе с током по оси  $x$ , малыми. Используем уравнение непре-

рывности и уравнение Пуассона. Имеем

$$\frac{\partial N'_e}{\partial t} + \text{div } j_e = 0, \quad \frac{\partial E'}{\partial x} = -4\pi e N'_e,$$

где  $N'_e$ ,  $E'$  — изменение плотности электронов и напряженности электрического поля за счет возмущения,  $j_e$  — ток электронов, так что

$$j_e = -N_e \omega - \mathcal{D} \frac{\partial N_e}{\partial x}.$$

Знак минус в первом слагаемом учитывает, что дрейфовая скорость электронов направлена в сторону, противоположную электрическому полю,  $N_e - N_0 + N'_e$  — полная плотность электронов,  $\omega$  — дрейфовая скорость и  $\mathcal{D}$  — коэффициент диффузии электронов. Подставляя зависимости для возмущений  $N'_e$ ,  $E' \sim \exp(ikx - i\omega t)$  и считая возмущения малыми, получим дисперсионное соотношение для рассматриваемой волны:

$$\omega = k\omega - i\mathcal{D}k^2 - i4\pi e N_0 \frac{d\omega}{dE}.$$

При этом мы использовали, что  $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{d\omega}{dE} \frac{\partial E'}{\partial x}$ .

Анализируя полученное дисперсионное соотношение, находим, что описываемые им волны распространяются с дрейфовой скоростью электронов. Если  $d\omega/dE > 0$ , то эти волны затухают, при обратном знаке производной длинноволновые колебания раскачиваются. По мере развития такой неустойчивости возникают так называемые электрические домены.

Физическую природу рассматриваемой неустойчивости можно понять из анализа рис. 3.5, где представлена зависимость дрейфовой скорости от напряженности электрического поля. Пусть плотность потока электронов равна  $j_0 = \omega_0 N_0$ , где  $N_0$  — средняя плотность электронов в плазме. Для простоты будем пренебрегать диффузией электронов, так что плотность потока электронов равна  $j = \omega N_e$ . При заданных условиях дрейфовая скорость электронов  $\omega_0$  может иметь место при напряженностях поля  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ . Если поле в промежутке равно  $E_1$  или  $E_3$ , то малое увеличение плотности электронов вызывает рост поля, а следовательно, и дрейфовой скорости. Тем самым плотность потока электронов возрастает. Но поскольку это запрещено внешними условиями, то такое возмущение будет затухать.

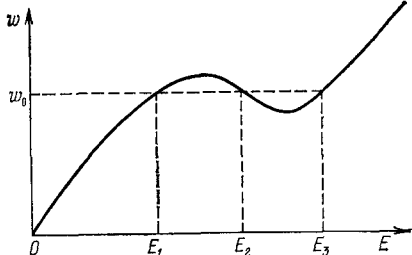


Рис. 3.5. Зависимость дрейфовой скорости электронов от напряженности электрического поля при возникновении электрического домена.

Другая ситуация имеет место, если напряженность поля равна  $E_2$ . Тогда рост плотности электронов в заданной области вызывает уменьшение поля, а следовательно, уменьшение дрейфовой скорости. Поэтому мы можем сконструировать решение, где электрическое поле возмущения сосредоточено в промежутке от  $E_1$  до  $E_3$ , а плотность потока электронов равна заданной,  $\omega_0 N_0$ . Такое решение и описывает электрический домен.

**Задача 3.31.** Электронный пучок распространяется вдоль оси заземленного металлического цилиндра радиуса  $R$  и в конце своего пути проходит через заземленные сетки. Определить максимальный ток пучка, считая, что сечением пучка является окружность радиуса  $r$ , причем  $r \ll R$ .

Данный способ движения электронного пучка является наиболее распространенным. Электроны создаются в электронной пушке и движутся в вакуумном пространстве, которое заключено в металлическую оболочку. Это препятствует накоплению зарядов на стенках, которое могло бы внести искажения в движения пучка. Обычно пучок помещается в продольное магнитное поле, что препятствует размыванию пучка. На выходе из вакуумного промежутка пучок пересекает поверхность с потенциалом, равным потенциалу стенок. Поскольку потенциал пучка отличается от потенциала стенок, это в конечном итоге может сказаться на характере прохождения электронов через такую эквипотенциальную поверхность. Если разность потенциалов достаточно велика, часть электронов должна отразиться назад. Таким образом, существует предельный ток, который в состоянии пропустить рассматриваемая система. Найдем его.

Напряженность электрического поля, которое создается электронами пучка на расстоянии  $R$  от центра пучка, согласно теореме Гаусса равна

$$E = \frac{4\pi n}{2\pi R} = \frac{2I}{Rv},$$

где  $n$  — число электронов, приходящихся на единицу длины пучка,  $I$  — ток электронов в пучке,  $v$  — скорость электронов в пучке. Отсюда находим разность потенциалов между пучком и стенками ( $E = -d\varphi/dr$ ):

$$\varphi = \frac{2I}{ev} \ln \frac{R}{r}.$$

После прохождения заземленной сетки или поверхности с потенциалом стенок электроны теряют энергию  $e\varphi$ . Пусть энергия электронов при входе в вакуумный промежуток составляла  $eV_0$ , т. е.  $V_0$  — потенциал, в котором были ускорены электроны при выходе из источника электронов. Тогда скорость электронов на



выходе составит

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m} (V_0 - \varphi)}.$$

Используя соотношение для величины тока, имеем

$$I = \frac{e v \varphi}{2 \ln(R/r)} = \frac{e \sqrt{(2e/m) (V_0 - \varphi)} \varphi}{2 \ln(R/r)}.$$

Как видно, максимальное значение тока, который может пройти через систему, составляет

$$I_{\max} = \frac{e}{3} \left( \frac{2e}{3m} \right)^{1/2} \frac{V_0^{3/2}}{\ln(R/r)}$$

и соответствует потенциалу пучка относительно стенок в области сетки или при прохождении пучком области с потенциалом стенок  $\varphi_{\max} = \frac{2}{3} V_0$ . Этот максимальный ток носит название предельного тока Бурсиана или порога неустойчивости Бурсиана.

Проанализируем физический характер рассматриваемого эффекта. Чем больший ток при заданной энергии электронов мы пытаемся пропустить в представленной системе, тем больший потенциал приобретает электронный пучок относительно стенок. По мере увеличения тока электронов мы доходим до предела, когда запирающий потенциал возвращает часть электронов назад и тем самым ограничивает ток электронов, прошедших через систему. Это имеет место, если ток системы превышает  $I_{\max}$ . Поскольку  $I = I_{\max}$  соответствует  $\varphi = \frac{2}{3} V_0$ , то отражение части электронов при  $I > I_{\max}$  отвечает возникновению неустойчивости, в результате которой запирающий потенциал возрастает скачком от  $\frac{2}{3} V_0$  до  $V_0$  и отражает часть электронов. При этом мы неявно считали электроны моноэнергетическими. На самом деле имеется некоторый разброс по скоростям, и запирающий потенциал становится таким, что он отражает определенную часть электронов, ограничивая тем самым ток прошедших электронов.

**Задача 3.32.** Показать, что при условиях предыдущей задачи при электронном токе пучка, равном предельному току Бурсиана, возникает неустойчивость. Эта неустойчивость приводит к скачкообразному изменению запирающего потенциала.

Используем установленную в предыдущей задаче связь между током электронов пучка и потенциалом пучка:

$$I = \frac{2\pi e v \varphi}{\ln(R/r)}.$$

Допустим, что при данном токе пучка произошла флуктуация потенциала пучка относительно потенциала стенки—произошло увеличение этой величины на  $\delta\varphi$ . Проследим, к каким последствиям это приведет. Увеличение запирающего потенциала

вызовет уменьшение скорости электронов:

$$\delta v = - \sqrt{\frac{e}{2m(V_0 - \varphi)}} \delta \varphi = - \frac{v \delta \varphi}{2(V_0 - \varphi)}.$$

Поскольку плотность тока в пучке остается постоянной, то уменьшение скорости электронов в пучке приведет к увеличению плотности электронов  $n_e$  в пучке:

$$\frac{\delta n_e}{n_e} = - \frac{\delta v}{v} = \frac{\delta \varphi}{2(V_0 - \varphi)}.$$

Возрастание плотности электронов в пучке вызовет увеличение разности потенциалов  $\delta \varphi$  между пучком и стенками:

$$\delta \varphi' = \varphi \frac{\delta n_e}{n_e} = \frac{\varphi}{2(V_0 - \varphi)} \delta \varphi.$$

Нетрудно видеть, что неустойчивость имеет место при  $\delta \varphi' > \delta \varphi$ , когда первоначальная флуктуация потенциала приводит к дальнейшему его нарастанию. Это имеет место при

$$\frac{\varphi}{2(V_0 - \varphi)} > 1, \quad \text{или} \quad \varphi \geq \frac{2}{3} V_0.$$

Развитие этой неустойчивости приводит к возникновению на выходе пучка виртуального катода с потенциалом  $V_0$ , который отражает часть электронов и тем самым ограничивает ток электронов на выходе.

### § 3. Нелинейные явления в плазме

Развитие неустойчивостей в плазме приводит к нарастанию определенных видов колебаний, пока на этих колебаниях не сосредоточится заметная энергия. Дальнейшая судьба развития этих колебаний определяется процессами взаимодействия их с плазмой. Интенсивность этих процессов существенно зависит от амплитуды волн, так что при исследовании задач такого типа мы сталкиваемся с нелинейными явлениями в плазме. Важную роль нелинейные явления играют и в процессах распространения волн. Нелинейные явления влияют на профиль распространяющейся волны и определяют характер ее эволюции.

**Задача 3.33.** Исследовать распад плазменного колебания с частотой  $\omega_0$  и волновым вектором  $k_0$  на плазменное колебание меньшей частоты и ионный звук.

Рассмотрим развитие ионного звука и плазменного колебания на фоне исследуемого плазменного колебания. Пусть напряженность электрического поля начального плазменного колебания равна

$$E = E_0 \cos(k_0 x - \omega_0 t),$$

причем в нулевом приближении мы считаем амплитуду колебания напряженности электрического поля  $E_0$  и другие характеристики рассматриваемой волны действительными величинами. При этом скорость  $v_0$  электрона под действием рассматриваемой волны, как это следует из уравнения движения  $m \frac{dv_0}{dt} = -eE$ , равна

$$v_0 = u_0 \sin(k_0 x - \omega_0 t), \quad \text{где } u_0 = \frac{eE_0}{m\omega_0}.$$

Пусть одновременно с рассматриваемым плазменным колебанием в системе возбуждается другое плазменное колебание и ионный звук, причем амплитуды этих колебаний малы по сравнению с амплитудой первоначального плазменного колебания. Исследуем их развитие во времени, учитывая взаимодействие этих колебаний друг с другом и с первоначальным плазменным колебанием. При этом мы учтем, что скорость движения ионов значительно меньше скорости движения электронов, что позволит нам разделить эти движения.

Имеем уравнения движения и уравнение непрерывности для ионов:

$$M \frac{dv_i}{dt} = eE,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N'_i + N_0 \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0,$$

где  $M$  — масса иона,  $v_i$  — скорость ионов,  $N_0$  — равновесная плотность заряженных частиц,  $N'_i$  — связанная с колебаниями часть плотности ионов,  $E$  — напряженность электрического поля, которое создается за счет рассматриваемых колебаний плазмы. Исключая из этих уравнений скорость ионов, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} N'_i + \frac{eN_0}{M} \frac{\partial E}{\partial x} = 0. \quad (3.32)$$

Напряженность электрического поля найдем из уравнения движения электронов, усредняя его по быстрым осцилляциям. Одномерное уравнение Эйлера (1.18) для электронов имеет вид

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} + \frac{1}{mN} \frac{\partial p_e}{\partial x} + \frac{eE}{m} = 0. \quad (3.33)$$

Давление электронного газа равно  $p_e = NT_e$  ( $T_e$  — температура электронов,  $N$  — плотность электронов). При усреднении по быстрым осцилляциям первое слагаемое в представленном уравнении дает нуль. Представив скорость электрона в виде

$$v_e = v_0 + v'_e,$$

где  $v'_e$  — скорость электрона под действием слабой плазменной волны; мы оставим во втором слагаемом после усреднения по-

быстрым осцилляциям лишь перекрестный член

$$\overline{v_e \frac{\partial v_e}{\partial x}} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial v_e^2}{\partial x}} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial}{\partial x} (v_0 + v_e')^2} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{v_0 v_e'}$$

здесь черта сверху означает усреднение по быстрым осцилляциям. В третьем слагаемом мы будем считать, что  $T_e = \text{const}$  (быстрый обмен энергией в ионном звуке). При этом за время движения ионов электроны успевают перераспределяться, поддерживая квазинейтральность плазмы. Поэтому при усреднении по быстрым осцилляциям отклонение плотности электронов от равновесной такое же, как и у ионов, и третье слагаемое в уравнении Эйлера равно

$$\frac{1}{mN} \frac{\partial p_e}{\partial x} = \frac{T_e}{mN_0} \frac{\partial N_i'}{\partial x} \quad (N \approx N_0).$$

Таким образом, усредненное по быстрым осцилляциям уравнение Эйлера (3.33) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \overline{(v_0 v_e')} + \frac{T_e}{mN_0} \frac{\partial N_i'}{\partial x} + \frac{eE}{m} = 0.$$

Подставляя выраженную отсюда напряженность электрического поля в уравнение (3.32), получим

$$\frac{\partial^2 N_i'}{\partial t^2} - \frac{T_e}{M} \frac{\partial^2 N_i'}{\partial x^2} - \frac{mN_0}{M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{(v_0 v_e')} = 0. \quad (3.34)$$

Если в полученном уравнении пренебречь последним слагаемым, то, учитывая гармоническую зависимость плотности ионов от времени и координаты, мы придем к дисперсионному соотношению (3.10), устанавливающему связь между частотой  $\omega_i$  и волновым вектором  $k_i$  ионного звука:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{T_e}{M}} k_i.$$

Для учета взаимодействия ионного звука с плазменными колебаниями необходимо проследить за движением электронов в поле слабой плазменной волны.

Для этой цели воспользуемся уравнением Максвелла (см. задачу 3.9) для электрического поля слабой плазменной волны, учитывая, что ее магнитное поле равно нулю. Имеем

$$\frac{\partial E'}{\partial t} + 4\pi j' = 0,$$

где  $E'$  — электрическое поле слабой плазменной волны,  $j'$  — создаваемая ею плотность тока.

При анализе этого уравнения для простоты будем пренебрегать тепловым движением электронов, которое приводит лишь к малой

поправке для частоты колебаний (см. формулу (3.7)). В этом случае в выражении для плотности тока можно пренебречь изменением плотности электронов под действием давления электронов за счет рассматриваемой плазменной волны, и плотность электронов будет равна  $N_e + N'_i$  ( $N_e$  включает в себя равновесную плотность заряженных частиц и изменение плотности под действием первоначальной плазменной волны,  $N'_i$  — колебания плотности, связанные с движением ионов). Соответственно, скорость электронов равна  $v_0 + v'_e$  ( $v_0$ ,  $v'_e$  — скорость электронов, движущихся под действием первоначальной и слабой плазменной волны). Отсюда для плотности тока, создаваемого слабой плазменной волной, получаем

$$j' = -e(N_e + N'_i)(v_0 + v'_e) + eN_e v_0 = -eN_e v'_e - eN'_i v_0,$$

причем квадратичными членами по малой амплитуде колебаний мы пренебрегли. Рассматриваемое уравнение Максвелла принимает вид

$$\frac{\partial E'}{\partial t} - 4\pi e N'_i v_0 - 4\pi e N_e v'_e = 0.$$

Для уравнения движения электронов имеем

$$\frac{m dv'_e}{dt} = -eE'.$$

Исключая из этих уравнений напряженность электрического поля слабой плазменной волны, приходим к следующему уравнению для скорости электронов под действием слабой плазменной волны

$$\frac{\partial^2 v'_e}{\partial t^2} + \omega_e^2 v'_e + \frac{N'_i}{N_e} \omega_e^2 v_0 = 0. \quad (3.35)$$

Здесь  $\omega_e = (4\pi N_e e^2/m)^{1/2}$  — частота плазменных колебаний, полученная в пренебрежении тепловым движением электронов. Как видно, не учитывая взаимодействие слабой плазменной волны с первоначальной плазменной волной и ионным звуком (это соответствует пренебрежению последним членом в уравнении (3.35)), мы получим, что частота слабой плазменной волны совпадает с плазменной частотой, что отвечает использованным предположениям.

Решим совместно систему уравнений (3.34), (3.35). Зададим искомые величины в виде

$$v_0 = u_0 \sin(k_0 x - \omega_0 t), \quad v_e = a \cos(k_e x - \omega_e t), \\ N'_i = b N_0 \cos(k_i x - \omega_i t),$$

где  $a$ ,  $b$  — медленно меняющиеся амплитуды колебаний,  $\omega_e$ ,  $k_e$  — частота и волновой вектор слабой плазменной волны;  $\omega_i$ ,  $k_i$  — частота и волновой вектор ионного звука,  $N_0$  — равновесная плот-

ность заряженных частиц, причем в уравнении (3.35) полагаем  $N_e = N_0$ . Учитывая медленность изменения амплитуды волны и одинаковую зависимость слагаемых от координаты и времени, из уравнений (3.34), (3.35) получаем

$$\omega_0 = \omega_e + \omega_i, \quad k_0 = k_e + k_i. \quad (3.36)$$

Это условие аналогично параметрическому резонансу, когда мы имеем систему двух связанных осцилляторов. Поэтому неустойчивость, к которой мы далее придем, является одним из типов параметрической неустойчивости.

С учетом медленности изменения амплитуд колебаний и условий (3.36) система уравнений (3.34), (3.35) переходит в следующие уравнения для амплитуд колебаний:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{\omega_e}{4} u_0 b, \quad \frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{mk_i}{4M\omega_i} u_0 a.$$

Решение этих уравнений соответствует раскачке колебаний ( $a, b \sim e^{\gamma t}$ ) с инкрементом

$$\gamma = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m\omega_e}{M\omega_i}} u_0 k_i = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m\omega_e}{M\omega_i} \frac{eE_0}{m\omega_0}} k_i. \quad (3.37)$$

Таким образом, плазменное колебание неустойчиво и может распасться на плазменное колебание меньшей частоты и ионный звук. Такая неустойчивость носит название распадной. При этом инкремент нарастания новых колебаний пропорционален амплитуде распадающейся волны.

**Задача 3.34.** При большой амплитуде волны \*) возникает зависимость частоты волны от ее амплитуды, которая имеет вид  $\omega(k) + \alpha E^2$ , где  $\omega(k)$  — зависимость частоты волны от волнового вектора  $k$  в пределе малой амплитуды,  $E$  — характеристика, связанная с амплитудой колебаний (например, напряженность электрического поля, создаваемого волной). Рассмотрим одномерный волновой пакет, составленный из волн с малым разбросом  $\Delta k$  волновых векторов ( $\Delta k \ll k$ ). При большой амплитуде волны в результате взаимодействия этот пакет может сжаться или распасться на ряд отдельных волновых сгустков. Это явление носит название модуляционной неустойчивости. Показать, что модуляционная неустойчивость может иметь место при выполнении условия

$$\alpha \frac{\partial v_{\text{гр}}}{\partial k} < 0,$$

где  $v_{\text{гр}}$  — групповая скорость волны.

\*) Имеются в виду различные колебания плазмы, такие, как плазменные колебания, ионный звук, магнитозвуковые волны и т. д.

Рассмотрим расплывание одномерного пакета волн. Имеем для амплитуды волны в точке  $x$ :

$$a(x, t) = \sum_k a(k) \exp(ikx - i\omega t)$$

( $a(k)$  — амплитуда волны с волновым вектором  $k$ ). Пусть  $k_0$  — средний волновой вектор рассматриваемого пакета. Проведем разложение частоты волны:

$$\begin{aligned} \omega = \omega(k) + \alpha E^2 &= \omega(k_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_0} (k - k_0)^2 + \alpha E^2 = \\ &= \omega_0 + v_{\text{гр.}}(k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial v_{\text{гр.}}}{\partial k} \right|_{k_0} (k - k_0)^2 + \alpha E^2, \end{aligned}$$

где  $\omega_0 = \omega(k_0)$ ,  $v_{\text{гр.}} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0}$  — групповая скорость волны. Используя это разложение, получим

$$a(x, t) = \sum_k a(k) \exp \left[ i(k - k_0)(x - x_0) - ik_0 x_0 - \right. \\ \left. - i(k - k_0)^2 \left. \frac{\partial v_{\text{гр.}}}{\partial k} \right|_{k_0} t - i\alpha E^2(x) t \right],$$

где  $x_0 = v_{\text{гр.}} t$ .

Из полученного выражения следует, что пакет невзаимодействующих волн, который движется с групповой скоростью, расплывается на расстояние порядка его размера  $l \sim 1/\Delta k$  за время порядка  $\tau \sim \left( \Delta k^2 \left. \frac{\partial v_{\text{гр.}}}{\partial k} \right|_{k_0} \right)^{-1}$ . Последнее слагаемое в экспоненте, отвечающее нелинейному взаимодействию волн, приводит к модуляции волнового пакета. При этом сжатие волнового пакета или его распад на отдельные волновые сгустки может иметь только в случае, если последнее и предпоследнее слагаемые в экспоненте имеют разный знак. Только в этом случае нелинейное взаимодействие волн может компенсировать расплывание пакета. Отсюда находим, что модуляционная неустойчивость может развиваться только при выполнении условия

$$\alpha \left. \frac{\partial v_{\text{гр.}}}{\partial k} \right|_{k_0} < 0.$$

Это условие носит название критерия Лайтхилла.

**Задача 3.35.** Исследовать распространение нелинейных длинноволновых колебаний типа звуковой волны в плазме. Дисперсионное соотношение для этих волн имеет вид

$$\omega = v_{\text{гр.}} k \left( 1 - \frac{r_0^2 k^2}{2} \right), \quad (3.38)$$

причем для рассматриваемых длин волн  $kr_0 \ll 1$ . Получить для таких волн уравнение, учитывающее дисперсию и нелинейность.

Проанализируем уравнение Эйлера (1.18) для скорости движения частиц в волне:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{F}{M} = 0.$$

Здесь  $v(x, t)$ —скорость частиц в продольной волне, направленная вдоль оси  $x$ ;  $F$ —сила, действующая на частицу плазмы;  $M$ —масса частицы. В линейном приближении, считая скорость частиц в волне малой по сравнению с характерными скоростями, представим  $v = v_{\text{гр}} + v'$ , так что  $v_{\text{гр}}$ —скорость волны,  $v'$ —скорость частиц плазмы в системе координат, где волна покоится, причем  $v' \ll v_{\text{гр}}$ . Поэтому в линейном приближении имеем

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v_{\text{гр}} \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{F}{M} = 0.$$

При этом последнее слагаемое является линейным оператором относительно  $v'$ . В гармоническом приближении

$$v' \sim \exp(ikx - i\omega t).$$

Определим вид оператора  $F/M$ , потребовав, чтобы уравнение Эйлера привело нас к дисперсионному соотношению, указанному в условии задачи. В результате получим

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v_{\text{гр}} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{r_0^2}{2} \frac{\partial^3 v'}{\partial x^3} \right) = 0.$$

Последнее слагаемое учитывает слабую дисперсию длинноволновых колебаний. Теперь учтем нелинейность волн небольшой амплитуды. Она определяется вторым слагаемым, в котором в линейном приближении мы заменили скорость частицы плазмы  $v$  на скорость волны  $v_{\text{гр}}$ . Вернем это слагаемое к первоначальному виду, включив таким образом в уравнение нелинейность. Получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v_{\text{гр}} r_0^2}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0. \quad (3.39)$$

Это уравнение получено Кортвегом и де Вризом в 1895 г. при анализе распространения волн на мелкой воде.

Уравнение Кортвега—де Вриза одновременно учитывает нелинейность и дисперсию волн и поэтому является удобным модельным уравнением при исследовании нелинейных диссипативных процессов. При условии слабого нарушения нелинейности это уравнение описывает распространение ряда длинноволновых колебаний в плазме, дисперсионное соотношение для которых дается формулой (3.38). В частности, сюда относится ионный звук, для которого дисперсионное соотношение (3.9) совпадает с (3.38) при замене параметра  $r_0$  в формуле (3.38) на радиус Дебая—Гюккеля.



**Задача 3.36.** На основании уравнения Кортевега—де Вриза исследовать распространение отдельной волны в плазме.

Уравнение Кортевега—де Вриза имеет физически интересный класс решений, описывающий отдельные волны. Такие волны носят название уединенных волн или солитонов. Особенность солитонов связана с тем, что отвечающие им возмущения не размываются в пространстве со временем, а сохраняют свою форму. Это определяется характером уравнения Кортевега—де Вриза. Дисперсия волн приводит к тому, что более короткие волны в соответствии с дисперсионным соотношением (3.38) распространяются с меньшей скоростью. Поэтому в линейной среде всякое возмущение размывается из-за разных скоростей волн. Однако слабая нелинейность волны может скомпенсировать ее дисперсию и сохранить форму волны.

Убедимся, что это имеет место для волн, описываемых уравнением Кортевега—де Вриза. Рассмотрим волну, распространяющуюся со скоростью  $u$ , так что зависимость скорости частиц в плазме от координаты и времени имеет вид

$$v = f(x - ut).$$

Отсюда

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x},$$

так что уравнение Кортевега—де Вриза (3.39) приводится к виду

$$(v - u) \frac{dv}{dx} + \frac{v_{\text{гп}} r_0^2}{2} \frac{d^3 v}{dx^3} = 0.$$

Считая, что вдали от волны возмущение отсутствует, т. е. при  $x \rightarrow \infty$  имеем  $v = 0$ ,  $d^2 v / dx^2 = 0$ , понизим порядок уравнения:

$$\frac{v_{\text{гп}} r_0^2}{2} \frac{d^2 v}{dx^2} = uv - \frac{v^2}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что среди решений этого уравнения имеются решения  $v = a \operatorname{ch}^{-2} \alpha x$ . Подставляя это решение в уравнение, находим входящие в него параметры. Это дает

$$v = \frac{3u}{\operatorname{ch}^2(x/r_0) \sqrt{u/2v_{\text{гп}}}}.$$

Как видно, с ростом амплитуды волна сужается, так что размер области, занятой возмущением, обратно пропорционален корню квадратному из амплитуды волны.

Таким образом, существуют стационарные решения уравнения Кортевега—де Вриза, описывающие нерасплывающуюся уединенную волну—солитон. Солитоны могут образовываться в процессе развития некоторого начального возмущения во времени.

Соотношение между амплитудой  $a$  и размером  $1/\alpha$  солитона таково, что величина  $a/\alpha^2$  не зависит от его амплитуды. Если первоначальная амплитуда возмущения относительно мала, то это соотношение установится в процессе расплывания пакета и далее такое возмущение сведется в основном к одному солитону. Если первоначальная амплитуда возмущения относительно велика, то в процессе эволюции это возмущение распадается на несколько солитонов. Таким образом, солитоны являются не только устойчивыми стационарными возмущениями в системе, но и играют важную роль в процессе эволюции произвольных возмущений в нелинейной диспергирующей среде.

**Задача 3.37.** Исследовать распространение нелинейной ионно-звуковой волны.

Для нахождения соотношений между параметрами, характеризующими ионный звук, мы должны использовать уравнения Эйлера, непрерывности и Пуассона, которые в линейном приближении привели к уравнениям (3.8) и к дисперсионному соотношению для ионного звука (3.9). Эти уравнения без использования линейного приближения можно записать в виде системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (N_i v_i) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 4\pi e (N_e - N_i). \end{aligned}$$

Здесь  $v_i$  — скорость ионов в волне,  $\varphi$  — потенциал поля,  $N_e$ ,  $N_i$  — плотность электронов и ионов соответственно. Как и ранее, учтем высокую подвижность электронов, благодаря которой электроны находятся в равновесии с полем. Тогда в соответствии с формулой Больцмана

$$N_e = N_0 \exp(e\varphi/T_e),$$

где  $N_0$  — средняя плотность заряженных частиц,  $T_e$  — температура электронов.

Рассмотрим движение ионов в виде установившейся волны, так что параметры плазмы  $v_i$ ,  $N_i$ ,  $\varphi$  зависят от координаты и времени по закону  $f(x-ut)$ , где  $u$  — скорость распространения волны. В этом случае искомая система уравнений приводится к виду

$$\begin{aligned} -u \frac{dv_i}{dx} + v_i \frac{dv_i}{dx} + \frac{e}{M} \frac{d\varphi}{dx} &= 0, \\ \frac{d}{dx} [N_i(v_i - u)] &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} &= 4\pi e \left[ N_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right) - N_i \right]. \end{aligned}$$

Считая, что вдали от волны возмущение отсутствует, так что  $N_i = N_0$ ,  $v_i = 0$ ,  $\varphi = 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , получим из первых двух уравнений \*):

$$\frac{v_i^2}{2} - uv_i + \frac{e\varphi}{M} = 0, \quad N_i = N_0 \frac{u}{u - v_i}.$$

Первое уравнение дает

$$v_i = u \pm \sqrt{u^2 - 2e\varphi/M}.$$

На основе этого из второго уравнения имеем

$$N_i = N_0 \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2e\varphi/M}}.$$

Подставляя это соотношение в последнее уравнение системы уравнений для ионного звука, получим

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi e N_0 \left[ \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right) - \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2e\varphi/M}} \right].$$

Полученное уравнение описывает поведение потенциала электрического поля в нелинейной ионно-звуковой волне. По своей форме оно эквивалентно уравнению движения частицы, в котором роль координаты играет величина  $\varphi$ , а роль времени — величина  $x$ . Используя общие свойства этого уравнения, можно понизить его порядок, умножив это уравнение на  $d\varphi/dx$  и взяв интеграл. Это дает

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - 4\pi N_0 T_e \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right) - 4\pi N_0 M u \sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{M}} = \text{const.}$$

Считая, что вдали от волны потенциал поля волны  $\varphi$  и напряженность электрического поля волны  $-d\varphi/dx$  одновременно обращаются в нуль, получим

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + 4\pi N_0 T_e \left[ 1 - \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right) \right] + 4\pi N_0 M u \left( u - \sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{M}} \right) = 0.$$

Это решение описывает уединенную волну, ибо в граничных условиях было использовано, что вдали от рассматриваемой области возмущение отсутствует. Полученное решение позволяет определить профиль солитона и связь между его параметрами

\*) Отметим, что из второго уравнения в силу условия  $N_i > 0$  следует, что  $v_i < u$ .

Использование этого обстоятельства в первом уравнении дает  $\varphi \geq 0$ , т. е. потенциал электрического поля в рассматриваемой ионно-звуковой волне всегда положителен.

при различных амплитудах волны. На основании этого уравнения установим, в частности, связь между максимальным потенциалом в волне  $\varphi_{\max}$  и скоростью ее распространения  $u$ . Для этого положим в последнем уравнении  $d\varphi/dx=0$ ,  $\varphi=\varphi_{\max}$ . Для удобства введем безразмерные переменные  $\xi=e\varphi_{\max}/T_e$ ,  $\eta=Mu^2/2T_e$ , с использованием которых искомое уравнение принимает вид

$$1 - e^{\xi} + 2\eta(1 - \sqrt{1 - \xi/\eta}) = 0.$$

Проанализируем это уравнение в предельных случаях. При  $\xi \rightarrow 0$ , т. е. для ионно-звуковой волны малой амплитуды, имеем  $\eta = 1/2$ , откуда получаем фазовую скорость ионно-звуковой волны малой амплитуды:  $u = \sqrt{T_e/M}$ , что находится в полном соответствии с формулой (3.10). В другом предельном случае максимальной амплитуды имеем  $\xi = \eta$ . Это дает уравнение для  $\xi$ :

$$1 - e^{\xi} + 2\xi = 0.$$

Решая это уравнение, находим, что  $\xi = 1,26$ , т. е.  $e\varphi_{\max} = 1,26 T_e$  и  $u = 1,58\sqrt{T_e/M}$ . При более высоких значениях амплитуды волны потенциал в центре волны становится слишком большим, так что ионы отражаются от горба волны. В результате волна опрокидывается и движение ионов распадается на отдельные потоки. Таким образом, рассматриваемое волновое движение для ионного звука, распространяющееся с единой скоростью, существует при ограниченных значениях амплитуды волны и скорости ее распространения.

**Задача 3.38.** Получить дисперсионное соотношение для плазменных волн в случае, когда плотность энергии, заключенной в плазменных колебаниях плазмы, заметна. Считать, что напряженность электрического поля, обусловленного плазменными колебаниями, мало изменяется на расстояниях порядка длины волны колебаний.

В рассматриваемом случае колебания плазмы оказывают влияние на распределение электронов, что в конечном итоге отражается и на характере его колебаний. Введем величину

$$W(r) = E^2/8\pi$$

— плотность энергии плазменных колебаний ( $E(r)$  — напряженность электрического поля, обусловленного колебаниями). Полное давление электронной компоненты складывается из давления за счет теплового движения  $p = NT_e$  ( $N$  — плотность,  $T$  — температура плазмы) и давления со стороны плазменных колебаний  $W(r)$ , оно постоянно во всем объеме плазмы. При этом постоянство полного давления электронов устанавливается со скоростью звука электронов, которая порядка их тепловой скорости. С такой

скоростью устанавливается равновесная плотность электронов  $N(r)$ , которая может быть найдена из соотношения

$$NT_e + W(r) = N_0 T_e.$$

Здесь  $N_0$  — плотность электронов на бесконечности, где в нашем предположении плазменные колебания отсутствуют; температуру электронов мы считаем неизменной в пространстве.

Перейдем к исследованию дисперсионного соотношения для плазменных волн. Мы можем его получить обычным образом (см. задачу 3.2), однако, применяя все операции к ограниченной области пространства, где плотность электронов мало меняется. В результате получим дисперсионное соотношение (3.7),

$$\omega^2(r) = \omega_0^2(r) + 3 \frac{T_e}{m} k^2,$$

где плазменная частота  $\omega_0(r)$  меняется в пространстве в соответствии с изменением плотности электронов. Используя соотношение для плотности электронов и вводя  $\omega_0^2$  при плотности электронов на бесконечности, получим

$$\omega^2(r) = \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{W(r)}{T_e} \right] + 3 \frac{T_e}{m} k^2.$$

Учитывая, что первое слагаемое значительно больше двух других, перепишем это соотношение в виде

$$\omega^2(r) = \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{W(r)}{T_e} + 6r_D^2 k^2 \right],$$

где  $r_D = (T/8\pi N e^2)^{1/2}$  — радиус Дебая — Гюккеля для плазмы на бесконечности, причем полагаем, что температуры электронов и ионов равны.

Проанализируем полученное дисперсионное соотношение. Если плотность энергии, запасенная в плазменных колебаниях, достаточно велика,  $W(r)/T_e > 6r_D^2 k^2$ , то колебания с данной частотой не могут уйти на бесконечность, ибо колебания с такой частотой там не могут существовать. Поэтому при больших плотностях энергии плазменные колебания могут сосредоточиться в ограниченной области пространства и оказаться связанными. Такие образования носят название солитонов. Заметим, что поскольку  $r_D k \ll 1$ , то солитоны могут образовываться в случае, когда плотность энергии колебаний много меньше плотности тепловой энергии электронов.

Отметим еще одну особенность, связанную с образованием солитонов. Попадая в область с пониженной плотностью электронов, согласно результату задачи 3.33 плазменные колебания распадаются на плазменные колебания более низкой частоты и ионный

звук. Тем самым они оказываются запертыми в области пространства с пониженной плотностью электронов, а возникающие при этом солитоны являются устойчивыми образованиями.

**Задача 3.39.** Проверить выполнение критерия Лайтхилла для развитых плазменных колебаний.

Проанализируем полученное в предыдущей задаче дисперсионное соотношение для ленгмюровских колебаний в случае, когда в этих колебаниях сосредоточена заметная энергия. Имеем

$$\omega_0^2(r) = \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{E^2(r)}{16\pi N_0 T_e} + 6r_D^2 k^2 \right],$$

где  $r_D$  — радиус Дебая — Гюккеля. Представляя  $E(r)$  как  $E_0 \cos \omega t$  и усредняя по времени, приведем это соотношение к виду

$$\omega_0(r) = \omega_0 \left( 1 - \frac{E_0^2}{64\pi N_0 T_e} + 3r_D^2 k^2 \right).$$

Перепишем соотношение в виде

$$\omega_0(r) = \omega(k) + \alpha E_0^2,$$

где  $\omega(k) = \omega_0 (1 + 3r_D^2 k^2)$ ,  $\alpha = -\omega_0 / 64\pi N_0 T_e$ .

Групповая скорость для ленгмюровских колебаний равна

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 6 \frac{T_e}{m} k,$$

так что

$$\alpha \frac{\partial v_{\text{гр}}}{\partial k} = -\frac{3\omega_0}{32\pi N_0 m}.$$

Таким образом, критерий Лайтхилла в рассматриваемом случае выполняется, поэтому нелинейные ленгмюровские колебания могут образовать уединенную волну — солитон.

**Задача 3.40.** Проанализировать нелинейные свойства электрического домена.

Электрический домен представляет собой возмущение плотности электронов и электрического поля в плазме, которые распространяются с дрейфовой скоростью электронов (см. задачу 3.30). Электрический домен возникает при полях  $E$ , при которых плазма обладает отрицательной дифференциальной проводимостью, т. е.  $dw/dE < 0$  ( $w$  — дрейфовая скорость электрона; см. рис. 3.5). Наша задача — определить распределение электрического поля и плотности электронов в электрическом домене в направлении его распространения в случае, когда начальная напряженность

электрического поля соответствует спадающей части кривой  $\omega(E)$ . Пусть начальная напряженность поля соответствует величине  $E_2$  на рис. 3.5. Определим распределение поля в электрическом домене, считая, что начальное возмущение отвечает увеличению поля.

В нашем распоряжении уравнение Пуассона и условие постоянства плотности потока электронов, которая определяется характеристиками внешней цепи. Учитывая, что электрическое поле направлено в сторону, противоположную направлению дрейфовой скорости электрона, имеем

$$-\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(N_0 - N_e),$$

$$j_0 \equiv -N_0\omega(E_2) = -N_e\omega(E) - \mathcal{D} \frac{\partial N_e}{\partial x},$$

где  $N_e$  — плотность электронов,  $N_0$  — невозмущенная плотность электронов,  $\mathcal{D}$  — коэффициент диффузии электронов. Исключая из этих уравнений плотность электронов, получим уравнение для распределения электрического поля в домене:

$$\mathcal{D} \frac{d^2 E}{dx^2} - \omega(E) \frac{dE}{dx} - 4\pi e N_0 [\omega(E) - \omega(E_2)] = 0.$$

Это уравнение решим с начальным условием  $E = E_2$  при  $x = 0$ .

Будем считать, что диффузия играет вспомогательную роль, так что на первом этапе исключим ее из рассмотрения. Тогда уравнение для напряженности электрического поля примет вид

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi e N_0 \left[ \frac{\omega(E_2)}{\omega(E)} - 1 \right].$$

Решение этого уравнения представлено на рис. 3.6. Как видно, небольшое увеличение значения  $E$  ведет к тому, что выражение в квадратных скобках становится положительным, что вызывает дальнейший рост  $E$  согласно данному уравнению. Это продолжается до тех пор, пока напряженность электрического поля не достигнет значения  $E_3$ , для которого  $\omega(E_2) = \omega(E_3)$ . В этой точке  $dE/dx = 0$ , так что далее напряженность поля меняться не будет. Таким образом, данное решение переводит систему из неустойчивого состояния  $E_2$  в устойчивое  $E_3$ .

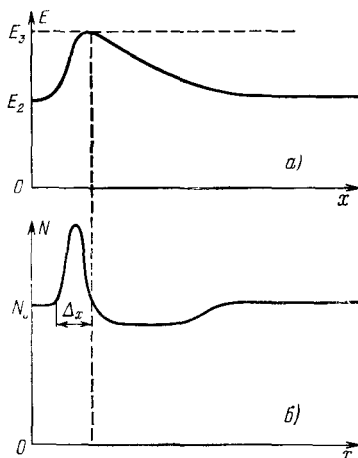


Рис. 3.6. Распределение электрического поля (а) и плотности электронов (б) в электрическом домене.

Такое решение, однако, не удовлетворяет другим реальным требованиям. Увеличение напряженности поля требует роста напряжения на промежутке; кроме того, частично нарушается квазинейтральность плазмы. Эти противоречия отпадут, как только мы включим диффузию электронов и потребуем, чтобы  $E \rightarrow E_2$  при  $x \rightarrow \infty$ . Полученное в этом случае решение представлено на рис. 3.6 сплошной кривой.

Распределение поля асимметрично, ибо мы считали диффузию слабой, так что фронт электрического домена пологий. Характерный размер переднего фронта электрического домена порядка  $\mathcal{D}/\omega$ , характерный размер заднего фронта при использованном предположении слабой диффузии определяется из уравнения, где диффузия исключена, и составляет

$$\Delta x = \int_{E_2}^{E_3} \frac{dE}{4\pi e N_0} \left[ \frac{\omega(E_2)}{\omega(E)} - 1 \right]^{-1}.$$



## ПРОЦЕССЫ С УЧАСТИЕМ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ГАЗЕ

Данная глава посвящена исследованию процессов, протекающих с участием заряженных частиц в газе — движению их в газе во внешних полях, образованию и разрушению заряженных частиц в слабоионизованной плазме. При этом нас будут интересовать характеристики этих процессов (а не их влияние на свойства и кинетику слабоионизованной плазмы). Основное содержание этой главы связано с вычислением параметров исследуемых процессов.

### § 1. Движение ионов в газе во внешнем поле

Поток заряженных частиц, движущихся в газе во внешних полях, согласно формуле (1.76) может быть представлен в виде

$$\mathbf{j} = \omega N - \mathcal{D} \nabla N,$$

где  $N$  — плотность частиц,  $\omega$  — скорость направленного движения,  $\mathcal{D}$  — коэффициент диффузии. При этом предполагается, что длина свободного пробега частиц мала по сравнению с характерными размерами задачи. Если направленное движение заряженных частиц обусловлено постоянным электрическим полем, то удобно ввести подвижность  $K$  заряженных частиц в газе

$$K = \omega/E,$$

где  $E$  — напряженность электрического поля. При малой напряженности поля подвижность заряженных частиц не зависит от него.

**Задача 4.1.** Получить выражение для подвижности ионов в газе при малых напряженностях электрического поля в приближении Чепмена — Энскога.

При малых напряженностях электрического поля энергия, получаемая ионом от поля за время между двумя соударениями, порядка  $eE\lambda \sim eE/N\sigma$  ( $\lambda \sim 1/N\sigma$  — длина свободного пробега) и много меньше средней тепловой энергии  $T$ . Это дает

$$eE/TN\sigma \ll 1. \quad (4.1)$$

При этом условии дрейфовая скорость иона много меньше его тепловой скорости. Поэтому функция распределения ионов мало отличается от максвелловской  $\varphi(v)$  и может быть представлена

в виде

$$f(v) = \varphi(v) [1 + v \cos \theta \psi(v)], \quad (4.2)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $v$  и  $E$ .

Разложение (4.2) совместно с соотношением (1.22) может быть положено в основу приближенного определения подвижности. Если в формуле (4.2) функцию  $\psi(v)$  считать не зависящей от скорости столкновения частиц и найти эту величину на основе соотношения (1.22), то получим следующее выражение для подвижности  $K_1$ , которое отвечает первому приближению Чепмена — Энского:

$$K_1 = \frac{3\sqrt{\pi}e}{8N\bar{\sigma}(2T\mu)^{1/2}}, \quad \omega_1 = K_1 E, \quad (4.3)$$

где

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sigma^*(x) e^{-x^2} dx, \quad x = \frac{\mu g^2}{2T}. \quad (4.4)$$

Обычно подвижность относят к плотности частиц газа  $N = 2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ , которая реализуется при температуре газа  $0^\circ\text{C}$  и давлении 1 атм. Если в формуле (4.3) температуру газа измерять в градусах по Кельвину, приведенную массу  $\mu$  — в единицах протонных масс, а среднее сечение  $\bar{\sigma}$  — в единицах  $\text{па}^2$  ( $0,88 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$ ), эта формула примет вид

$$K_1 = \frac{2,1 \cdot 10^4 \text{ см}}{\bar{\sigma} (\mu T)^{1/2}} \frac{\text{В}}{\text{см}}. \quad (4.5)$$

**Задача 4.2.** Определить дрейфовую скорость ионов в газе, если частота столкновения ионов с частицами газа не зависит от скорости соударения.

Дрейфовая скорость — средняя скорость ионов в газе. Для ее нахождения воспользуемся интегральным соотношением (1.22), которое представляет собой равенство между изменениями импульса иона в единицу времени за счет взаимодействия с электрическим полем и в результате соударения с частицами газа и имеет вид

$$eE = \mu N \langle g_x g \sigma^*(g) \rangle. \quad (4.6)$$

Здесь  $E$  — напряженность электрического поля,  $\mu$  — приведенная масса иона и атома,  $N$  — плотность частиц газа,  $g$  — относительная скорость соударения,  $\sigma^*$  — диффузионное сечение рассеяния иона на частице газа, ось  $x$  направлена вдоль электрического поля.

Введем частоту столкновения иона с частицей газа  $\nu = Ng\sigma^*(g)$ . Учитывая, что согласно условию задачи частота столкновения не зависит от скорости соударения и что средняя скорость частиц газа равна нулю, получим из данного соотно-

шения для средней скорости ионов

$$\omega = eE/\mu v. \quad (4.7)$$

Заметим, что это выражение для дрейфовой скорости ионов справедливо для любых напряженностей электрического поля.

**Задача 4.3.** Определить подвижность ионов, движущихся в чужом газе.

Если ион движется в чужом газе, то рассеяние иона на атомах или молекулах газа определяется в основном поляриза- ционным взаимодействием иона с атомом  $U(R) = -\beta e^2/2R^4$  ( $\beta$  — поляризуемость атома,  $R$  — расстояние между ядрами атома и иона). В этом случае характер рассеяния иона на атоме можно представить себе следующим образом. При малых прицельных параметрах столкновения происходит захват иона атомом. Он сопровождается сближением этих частиц до малых расстояний, порядка размеров этих частиц, при которых они расталкиваются. Считая, что при таких сближениях рассеяние иона и атома изотропно, и пренебрегая рассеянием при больших прицельных пара- метрах, когда нет захвата иона атомом, находим, что диффузионное сечение рассеяния частиц в этом случае равно сечению захвата иона атомом.

Вычислим сечение захвата иона атомом. Найдем зависимость между прицельным параметром столкновения  $\rho$  и расстоянием наибольшего сближения иона и атома  $r_{\min}$  в рассматриваемом случае. При расстоянии наибольшего сближения в системе центра инерции частиц нормальная компонента скорости отсутст- вует, так что в силу закона сохранения энергии имеем

$$\frac{\mu g_{\tau}^2}{2} + U(r_{\min}) = \frac{\mu g^2}{2},$$

где  $\mu$  — приведенная масса иона и атома,  $g_{\tau}$  — относительная скорость иона и атома при расстоянии наибольшего сближения,  $g$  — относительная скорость иона и атома при бесконечном расстоянии между ними,  $U(r_{\min}) = -\frac{\beta e^2}{2r_{\min}^4}$  — потенциал взаимо- действия иона и атома. Из закона сохранения момента коли- чества движения в системе центра инерции имеем  $\mu g_{\tau} r_{\min} = \mu g \rho$ . Отсюда, исключая  $g_{\tau}$  из полученных соотношений, находим

$$\rho^2 = r_{\min}^2 + \frac{\beta e^2}{\mu g^2 r_{\min}^2}.$$

На рис. 4.1 представлена зависимость прицельного пара- метра как функции от расстояния наибольшего сближения для рассматриваемого потенциала взаимодействия. Как видно, при рассматриваемом характере движения возможны соударения с прицельными параметрами столкновения, превышающими некоторое

значение  $\rho_{\text{захв}}$ , которое определяется выражением

$$\rho_{\text{захв}} = 2 \left( \frac{\beta e^2}{\mu g^2} \right)^{1/2}.$$

При меньших значениях прицельного параметра столкновения при рассматриваемом потенциале взаимодействия частиц имеет

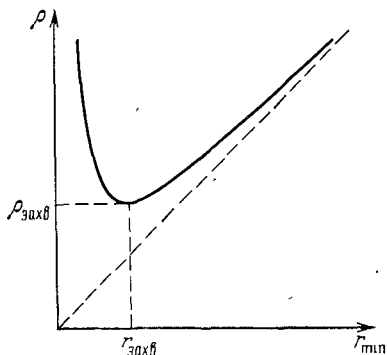


Рис. 4.1. Зависимость прицельного параметра столкновения от расстояния наибольшего сближения иона и атома. При  $r_{\text{min}} < r_{\text{захв}}$  ион и атом оказываются в связанном состоянии, при  $\rho < \rho_{\text{захв}}$  имеет место захват атомом, который сопровождается их сильным сближением.

место сближение частиц до  $r_{\text{min}} = 0$ , т. е. одна частица падает на другую. При этом сечение захвата иона атомом равно

$$\sigma_{\text{захв}} = \pi \rho_{\text{захв}}^2 = 2\pi \left( \frac{\beta e^2}{\mu g^2} \right)^{1/2}.$$

Поскольку диффузионное сечение рассеяния иона на атоме при рассматриваемых предположениях совпадает с сечением захвата иона атомом, то частота столкновения иона и атома равна

$$\nu = 2\pi N \left( \frac{\beta e^2}{\mu} \right)^{1/2}.$$

Она не зависит от скорости соударения, так что, воспользовавшись формулой (4.7), получим для дрейфовой скорости иона в рассматриваемом случае

$$\omega = \frac{E}{2\pi N (\beta\mu)^{1/2}}. \quad (4.8)$$

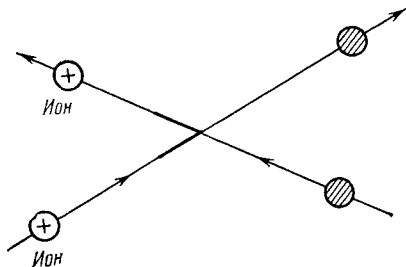
Эта формула достаточно близка к точной при поляризационном взаимодействии иона с атомом, но не совпадает с ней, ибо характер рассеяния был учтен приближенно. Точная формула дает значение для дрейфовой скорости, примерно на 10% меньше, чем формула (4.8).

**Задача 4.4.** Определить подвижность атомных ионов в собственном газе в первом приближении Чепмена — Энского.

Подвижность ионов в собственном газе определяется резонансной перезарядкой иона на атоме. Сечение резонансной перезарядки иона на собственном атоме значительно больше сече-

ния упругого рассеяния этих частиц даже при тепловых энергиях столкновения. Поэтому при исследовании дрейфа атомных ионов в собственном газе процессом упругого рассеяния иона на атоме мы можем пренебречь, а процесс переноса заряда носит эстафетный характер (эффект Сена) и показан на рис. 4.2. Согласно этому рисунку частица, которая первоначально была атомом,

Рис. 4.2. Характер рассеяния иона при резонансной перезарядке. Частицы движутся по прямолинейным траекториям, но поскольку после перезарядки ионом становится бывший атом, то это и характеризует рассеяние иона.



после перезарядки становится ионом, так что ион рассеивается, хотя упругого рассеяния частиц при этом не происходит.

Определим диффузионное сечение рассеяния иона на атоме, если наряду с упругим рассеянием имеет место резонансная перезарядка. Пусть  $W(\rho)$  — вероятность резонансной перезарядки при прицельном параметре соударения  $\rho$ . Тогда согласно определению диффузионного сечения рассеяния частиц имеем

$$\sigma^* = \int_0^{\infty} [1 - W(\rho)] (1 - \cos \theta) 2\pi\rho d\rho + \int_0^{\infty} W(\rho) (1 - \cos \theta') 2\pi\rho d\rho.$$

Здесь  $\theta$  — угол рассеяния в системе центра инерции для ядра, с которым первоначально был связан ион,  $\theta'$  — угол в системе центра инерции между направлением скорости этого ядра до столкновения и направлением скорости другого ядра после столкновения; угол  $\theta'$  характеризует рассеяние иона в случае, если происходит резонансная перезарядка. При этом  $\theta' + \theta = \pi$ , так что

$$\sigma^* = \int_0^{\infty} 2\pi\rho d\rho (1 - \cos \theta) + 2 \int_0^{\infty} \cos \theta W(\rho) \cdot 2\pi\rho d\rho.$$

Отсюда находим, что если упругое рассеяние иона на атоме отсутствует ( $\theta = 0$ ), то диффузионное сечение рассеяния иона на атоме равно

$$\sigma^* = 2 \int_0^{\infty} W(\rho) 2\pi\rho d\rho = 2\sigma_{\text{рез}}, \quad (4.9)$$

где  $\sigma_{\text{рез}}$  — сечение резонансной перезарядки иона на атоме.

Подставим это соотношение в выражение (4.3) для подвижности и учтем слабую зависимость сечения резонансной перезарядки

рядки от скорости соударения. Получим для подвижности ионов в собственном газе в первом приближении Чепмена—Энскога:

$$K_1 = \frac{3 \sqrt{\pi} e}{16 \sqrt{T M} N \sigma_{\text{рез}}}, \quad (4.10)$$

где  $M = 2\mu$  — масса иона или атома. В силу слабой зависимости сечения резонансной перезарядки от скорости, в найденную формулу для подвижности будем подставлять сечение резонансной перезарядки при такой скорости, для которой подынтегральное выражение в формуле (4.4) для усредненного диффузионного сечения максимально. Эта скорость, при которой берется сечение резонансной перезарядки, равна ( $\mu g^2/2T = 2,5$ ):

$$g = \sqrt{5T/\mu} = \sqrt{10T/M}.$$

**Задача 4.5.** Определить подвижность иона в собственном газе при больших напряженностях электрического поля.

В рассматриваемом случае напряженность электрического поля удовлетворяет соотношению, которое противоположно соотношению (4.1), и дрейфовая скорость иона значительно превышает тепловую скорость атомов. Поэтому атомы можно считать неподвижными, и ион останавливается после каждой перезарядки, а затем набирает скорость за счет взаимодействия с электрическим полем. Вероятность  $W(t)$  того, что через время  $t$  после очередной перезарядки не произошло последующего столкновения с атомом, определяется уравнением

$$\frac{dW}{dt} = -\nu W, \quad W = \exp\left(-\int_0^t \nu dt'\right). \quad (4.11)$$

Здесь  $\nu = N v_x \sigma_{\text{рез}}$ ;  $\sigma_{\text{рез}}$  — сечение резонансной перезарядки,  $v_x$  — относительная скорость столкновения, которая соответствует компоненте скорости иона вдоль поля, ибо другие компоненты скорости малы. Скорость иона  $v_x$  к моменту  $t$  после очередного соударения определяется из уравнения движения иона  $M \frac{dv_x}{dt} = eE$  и равна  $v_x = \frac{eE}{M} t$ . Переходя в уравнении (4.11) от времени к скорости, найдем относительное число ионов, которые обладают скоростью  $v_x$ :

$$f(v_x) = C \exp\left[-\int_0^{v_x} N v'_x \sigma_{\text{рез}}(v'_x) \frac{M}{eE} dv'_x\right], \quad v_x > 0. \quad (4.12)$$

Это и есть функция распределения ионов по скоростям, причем константа  $C$  может быть найдена из условия нормировки функции распределения. Подвижность иона при больших напряженностях электрического поля, найденная на основе функции распределения (4.12) в предположении, что сечение резонансной пере-

зарядки не зависит от скорости соударения, равна

$$K = \left( \frac{2e}{\pi M N E \sigma_{\text{рез}}} \right)^{1/2}.$$

**Задача 4.6.** Определить функцию распределения по энергиям для атомных ионов, движущихся в собственном газе во взаимно перпендикулярных постоянных электрическом и магнитном полях. Средняя скорость ионов значительно превышает тепловую скорость атома, а частота ларморовской прецессии иона много больше характерной частоты перезарядки иона. Вычислить среднюю скорость направленного движения ионов.

Процесс торможения ионов, как и в предыдущей задаче, определяется резонансной перезарядкой иона на атоме. После каждой перезарядки ионом становится бывший атом, так что перезарядка приводит к остановке атома (по условию задачи средняя скорость иона много больше тепловой скорости атома). Далее ион набирает скорость под действием внешних полей, пока следующая перезарядка не приведет его к остановке. Вероятность  $W$  того, что очередная перезарядка не произойдет через время  $t$  после предыдущей, определяется уравнением

$$dW/dt = -\nu W$$

и равна

$$W = \exp\left(-\int_0^t \nu dt'\right).$$

Здесь  $\nu = v/\lambda$  — частота перезарядки,  $\mathbf{v}$  — скорость частицы,  $\lambda = 1/N\sigma_{\text{рез}}$  — длина свободного пробега иона ( $N$  — плотность атомов,  $\sigma_{\text{рез}}$  — сечение резонансной перезарядки иона на атоме), которая не зависит от скорости соударения. Поскольку момент времени однозначно определяет скорость иона, то функция распределения ионов по скоростям равна

$$f(v) dv = \exp\left(-\int_0^t \nu dt'\right) \nu dt.$$

Определим скорость иона к моменту времени  $t$  после очередной перезарядки. Направим напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  по оси  $x$ , магнитного поля  $\mathbf{H}$  — по оси  $z$ . Получим уравнение движения иона

$$d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a} + [\mathbf{v}\omega_0],$$

где

$$\mathbf{a} = e\mathbf{E}/M, \quad \omega_0 = e\mathbf{H}/Mc,$$

$M$  — масса иона. Это уравнение в компонентах имеет вид

$$\frac{dv_x}{dt} = a + v_y\omega_0, \quad \frac{dv_y}{dt} = -v_x\omega_0, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Решая данную систему уравнений при начальном условии  $v = 0$  при  $t = 0$ , получим

$$v_x = \frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad v_y = -\frac{a}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t), \quad v_z = 0,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{2a}{\omega_0} \left| \sin \frac{\omega_0 t}{2} \right|.$$

Отсюда получаем для функции распределения ионов, учитывая, что частота ларморовской прецессии велика:

$$f(v) dv = e^{-v_0/v} v_0 dt,$$

где  $v_0 = 4a/\pi\lambda\omega_0$ . С помощью этого выражения находим дрейфовую скорость иона ( $v_0 \ll \omega_0$ )

$$\bar{v}_x = av_0/\omega_0^2, \quad \bar{v}_y = -a/\omega_0.$$

Дрейфовая скорость иона велика по сравнению с тепловой скоростью атомов, т. е.

$$a/\omega_0 \gg \sqrt{T/M}.$$

**Задача 4.7.** Найти функцию распределения ионов по поперечным компонентам скорости по отношению к направлению электрического поля в случае, когда рассеяние ионов на атомах газа обусловлено резонансной перезарядкой и упругое рассеяние при соударении иона и атома несущественно.

В рассматриваемом случае резонансная перезарядка при соударении иона со скоростью  $\mathbf{v}$  и атома со скоростью  $\mathbf{v}'$  приводит к тому, что после соударения ион обладает скоростью  $\mathbf{v}'$ , а атом — скоростью  $\mathbf{v}$ . Будем считать, что функция распределения ионов по скоростям может быть представлена в виде произведения функции распределения  $f(v_x)$  по продольной и  $F(v_\perp)$  по поперечной компонентам скорости. Здесь  $v_x$  — компонента скорости иона в направлении электрического поля, а  $v_\perp$  — компонента скорости иона в перпендикулярном к полю направлении. Используя характер рассеяния иона на атоме, имеем следующее уравнение баланса для функции распределения ионов по поперечным компонентам скорости:

$$\begin{aligned} F(v_\perp) \int \sigma_{\text{рез}}(|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|) |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f(v_x) \varphi(v'_x) \varphi(v'_\perp) dv_x d\mathbf{v}' = \\ = \varphi(v_\perp) \int \sigma_{\text{рез}}(|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|) |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f(v'_x) F(v'_\perp) \varphi(v_x) dv_x d\mathbf{v}'. \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_{\text{рез}}$  — сечение резонансной перезарядки иона на атоме, зависящее только от относительной скорости соударения,  $\varphi(v_x)$ ,  $\varphi(v_\perp)$  — максвелловские функции распределения ионов или атомов по продольной и поперечной к полю компонентам скорости. Данное соотношение выражает равенство между числом ионов с данным значением поперечной компоненты скорости, которые унич-



тожаются в результате резонансной перезарядки (левая часть) и которые образуются в результате этого процесса (правая часть соотношения).

Нетрудно видеть, что решением полученного уравнения является максвелловская функция распределения ионов по скоростям:

$$F(v_{\perp}) = \varphi(v_{\perp}) \equiv \frac{M}{T} \exp\left(-\frac{Mv_{\perp}^2}{2T}\right),$$

где  $T$  — температура газа,  $M$  — масса иона или атома. Проанализируем физический смысл этого решения.

Единственное предположение, которое при этом использовалось, — функция распределения ионов по скоростям может быть представлена в виде произведения функции распределения от продольной компоненты скорости на функцию распределения от поперечной компоненты скорости. Тем самым мы считали, что поперечное движение ионов не зависит от их продольного движения, ибо поперечная скорость образующегося иона не зависит от его продольной скорости. Поскольку внешнее поле действует только на продольное движение ионов, то поперечное движение ионов при рассматриваемых условиях не зависит от напряженности поля и функция распределения ионов по поперечным компонентам скорости совпадает с соответствующей функцией распределения атомов, из которых ионы образовались. Поэтому функция распределения ионов по поперечной компоненте скорости является максвелловской, причем это имеет место для любой напряженности электрического поля.

**Задача 4.8.** В пределе малых напряженностей электрического поля вычислить подвижность ионов, движущихся в собственном газе, во втором приближении Чепмена — Энского.

В рассматриваемом случае рассеяние иона на атоме приводит к обмену скоростями между ними. Поэтому кинетическое уравнение для функции распределения ионов имеет относительно простой вид, что делает разложение Чепмена — Энского менее громоздким. Далее мы проведем это разложение во втором приближении.

Кинетическое уравнение для функции распределения ионов по скоростям имеет следующий вид:

$$\frac{eE}{M} \frac{\partial f}{\partial v_x} = \int [f(\mathbf{v}') \varphi(v) - f(\mathbf{v}) \varphi(v')] |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \sigma_{\text{рез}} N d\mathbf{v}'. \quad (4.13)$$

Здесь внешнее поле  $\mathbf{E}$  направлено вдоль оси  $x$ ,  $f(v)$  — функция распределения ионов по скоростям,  $\varphi(v)$  — максвелловская функция распределения атомов, причем обе функции нормированы на единицу;  $N$  — плотность атомов,  $\sigma_{\text{рез}}$  — сечение резонансной перезарядки иона на атоме, которое далее мы будем считать не зависящим от относительной скорости соударения.

Представим функцию распределения ионов в виде разложения по малому параметру  $eE\lambda/T$ , где  $\lambda = (N\sigma_{\text{рез}})^{-1}$  — длина пробега ионов в атомном газе,  $T$  — температура газа:

$$f(\mathbf{v}) = \varphi(v) \left[ 1 + \frac{eE\lambda}{T} v_x \psi(v) \right].$$

В первом приближении при разложении по рассматриваемому малому параметру кинетическое уравнение преобразуется к виду

$$v_x \varphi(v) = \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \varphi(v) \varphi(v') [v_x \psi(v) - v'_x \psi(v')] d\mathbf{v}'. \quad (4.14)$$

При этом было использовано, что  $\frac{\partial \varphi(v)}{\partial v_x} = -\frac{Mv_x}{T} \varphi(v)$ . Далее наша задача состоит в определении функции  $\psi(v)$ . В соответствии с приближением Чепмена — Энскога представим эту функцию в виде разложения по полиномам Сонина:

$$\psi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n S_{3/2}^n \left( \frac{mv^2}{2T} \right).$$

При этом  $S_{3/2}^0 = 1$ ,  $S_{3/2}^1 = 5/2 - x$ . С учетом такого представления функции распределения ионов определим подвижность иона:

$$\begin{aligned} K = \frac{\langle v_x \rangle}{E} &= \frac{1}{E} \int v_x d\mathbf{v} \frac{eE\lambda}{T} v_x \psi(v) = \\ &= \frac{2e\lambda}{3M} \int_0^{\infty} x \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2} e^{-x} dx \sum_{n=0}^{\infty} a_n S_{3/2}^n(x) = \frac{e\lambda}{M} a_0, \end{aligned}$$

где  $x = \frac{Mv^2}{2T}$ .

Таким образом, подвижность иона выражается через коэффициент при первом члене разложения функции по полиномам Сонина.

В общем случае, используя приближение Чепмена — Энскога, мы будем умножать левую и правую части уравнения (4.14) на величину  $\frac{Mv_x}{T} S_{3/2}^n(x)$  и интегрировать по скоростям ионов. В результате получим систему уравнений для коэффициентов  $a_n$ , которую мы обрезаем определенным числом членов, в зависимости от выбранного приближения. Решение системы уравнений для выбранного приближения позволяет определить в этом приближении искомые величины.

Проделаем выкладки в левой части уравнения. Имеем

$$\int v_x \varphi d\mathbf{v} \frac{Mv_x}{T} S_{3/2}^m(x) = 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2} e^{-x} dx S_{3/2}^m(x) = \delta_{m0},$$

где, как и ранее,  $x = Mv^2/2T$ , был использован явный вид максвелловской функции распределения  $\varphi(v)$  и символ Кронекера  $\delta_{m0} = 1$ , если  $m=0$  и  $\delta_{m0}=0$ , если  $m \neq 0$ . С учетом используемого разложения и данного результата, представляем уравнение (4.14) в виде следующей системы уравнений для коэффициентов разложения  $a_n$ :

$$\delta_{m0} = \int \frac{Mv_x}{T} S_{3/2}^m \left( \frac{Mv^2}{2T} \right) |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \varphi(v) \varphi(v') \times \\ \times \sum_n a_n \left[ v_x S_{3/2}^n \left( \frac{Mv^2}{2T} \right) - v'_x S_{3/2}^n \left( \frac{Mv'^2}{2T} \right) \right] d\mathbf{v} d\mathbf{v}'.$$

Представляя подынтегральное выражение в симметричном виде, имеем для полученной системы уравнений (заметим, что коэффициенты  $a_n$  имеют размерность  $\sqrt{M/T}$ ):

$$\sum_n a_n \frac{M}{2T} \int \left[ v_x S_{3/2}^m \left( \frac{Mv^2}{2T} \right) - v'_x S_{3/2}^m \left( \frac{Mv'^2}{2T} \right) \right] \times \\ \times \left[ v_x S_{3/2}^n \left( \frac{Mv^2}{2T} \right) - v'_x S_{3/2}^n \left( \frac{Mv'^2}{2T} \right) \right] |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \varphi(v) \varphi(v') d\mathbf{v} d\mathbf{v}' = \delta_{m0}.$$

Далее мы решим эту систему уравнений во втором приближении Чепмена—Энскога, т. е. ограничимся двумя членами разложения функции распределения по полиномам Сонина и двумя уравнениями из представленной системы уравнений. Введем безразмерные скорости иона  $\mathbf{u} = \sqrt{M/2T} \mathbf{v}$  и атома  $\mathbf{u}' = \sqrt{M/2T} \mathbf{v}'$ . Получим с учетом первых двух членов разложения:

$$a_0 \langle (u_x - u'_x)^2 | \mathbf{u} - \mathbf{u}' \rangle + a_1 \langle (u_x - u'_x) \left[ u_x \left( \frac{5}{2} - u^2 \right) - \right. \\ \left. - u'_x \left( \frac{5}{2} - u'^2 \right) \right] | \mathbf{u} - \mathbf{u}' \rangle = \sqrt{\frac{M}{2T}}, \\ a_0 \langle \left[ u_x \left( \frac{5}{2} - u^2 \right) - u'_x \left( \frac{5}{2} - u'^2 \right) \right] (u_x - u'_x) | \mathbf{u} - \mathbf{u}' \rangle + \\ + a_1 \langle \left[ u_x \left( \frac{5}{2} - u^2 \right) - u'_x \left( \frac{5}{2} - u'^2 \right) \right]^2 | \mathbf{u} - \mathbf{u}' \rangle = 0.$$

Здесь угловые скобки отвечают усреднению с максвелловской функцией распределения частиц по скоростям.

Введем безразмерную относительную скорость  $\mathbf{s} = \mathbf{u} - \mathbf{u}'$  и безразмерную скорость центра инерции  $\mathbf{G} = 1/2(\mathbf{u} + \mathbf{u}')$ . Получаем

$$u_x \left( \frac{5}{2} - u^2 \right) - u'_x \left( \frac{5}{2} - u'^2 \right) = s_x \left( \frac{5}{2} - G^2 - \frac{1}{4} s^2 \right) - 2G_x G_s,$$

так что искомая система уравнений приводится к виду

$$a_0 \langle s_x^2 s \rangle + a_1 \left\langle s_x s \left[ s_x \left( \frac{5}{2} - G^2 - \frac{1}{4} s^2 \right) - 2G_x G s \right] \right\rangle = \sqrt{\frac{M}{2T}},$$

$$a_0 \left\langle s_x s \left[ s_x \left( \frac{5}{2} - G^2 - \frac{1}{4} s^2 \right) - 2G_x G s \right] \right\rangle +$$

$$+ a_1 \left\langle s \left[ s_x \left( \frac{5}{2} - G^2 - \frac{s^2}{4} \right) - 2G_x G s \right]^2 \right\rangle = 0.$$

В частности, если мы ограничимся первым приближением Чепмена—Энскога (т. е. в первом уравнении положим  $a_1 = 0$ ), то получим  $a_0 \langle s^3 \rangle / 3 = \sqrt{M/2T}$ . Отсюда

$$a_0 = \frac{3}{\langle s^3 \rangle} \sqrt{\frac{M}{2T}} = \frac{3 \sqrt{\pi M}}{16 \sqrt{T}}.$$

Это дает для подвижности

$$K = \frac{e \lambda a_0}{M} = \frac{3 \sqrt{\pi} \lambda}{16 \sqrt{T M}},$$

что в соответствии с использованным приближением совпадает с результатом (4.4).

Производя усреднение по углам, преобразуем полученную систему уравнений к виду

$$a_0 \frac{\langle s^3 \rangle}{3} + a_1 \left( \frac{5}{6} \langle s^3 \rangle - \frac{5}{2} \langle s^3 \rangle \langle G^2 \rangle - \frac{\langle s^5 \rangle}{12} \right) = \sqrt{\frac{M}{2T}},$$

$$a_0 \left( \frac{5}{6} \langle s^3 \rangle - \frac{5}{9} \langle s^3 \rangle \langle G^2 \rangle - \frac{\langle s^5 \rangle}{12} \right) +$$

$$+ a_1 \left[ \langle s^3 \rangle \left( \frac{25}{12} - \frac{25}{3} \langle G^2 \rangle + \frac{10}{3} \langle G^4 \rangle \right) + \langle s^5 \rangle \left( \frac{5}{18} \langle G^2 \rangle - \frac{5}{12} \right) + \frac{\langle s^7 \rangle}{48} \right] = 0.$$

Вычисляя средние значения скоростей, представим эту систему уравнений в виде

$$\frac{a_0}{3} \langle s^3 \rangle - \frac{a_1}{12} \langle s^3 \rangle = \sqrt{\frac{M}{2T}},$$

$$-\frac{a_0}{12} \langle s^3 \rangle - \frac{31}{24} a_1 \langle s^3 \rangle = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$a_0^{(2)} = \frac{62}{63} a_0^{(1)} = \frac{31 \sqrt{\pi M}}{168 \sqrt{T}},$$

где индекс сверху означает номер приближения. Как видно, в рассматриваемом случае второе приближение Чепмена—Энскога приводит к результату, который отличается от результата первого приближения Чепмена—Энскога менее, чем на 2%. Это подтверждает хорошую сходимость метода Чепмена—Энскога. В соответствии с полученными результатами подвижность иона

во втором приближении Чепмена — Энского равна

$$K_{11} = \frac{e\lambda}{M} a_0^{(2)} = \frac{31 \sqrt{\pi}}{168 \sqrt{TM} N \sigma_{\text{рез}}} = \frac{0,327}{\sqrt{TM} N \sigma_{\text{рез}}}.$$

**Задача 4.9.** Для атомных ионов, движущихся в собственном газе в постоянном электрическом поле малой напряженности, определить неисчезающую поправку по полю к подвижности ионов.

Представим функцию распределения ионов в виде разложения по малому параметру, который пропорционален напряженности поля. Поскольку малый параметр разложения является скалярной величиной, то в данном случае он содержит комбинацию  $E\mathbf{v}$ , где  $E$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{v}$  — скорость иона. Учитывая это, представим функцию распределения ионов в виде

$$f(\mathbf{v}) = \varphi(v) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n v_x^n \chi_n(v) \right],$$

здесь  $\varphi(v)$  — максвелловская функция распределения ионов по скоростям,  $\xi = eE\lambda/T$  — безразмерный параметр, причем  $\lambda$  — длина пробега ионов;  $v_x$  — компонента скорости иона на направление поля.

Подставляя это разложение в кинетическое уравнение и выделяя в нем члены одинаковой степени по полю, мы получим систему уравнений, связывающих функции  $\chi_n$  с соседними значениями индекса. Последовательное решение этой системы уравнений позволяет определить значения функции  $\chi_n$ . При этом подвижность иона равна

$$K = \frac{\langle v_x \rangle}{E} = \frac{1}{E} \sum_{r=1}^{\infty} \langle \xi^r v_x^{r+1} \chi_r(v) \rangle = \frac{e\lambda}{T} [\langle v_x^2 \chi_1 \rangle + \xi^2 \langle v_x^4 \chi_2 \rangle + \dots],$$

т. е. разложение проводится по степеням параметра, пропорционального  $E^2$ , где угловые скобки означают усреднение по скоростям иона и атома с максвелловскими функциями распределения.

Вычислим первую поправку к подвижности иона при разложении по малой напряженности электрического поля в случае, когда атомный ион движется в собственном газе. Производя разложение функции распределения ионов в уравнении (4.13) и приравнявая члены при степенях  $E^n$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{T}{M} \frac{\partial}{\partial v_x} [v_x^{n-1} \chi_{n-1}(v) \varphi(v)] = \\ = \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \varphi(v) \varphi(v') [v_x'^n \chi_n(v') - v_x^n \chi_n(v)] d\mathbf{v}'. \end{aligned}$$

Учитывая опыт предыдущей задачи, с хорошей точностью до не очень высоких степеней разложения можем считать, что функ-

ции  $\chi_n$  не зависят от скорости иона. Тогда система уравнений для величин  $\chi_n$  запишется в следующем виде:

$$\chi_{n-1} \frac{T}{M} \frac{\partial}{\partial v_x} [v_x^{n-1} \varphi(v)] = \chi_n \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \varphi(v) \varphi(v') (v_n^n - v_x^n) d\mathbf{v}'.$$

Умножим обе части уравнений на  $v_x^n$  и проинтегрируем по скоростям ионов. Интегрируя левую часть уравнения по частям и приводя правую часть к симметричному виду, получим

$$\chi_{n-1} \frac{T}{M} n \langle v_x^{2n-2} \rangle = \frac{1}{2} \chi_n \langle |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| (v_x^n - v_x'^n)^2 \rangle.$$

Таким образом, мы получили рекуррентное соотношение, позволяющее вычислять последующие члены разложения функции распределения по полю через предыдущие. Отсюда, в частности, находим

$$\chi_2 = \frac{4T}{M} \chi_1 \frac{\langle v_x^2 \rangle}{\langle |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| (v_x^2 - v_x'^2) \rangle}, \quad \chi_3 = \frac{6T}{M} \chi_2 \frac{\langle v_x^4 \rangle}{\langle |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| (v_x^3 - v_x'^3)^2 \rangle}.$$

Это дает для первых двух членов разложения подвижности по полю:

$$\begin{aligned} K &= \frac{e\lambda}{M} (\chi_1 \langle v_x^2 \rangle + \xi^2 \chi_3 \langle v_x^4 \rangle) = K_0 \left( 1 + \xi^2 \frac{\chi_3 \langle v_x^4 \rangle}{\chi_1 \langle v_x^2 \rangle} \right) = \\ &= K_0 \left[ 1 + \xi^2 \frac{24 T^2 \langle v_x^4 \rangle^2}{M^2 \langle |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| (v_x^2 - v_x'^2) \rangle \langle |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| (v_x^3 - v_x'^3)^2 \rangle} \right], \end{aligned}$$

где  $K_0$  — подвижность иона в пределе нулевой напряженности электрического поля.

Вычислим величины, входящие в искомые формулы. Имеем

$$\langle v_x^4 \rangle = \frac{15}{4} \left( \frac{2T}{M} \right)^2 = \frac{15T^2}{M^2}.$$

При нахождении знаменателей введем безразмерную относительную скорость  $\mathbf{s} = \sqrt{M/2T} (\mathbf{v} - \mathbf{v}')$  и безразмерную скорость центра инерции  $\mathbf{G} = 1/2 \sqrt{T/2M} (\mathbf{v} + \mathbf{v}')$ . На основе этого получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{M}{2T} \right)^{5/2} \langle |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| (v_x^2 - v_x'^2)^2 \rangle &= 4 \langle s s_x^2 G_x^2 \rangle = \frac{4}{9} \langle s^3 \rangle \langle G^2 \rangle = \frac{8 \sqrt{2}}{3 \sqrt{\pi}}, \\ \left( \frac{M}{2T} \right)^{7/2} \langle |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| (v_x^3 - v_x'^3)^2 \rangle &= \langle s s_x^2 \left( 3G_x^2 + \frac{s_x^2}{4} \right)^2 \rangle = \\ &= \frac{3}{5} \langle s^3 \rangle \langle G^4 \rangle + \frac{1}{10} \langle s^5 \rangle \langle G^2 \rangle + \frac{1}{112} \langle s^7 \rangle = \frac{3 \cdot 169 \sqrt{2}}{70 \sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Это дает для подвижности иона с учетом первых двух членов разложения

$$K = K_0 (1 + 6,9 \xi^2).$$

**Задача 4.10.** Определить дрейфовую скорость ионов, масса которых много больше массы атомов газа.

Ширина функции распределения ионов по скоростям определяется либо тепловой скоростью ионов, либо средним изменением скорости иона за одно столкновение с молекулой. Первая величина мала по сравнению с тепловой скоростью атомов, вторая имеет порядок  $mg/M$ , т. е. ширина функции распределения ионов всегда значительно меньше относительной скорости столкновения иона и атома. Поэтому в соотношении (1.22) функцию распределения можно заменить:  $f(\mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega})$ , где  $\boldsymbol{\omega} = \int f(\mathbf{v}) \mathbf{v} d\mathbf{v}$  — дрейфовая скорость иона. В результате получим следующее соотношение для дрейфовой скорости:

$$\begin{aligned} \frac{eE}{\mu N} &= \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \int \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2T}\right) g_x g \sigma^*(g) d\mathbf{v}_1 \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\omega^2} \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2T}\right) \left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{mg^2}{2T}\right) g^2 \sigma^*(g) dg \times \\ &\quad \times \left[ \frac{m\omega g}{T} \operatorname{ch} \frac{m\omega g}{T} - \operatorname{sh} \frac{m\omega g}{T} \right]. \quad (4.15) \end{aligned}$$

При малых значениях дрейфовой скорости по сравнению с тепловой скоростью атомов газа это дает

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{3\sqrt{\pi}eE}{8N\bar{\sigma}\sqrt{2Tm}}, \quad \bar{\sigma} = \int_0^\infty e^{-x^2} x^5 \sigma^*(x) dx, \quad x^2 = \frac{mg^2}{2T}, \quad (4.16a) \\ \sigma^* &= \int (1 - \cos \vartheta) d\sigma. \end{aligned}$$

Этот результат совпадает с первым приближением Чепмена — Энскога, но справедлив в более широкой области скоростей ( $\omega \ll \sqrt{T/m}$ ), чем применимо указанное приближение ( $\omega \ll \sqrt{T/M}$ ). Следует заметить, что использованный метод, связанный с заменой функции распределения на дельта-функцию, применим, если  $\omega \gg \sqrt{T/M}$ . Однако, поскольку при  $\omega \ll \sqrt{T/M}$  дрейфовая скорость пропорциональна напряженности электрического поля, причем коэффициент пропорциональности может быть найден на основании данного метода, то полученный результат справедлив при всех значениях дрейфовой скорости.

При большой величине дрейфовой скорости  $\omega \gg \sqrt{T/M}$  ( $\omega \gg g$ ) из соотношения (4.16a) получаем

$$\frac{eE}{mN} = \omega^2 \sigma^*(\omega). \quad (4.16б)$$

Это соотношение непосредственно вытекает из уравнения движения иона, если учесть, что его импульс мало меняется при столкновении с атомами газа. Действительно, уравнение движения иона

имеет вид

$$\frac{dP_x}{dt} = eE - \int \Delta P_x N \omega d\sigma = eE - mN\omega^2 \sigma^* (\omega) = 0.$$

Здесь  $P_x$  — проекция импульса иона на направление поля,  $\Delta P = m\omega(1 - \cos \vartheta)$  — изменение импульса иона при столкновении с легким атомом малой скорости,  $\vartheta$  — угол рассеяния.

**Задача 4.11.** Сравнить подвижность электронов в газе при малых полях, найденную в приближении Чепмена — Энского, с точным значением. Считать, что зависимость сечения упругого рассеяния электрона на атоме от скорости столкновения имеет вид  $\sigma^* = C\nu^{-k}$ .

Согласно формуле (2.37) для подвижности электронов при малых напряженностях электрического поля имеем

$$K = \frac{\omega}{E} = \frac{8e}{3\sqrt{\pi}m} \int_0^{\infty} \frac{t^4 e^{-t^2} dt}{\nu_y}, \quad t = \sqrt{\frac{m\nu^2}{2T}},$$

где  $\nu_y$  — частота упругих соударений электрона с атомами газа.

Сравнивая полученную формулу для подвижности электронов в газе  $K$  с первым приближением Чепмена — Энского (4.3) при заданной зависимости диффузионного сечения  $\sigma^*$  от скорости столкновения, получаем

$$\frac{K}{K_1} = \frac{16}{9\pi} \Gamma\left(3 - \frac{k}{2}\right) \Gamma\left(2 + \frac{k}{2}\right).$$

Следует заметить, что практически реализующиеся значения  $k$  лежат в пределах  $0 < k < 2$ . При кулоновском законе взаимодействия частиц ( $k=4$ ) столкновение носит многочастичный характер, тогда как в основе используемых формул лежит двухчастичный характер столкновения.

**Задача 4.12.** Определить зависимость дрейфовой скорости иона от напряженности поля при больших значениях напряженности поля. Считать, что ион рассеивается на атоме по классическому закону, а потенциал взаимодействия между этими частицами в рассматриваемой области энергий взаимодействия аппроксимируется зависимостью  $U \sim R^{-n}$  ( $R$  — расстояние между ядрами).

При большой напряженности электрического поля, когда

$$\frac{eE}{TN\sigma^*} \gg 1,$$

скорость дрейфа ионов оказывается много больше тепловой скорости ионов и частиц газа. В этом случае относительная скорость столкновения иона и частицы газа совпадает со скоростью иона,



и соотношение (1.22) принимает вид

$$\frac{eE}{\mu N} = \int f(\mathbf{v}) v v_x \sigma^*(v) d\mathbf{v}.$$

Поскольку в рассматриваемом предельном случае единственным параметром с размерностью скорости, от которого зависит функция распределения, является дрейфовая скорость, из последнего соотношения следует  $eE/\mu N \sim \omega^2 \sigma^*(\omega)$ . Из зависимости потенциала взаимодействия частиц от расстояния между ними  $U \sim R^{-n}$  следует, что сечение столкновения этих частиц связано со скоростью соударения соотношением

$$\sigma \sim \mu^{-2/n} v^{-4/n}$$

( $\sigma \sim \rho^2$ ,  $U(\rho) \sim \mu v^2$ ). Таким образом,

$$\omega \sim \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{eE}{N} \right)^{\frac{n}{2(n-2)}}.$$

**Задача 4.13.** Выразить подвижность иона в смеси газа при малых полях через подвижность иона в каждом из газов.

Подвижность ионов в газе в первом приближении Чепмена — Энского (4.3) удобно представить в виде

$$1/K = A v_{\text{эфф}}.$$

Здесь  $A$  — некоторая функция параметров газа, не зависящая от рода газа,  $v_{\text{эфф}}$  — эффективная частота столкновений иона с частицей газа, которая для смеси газов является аддитивной функцией частот столкновений с частицами каждого из газов. Поскольку подвижность мы относим к постоянной полной плотности частиц и частота столкновений с частицами данного газа равна  $\nu_i = N_i \langle v \sigma_i \rangle$ ,  $N_i = c_i N$  ( $c_i$  — концентрация газа данного сорта), то  $v_{\text{эфф}} = \sum_i c_i \nu_i$ . Так как подвижность ионов в данном газе

определяется соотношением  $1/K_i = A \nu_i$ , то подвижность иона в смеси газов выражается через подвижность в каждом из газов  $K_i$  и концентрации газов  $c_i$  следующим образом:

$$\frac{1}{K} = \sum_i \frac{c_i}{K_i}.$$

Это соотношение носит название закона Бланка и, как следует из его вывода, оно справедливо лишь при малых напряженностях поля. При этих условиях точность закона та же, что и точность приближения Чепмена — Энского.

**Задача 4.14.** Определить среднюю энергию иона при движении его в газе в постоянном электрическом поле при условии, что частота столкновения иона с частицами газа не зависит от скорости столкновения.

Умножим кинетическое уравнение для ионов (1.5) на энергию иона  $Mv^2/2$  и проинтегрируем полученное соотношение по скоростям иона. Учитывая, что  $\int v^2 \frac{\partial f}{\partial v_x} d\mathbf{v} = -2 \int f \frac{\partial v^2}{\partial v_x} d\mathbf{v} = -2\omega$  ( $\omega$  — средняя скорость иона), находим

$$eE\omega = \int \frac{M}{2} (v^2 - v'^2) f(\mathbf{v}) \varphi(v_1) N g d\sigma d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1.$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}'$  — скорости иона до и после соударения,  $\mathbf{v}_1$  — скорость частицы газа,  $\mathbf{g} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$  — относительная скорость соударения,  $N$  — плотность частиц газа,  $d\sigma$  — дифференциальное сечение рассеяния,  $f(\mathbf{v})$  — функция распределения ионов,  $\varphi(v)$  — максвелловская функция распределения атомов, причем обе функции распределения нормированы на единицу ( $\int f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int \varphi(v) d\mathbf{v} = 1$ ).

Из полученного интегрального соотношения мы выведем соотношение для средней энергии ионов. Проинтегрируем сначала левую часть по углу рассеяния. Скорость иона равна

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \frac{m}{m+M} \mathbf{g},$$

здесь  $\mathbf{V}$  — скорость центра инерции,  $m$  — масса частицы газа. Отсюда

$$v^2 - v'^2 = \frac{2m}{M+m} \mathbf{V}(\mathbf{g} - \mathbf{g}'),$$

где  $\mathbf{g}'$  — относительная скорость частиц после рассеяния. Далее,  $\mathbf{g}' = \mathbf{g} \cos \theta + \mathbf{n} g \sin \theta$  ( $\theta$  — угол рассеяния,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, перпендикулярный вектору  $\mathbf{g}$ ). Отсюда после усреднения по азимутальному углу рассеяния получаем, что

$$\int (\mathbf{g} - \mathbf{g}') d\sigma = \mathbf{g} \int (1 - \cos \theta) d\sigma = \mathbf{g} \sigma^*(g),$$

$\sigma^*(g) = \int (1 - \cos \theta) d\sigma$  — диффузионное сечение упругого столкновения иона с частицей газа. С учетом этого первоначальное интегральное соотношение представим в виде

$$eE\omega = \mu \int f(\mathbf{v}) \varphi(v_1) \mathbf{V} \mathbf{g} v d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1 \equiv \frac{\mu}{m+M} \langle (Mv^2 - mv_1^2) v \rangle, \quad (4.17)$$

здесь  $\mu = mM/(m+M)$  — приведенная масса иона и атома;  $v(g) = Ng \sigma^*(g)$  — частота столкновения иона с частицей газа; угловые скобки означают усреднение по скоростям ионов и частиц газа.

Полученное соотношение представляет собой уравнение баланса для энергии ионов, движущихся в газе в постоянном электрическом поле. Левая часть этого соотношения является энергией, которую ион в единицу времени получает от электрического поля. В правой части данного соотношения стоит энергия, которую ион

теряет в единицу времени в результате столкновения с частицами газа.

Воспользуемся условием задачи, что частота столкновения  $\nu$  не зависит от скорости. В этом случае, учитывая формулу (4.7)  $\omega = eE/\mu\nu$ , выражая отсюда частоту столкновений, получим

$$\omega^2 = \int f(\mathbf{v}) \varphi(v_1) \mathbf{Vg} \, d\mathbf{v} \, dv_1 = \langle \mathbf{Vg} \rangle.$$

Далее,  $\mathbf{V} = \frac{M\mathbf{v} + m\mathbf{v}_1}{M+m}$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ , так что

$$\omega^2 = \langle \mathbf{Vg} \rangle = \frac{M}{m+M} \langle v^2 \rangle - \frac{m}{m+M} \langle v_1^2 \rangle + \frac{M-m}{M+m} \langle \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}_1 \rangle.$$

Принимая во внимание, что средняя скорость частиц газа равна нулю и вводя температуру газа  $T = \frac{2}{3} \langle mv_1^2 \rangle$  и среднюю энергию ионов  $\bar{\varepsilon} = \langle \frac{Mv^2}{2} \rangle$ , получаем искомое соотношение

$$\bar{\varepsilon} = \frac{(m+M)\omega^2}{2} + \frac{3}{2} T. \quad (4.18)$$

**Задача 4.15.** Определить среднюю поступательную энергию иона в направлении внешнего поля для иона, движущегося в газе в постоянном электрическом поле. Частоту соударения иона с частицами газа считать не зависящей от скорости соударения.

Эту задачу мы решим подобно предыдущей и определим величину средней энергии из интегрального соотношения. По аналогии с предыдущей задачей умножим кинетическое уравнение для функции распределения ионов на величину поступательной энергии иона в направлении поля  $Mv_x^2/2$ . Получим

$$eE\omega = \frac{M}{2} \int (v_x^2 - v_x'^2) f(\mathbf{v}) \varphi(v_1) N g \, d\sigma \, d\mathbf{v} \, dv_1.$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}'$  — скорости иона до и после соударения,  $\mathbf{v}_1$  — скорость частицы газа,  $\mathbf{g} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$  — относительная скорость иона и частицы газа,  $M$  — масса иона,  $\omega$  — средняя скорость ионов в направлении поля (причем электрическое поле направлено вдоль оси  $x$ ),  $d\sigma$  — дифференциальное сечение столкновения иона и частицы газа. Функции распределения ионов  $f(\mathbf{v})$  и частиц газа  $\varphi(\mathbf{v})$  по скоростям нормированы на единицу.

Преобразуем выражение в правой части полученного соотношения. Представим скорость иона как

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \frac{m}{m+M} \mathbf{g},$$

где  $m$  — масса частицы газа,  $V$  — скорость центра инерции сталкивающихся иона и частицы газа. Отсюда получаем

$$v_x^2 - v_x'^2 = \frac{2m}{m+M} V_x (g_x - g_x') + \left( \frac{m}{m+M} \right)^2 (g_x^2 - g_x'^2).$$

Относительная скорость иона и частицы газа после соударения равна

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} \cos \theta + n g \sin \theta,$$

где  $\theta$  — угол рассеяния в системе центра инерции,  $n$  — единичный вектор, направленный перпендикулярно вектору  $\mathbf{g}$ . При этом все направления вектора  $n$  в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{g}$ , равновероятны. Учитывая это, выполним интегрирование по углам рассеяния. Имеем

$$\begin{aligned} \int (g_x - g_x') d\sigma &= \int (\mathbf{g} - \mathbf{g}')_x d\sigma = \\ &= g_x \int (1 - \cos \theta) d\sigma - \bar{n}_x g \int \sin \theta d\sigma = g_x \sigma^*. \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma^*(g) = \int (1 - \cos \theta) d\sigma$  — диффузионное сечение соударения иона и частицы газа, и было учтено, что среднее значение компоненты вектора  $n$  равно нулю. Далее, введем угол  $\vartheta$  между век-

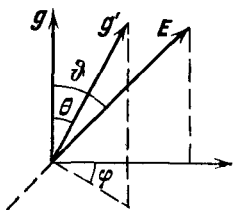


Рис. 4.3. Геометрия векторов при усреднении по углам в задаче 4.15.

торами  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{E}$  и угол  $\varphi$ , который характеризует положение проекции вектора  $\mathbf{g}'$  в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{g}$  и отсчитанный от проекции вектора  $\mathbf{E}$  на эту плоскость (см. рис. 4.3). Получим

$$g_x' = g (\cos \theta \cos \vartheta + \sin \theta \sin \vartheta \cos \varphi) = g_x \cos \theta + g_{\perp} \sin \theta \cos \varphi,$$

где  $g_{\perp}$  — проекция относительной скорости  $\mathbf{g}$  на плоскость, перпендикулярную направлению электрического поля. Отсюда, усредняя по азимутальному углу, имеем

$$\begin{aligned} g_x^2 - g_x'^2 &= \\ &= g_x^2 - g_x^2 \cos^2 \theta - g_{\perp}^2 \sin^2 \theta \overline{\cos^2 \varphi} - 2g_x g_{\perp} \sin \theta \cos \theta \overline{\cos \varphi} = \\ &= \left( g_x^2 - \frac{g_{\perp}^2}{2} \right) \sin^2 \theta = \frac{3}{2} \left( g_x^2 - \frac{g^2}{3} \right) \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

где черта сверху означает усреднение по азимутальному углу и было использовано, что  $g_x^2 + g_{\perp}^2 = g^2$ . Это дает

$$\int (g_x^2 - g_x'^2) d\sigma = \frac{3}{2} \left( g_x^2 - \frac{g^2}{3} \right) \sigma^{(2)}(g),$$

где  $\sigma^{(2)}(g) = \int (1 - \cos^2 \theta) d\sigma$ .

Используя полученные результаты и подставляя их в начальное интегральное соотношение, имеем

$$eEw = \mu \langle V_x g_x v_1 \rangle + \frac{3\mu m}{4(M+m)} \left\langle \left( g_x^2 - \frac{g^2}{3} \right) v_2 \right\rangle, \quad (4.19)$$

где угловые скобки означают усреднение по скоростям ионов и частиц газа,  $v_1 = Ng \sigma^*(g)$ ,  $v_2 = Ng \sigma^{(2)}(g)$ ,  $\mu = mM/(m+M)$  — приведенная масса иона и частицы газа. Воспользуемся теперь тем, что частоты столкновения иона с частицами газа  $v_1$  и  $v_2$  не зависят от скорости соударения. Вынося их из-под знака усреднения и возвращаясь от относительной скорости и скорости центра инерций к скоростям иона и частицы газа, получим

$$eEw = \mu v_1 \frac{\langle Mv_x^2 \rangle - \langle mv_{1x}^2 \rangle}{m+M} + \frac{3\mu m v_2}{4(M+m)} \left\langle v_x^2 - \frac{v^2}{3} \right\rangle.$$

При этом мы учли, что средняя скорость частицы газа равна нулю ( $\langle v_{1x} \rangle = 0$ ) и что распределение частиц газа по скоростям изотропно ( $\langle v_{1x}^2 \rangle = 1/3 \langle v_1^2 \rangle$ ).

Воспользуемся теперь выражением для дрейфовой скорости иона (4.7):  $w = eE/\mu v_1$ , значением поступательной энергии атома  $\langle mv_{1x}^2 \rangle = T$  (где  $T$  — температура газа) и полученным в задаче 4.15 выражением (4.18) для средней энергии иона  $\langle \frac{Mv^2}{2} \rangle = \frac{(M+m)}{2} w^2 + \frac{3}{2} T$ . На основе этого получим следующее выражение для поступательной энергии в направлении поля:

$$\left\langle \frac{Mv_x^2}{2} \right\rangle = \frac{T}{2} + \frac{(M+m) w^2}{2} \frac{v_1 + mv_2/4M}{v_1 + 3mv_2/4M}. \quad (4.20a)$$

Соответственно поступательная энергия в направлении, перпендикулярном электрическому полю, равна

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{Mv_y^2}{2} \right\rangle &= \left\langle \frac{Mv_z^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \left\langle \frac{Mv^2}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{Mv_x^2}{2} \right\rangle \right) = \\ &= \frac{T}{2} + \frac{(M+m) w^2}{2} \frac{mv_2/4M}{v_1 + 3mv_2/4M}. \end{aligned} \quad (4.20b)$$

Проанализируем полученный результат. Если масса иона  $M$  много меньше массы частицы газа, то средние значения поступательной энергии в направлении поля и перпендикулярно ему совпадают. Этот случай соответствует движению электрона в газе во внешнем электрическом поле. Упругое рассеяние электро-

на на частице газа сопровождается малым изменением энергии при сильном изменении его импульса. Поэтому функция распределения электронов по скоростям близка к сферически симметричной, так что средние значения поступательной энергии для разных направлений движения совпадают.

В случае, если масса иона значительно превышает массу частицы газа, то энергия движения частиц поперек поля не зависит от напряженности поля, пока дрейфовая скорость иона много меньше тепловой скорости частиц газа. При высоких напряженностях электрического поля средняя кинетическая энергия иона обусловлена его движением в направлении поля.

**Задача 4.16.** Определить функцию распределения ионов, движущихся в газе в постоянном электрическом поле, если масса иона много больше массы частицы газа.

При движении тяжелых ионов в газе их скорость мало меняется в результате соударения с частицами газа. Отношение характерного изменения скорости к его среднему значению и является малым параметром, позволяющим построить вид функции распределения. Функция распределения ионов по скоростям в нулевом приближении в масштабах скоростей частиц газа является дельта-функцией. Ширина ее порядка тепловой скорости иона, которой он обладает в отсутствие электрического поля. Учитывая наличие малого параметра, в следующем приближении функцию распределения ионов по скоростям мы можем представить в виде распределения Гаусса, так что она с точностью до нормировочного множителя дается выражением

$$f(\mathbf{v}) = \text{const} \cdot \exp \left[ -\frac{M(v_x - \omega)^2}{2T_{\parallel}} - \frac{Mv_{\perp}^2}{2T_{\perp}} \right]. \quad (4.21)$$

Здесь  $v_x$ ,  $v_{\perp}$  — компоненты скорости иона на направление электрического поля и перпендикулярно ему,  $\omega$  — дрейфовая скорость иона,  $M$  — масса иона, параметры  $T_{\parallel}$ ,  $T_{\perp}$  совпадают с температурой газа  $T$  в отсутствие поля. Устремив  $T_{\perp}$ ,  $T_{\parallel}$  к нулю, получаем, что функция распределения ионов принимает вид  $\delta$ -функции,  $f(\mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v} - \omega)$ .

Параметры полученной функции распределения ионов по скоростям можно получить, используя средние значения поступательной энергии в продольном и поперечном направлениях. В частности, если частота столкновения иона с частицей газа не зависит от скорости соударения, то, используя результаты предыдущей задачи, имеем с точностью до первого члена разложения по степеням  $m/M$ :

$$T_{\parallel} \equiv \langle M(v_x - \omega)^2 \rangle = T + m\omega^2 \left( 1 - \frac{v_2}{2v_1} \right), \quad (4.22a)$$

$$T_{\perp} \equiv \langle Mv_y^2 \rangle = \langle Mv_z^2 \rangle = T + m\omega^2 \frac{v_2}{4v_1}. \quad (4.22b)$$

Как следует из полученного результата, если дрейфовая скорость иона мала по сравнению с тепловой скоростью частиц газа, функция распределения ионов является максвелловской функцией со смещенным центром, причем температура ионов совпадает с температурой газа:

$$f(\mathbf{v}) = \text{const} \cdot \exp \left[ -\frac{M(v-\omega)^2}{2T} \right]. \quad (4.23)$$

При обратном соотношении между указанными скоростями продольная  $T_{\parallel}$  и поперечная  $T_{\perp}$  температуры в общем случае различаются.

**Задача 4.17.** Определить продольную и поперечную температуры, отвечающие функции распределения ионов по скоростям при движении ионов с большой массой в газе в электрическом поле. Дрейфовая скорость иона значительно превышает тепловую скорость частиц газа.

Поскольку скорость иона мало изменяется при однократном соударении с частицей газа, то функция распределения ионов по скоростям имеет вид распределения Гаусса (4.21). При этом скорости иона сосредоточены в узком интервале скоростей, близких к дрейфовой скорости иона. Наша задача определить параметры  $T_{\parallel}$  и  $T_{\perp}$  в выражении для функции распределения (4.21), которые характеризуют ширину функции распределения.

Для этой цели воспользуемся интегральными соотношениями (4.6), (4.17), (4.19), которые при произвольной зависимости частот столкновения от относительной скорости имеют вид

$$\begin{aligned} eE &= \mu \langle v_x v_1 \rangle, \\ eE\omega &= \frac{\mu}{m+M} (\langle Mv^2 v_1 \rangle - \langle mv_1^2 v_1 \rangle), \\ eE\omega &= \frac{\mu}{m+M} (\langle Mv_x^2 v_1 \rangle - \langle mv_{1x}^2 v_1 \rangle) + \frac{3\mu m}{4(M+m)} \left\langle \left( v_x^2 - \frac{v^2}{3} \right) v_2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Первое из этих соотношений выражает равенство между импульсами, которые ион в единицу времени получает от электрического поля и отдает частицам газа; второе соотношение устанавливает подобное равенство для кинетической энергии, а третье — равенство для кинетической энергии в направлении поля. В этих соотношениях  $M$ ,  $m$ ,  $\mu$  — соответственно масса иона, частицы газа и приведенная масса иона и частицы газа,  $v_1$ ,  $v_2$  — частоты столкновения иона с частицами газа, отвечающие разным способам усреднения сечения по углам рассеяния,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_1$  — скорости иона и частицы газа,  $\omega$  — дрейфовая скорость иона, ось  $x$  выбрана в направлении электрического поля, и угловые скобки в представленных выражениях означают усреднение по скоростям ионов и частиц газа.

В рассматриваемом случае, когда дрейфовая скорость иона много больше тепловой скорости частиц газа, температуры ионов  $T_{\parallel}$ ,  $T_{\perp}$  значительно превышают температуру газа. Поэтому тепловым движением частиц газа при нахождении искомого характеристик можно пренебречь. С учетом этого, вычитая из второго уравнения третье, получим

$$\langle Mv_{\perp}^2 v_1 \rangle = \frac{3m}{4} \left\langle \left( v_x^2 - \frac{v^2}{3} \right) v_2 \right\rangle,$$

где  $v_{\perp}$  — компонента скорости в направлении, перпендикулярном полю. Заменяя в нулевом приближении функцию распределения ионов  $\delta$ -функцией, т. е. считая, что скорость ионов совпадает с дрейфовой, получим отсюда

$$\langle Mv_{\perp}^2 \rangle = \frac{m\omega^2 v_2}{2 v_1},$$

где частоты столкновений берутся при относительной скорости столкновения иона и частицы газа, равной дрейфовой скорости ионов. Отсюда для поперечной температуры получаем

$$T_{\perp} = \langle Mv_y^2 \rangle = \langle Mv_z^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle Mv_{\perp}^2 \rangle = \frac{m\omega^2 v_2}{4 v_1}. \quad (4.25a)$$

Для определения продольной температуры представим первое уравнение (4.24) в виде

$$\begin{aligned} eE &= \mu \langle v_x v_1 \rangle = \mu \omega \langle v_1 \rangle + \mu \langle (v_x - \omega) v_1 \rangle = \\ &= \mu \omega \langle v_1 \rangle + \mu \langle (v_x - \omega)^2 \rangle \frac{dv_1}{dv} \Big|_{\omega}. \end{aligned}$$

В правой части второго уравнения с точностью до первого члена разложения по параметрам  $\frac{T_{\parallel}}{M\omega^2}$ ,  $\frac{T_{\perp}}{M\omega^2}$  имеем

$$\begin{aligned} \langle Mv^2 v_1 \rangle &= \\ &= \langle M\omega^2 v_1 \rangle + 2M\omega \langle (v_x - \omega) v_1 \rangle + \langle M(v_x - \omega)^2 v_1 \rangle + \langle Mv_{\perp}^2 v_1 \rangle = \\ &= (M\omega^2 + T_{\parallel} + 2T_{\perp}) \langle v_1 \rangle + 2\omega T_{\parallel} \frac{dv_1}{dv} \Big|_{\omega}. \end{aligned}$$

Заменим напряженность электрического поля в левой части второго уравнения на основе ранее полученного соотношения из первого уравнения (4.24). Используя проведенные выкладки, находим из второго уравнения (4.24):

$$\begin{aligned} \mu \omega^2 \langle v_1 \rangle + \frac{\mu T_{\parallel}}{M} \omega \frac{dv_1}{dv} \Big|_{v=\omega} &= \\ &= \frac{\mu}{M+m} \left[ (M\omega^2 + T_{\parallel} + 2T_{\perp}) \langle v_1 \rangle + 2T_{\parallel} \omega \frac{dv_1}{dv} \Big|_{v=\omega} \right]. \end{aligned}$$

Это дает

$$T_{\parallel} + 2T_{\perp} - T_{\parallel} \frac{d \ln v_1}{d \ln v} \Big|_{v=\omega} = m\omega^2.$$



Или, используя ранее полученное выражение для величины  $T_{\parallel}$ , находим продольную температуру:

$$T_{\parallel} = m\omega^2 \frac{(1 - v_2/2v_1)}{1 + \left. \frac{d \ln v_1}{d \ln v} \right|_{v=\omega}}. \quad (4.256)$$

Как видно, продольная и поперечная температуры, характеризующие распределение ионов по скоростям, порядка  $m\omega^2$ . В рассматриваемом случае дрейфовая скорость иона значительно превышает тепловую скорость частицы газа, которая порядка  $\sqrt{T/m}$  ( $T$  — температура газа). Отсюда следует, что продольная и поперечная температуры ионов значительно превышают температуру газа.

Формула (4.25а) для поперечной температуры, полученная для произвольной зависимости частоты столкновения от скорости, совпадает с формулой (4.22б), представленной в пределе больших напряженностей поля. Поэтому, хотя формула (4.22б) для поперечной температуры ионов получена в предположении постоянной частоты столкновения ионов с частицами газа, эта формула справедлива и в более общем случае. Что касается формулы (4.25б) для продольной температуры, то она совпадает с аналогичной формулой (4.22а) только в случае, когда частота столкновения  $v_1$  не зависит от относительной скорости столкновения, т. е. при выполнении условия применимости формулы (4.22а). Согласно формуле (4.22б) продольная температура ионов зависит от характера изменения частоты столкновения с изменением относительной скорости соударения.

**Задача 4.18.** Ионы, масса которых совпадает с массой частиц газа, движутся в сильном электрическом поле, так что дрейфовая скорость иона значительно превышает тепловую скорость частиц газа. Определить дрейфовую скорость ионов в случае, когда сечение рассеяния иона на частице газа не зависит от скорости столкновения, а само рассеяние изотропно в системе центра инерции.

Рассматриваемый закон рассеяния имеет место для так называемой модели твердых сфер и реализуется в случае, когда потенциал взаимодействия частиц резко изменяется в области расстояний между частицами, ответственной за рассеяние. Этот закон рассеяния описывает реальную ситуацию.

При решении данной задачи с целью упрощения выкладок используем приближенный метод. Именно, зададим функцию распределения ионов в разумном виде, а параметры, входящие в выражение для функции распределения, найдем из интегральных соотношений для средних характеристик иона. Очевидно, приемлемое выражение для функции распределения ионов по скоростям дается формулой (4.21), ибо эта формула правильно отражает характер

распределения ионов по скоростям в области скоростей, где они в основном сосредоточены. Таким образом, зададим функцию распределения ионов по скоростям в виде

$$f(\mathbf{v}) = C \exp \left[ -\frac{M(v_x - \omega)^2}{2T_{\parallel}} - \frac{Mv_{\perp}^2}{2T_{\perp}} \right],$$

где  $C$  — константа нормировки, а параметры ( $\omega$  — дрейфовая скорость иона,  $T_{\parallel}$ ,  $T_{\perp}$  — продольная и поперечная температуры) подлежат определению.

Искомые параметры определим из интегральных соотношений (4.24). При этом в силу изотропного характера рассеяния иона на частице газа  $\sigma^{(2)} \equiv \int (1 - \cos^2 \theta) d\sigma - \frac{2}{3} \int d\sigma = \frac{2}{3} \int (1 - \cos \theta) d\sigma = \frac{2}{3} \sigma^*$ , где  $\theta$  — угол рассеяния.  $\sigma^*$  — диффузионное сечение рассеяния. Поэтому в рассматриваемом случае не зависящего от скорости сечения соударения  $v_1 \equiv Nv\sigma^* = v/\lambda$ ,  $v_2 = \frac{2}{3}v_1 = \frac{2}{3}v/\lambda$ , где  $v$  — скорость иона,  $\lambda = 1/N\sigma^*$  — длина пробега иона в газе. С учетом этого равенства масс иона и частицы газа, а также пренебрегая скоростью частицы газа по сравнению со скоростью иона, перепишем интегральные соотношения (4.24) в следующем виде:

$$eE = \frac{m}{2\lambda} \langle v_x v \rangle,$$

$$eE\omega = \frac{m}{4\lambda} \langle v^3 \rangle,$$

$$eE\omega = \frac{m}{4\lambda} \langle v_x^2 v \rangle + \frac{m}{8\lambda} \left( \left\langle \left( v_x^2 - \frac{v^2}{3} \right) v \right\rangle \right).$$

Здесь, как и ранее, угловые скобки означают усреднение по скоростям ионов,  $m$  — масса частицы газа, которая в данном случае совпадает с массой иона.

Проведем усреднение по скоростям ионов с помощью введенной функции распределения ионов по скоростям. В результате мы получим три уравнения для трех искомых параметров. Решение этих уравнений позволит определить параметры функции распределения ионов.

Далее для упрощения математических выкладок мы используем еще одно упрощающее предположение. В тех случаях, где скорость иона содержится в нечетной степени, мы проведем разложение скорости следующим образом:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_{\perp}^2} \approx v_x + \frac{v_{\perp}^2}{2v_x}.$$

Тем самым мы будем считать, что кинетическая энергия продольного по полю движения иона значительно превышает кинетическую энергию поперечного движения. Полученный результат

даст возможность проверить точность такого рода приближения, которое позволит сильно упростить математические операции.

С учетом используемых приближений имеем для первого интегрального соотношения

$$eE = \frac{m}{2\lambda} \left\langle v_x^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right\rangle = \frac{m}{2\lambda} \left( \omega^2 + \langle (v_x - \omega)^2 \rangle + \left\langle \frac{v_{\perp}^2}{2} \right\rangle \right).$$

В результате это соотношение принимает вид

$$eE\lambda = \frac{m\omega^2}{2} + \frac{T_{\parallel}}{2} + \frac{T_{\perp}}{2}.$$

Второе интегральное соотношение дает

$$\begin{aligned} eE\omega &= \frac{m}{4\lambda} \left( \left\langle (v_x^2 + v_{\perp}^2) \left( v_x + \frac{v_{\perp}^2}{2v_x} \right) \right\rangle \right) = \\ &= \frac{m}{4\lambda} \left( \langle v_x^3 \rangle + \frac{3}{2} \omega \langle v_{\perp}^2 \rangle + \frac{\langle v_{\perp}^2 \rangle}{2\omega} \right) = \\ &= \frac{m}{4\lambda} \left( \omega^3 + 3\omega \langle (v_x - \omega)^2 \rangle + \frac{3}{2} \omega \langle v_{\perp}^2 \rangle + \frac{\langle v_{\perp}^4 \rangle}{2\omega} \right). \end{aligned}$$

После вычисления средних характеристик получим

$$eE\lambda = \frac{m}{4} \omega^2 + \frac{3}{4} T_{\parallel} + \frac{3}{4} T_{\perp} + \frac{T_{\perp}^2}{m\omega^2}.$$

Вместо третьего интегрального соотношения возьмем разность между вторым и третьим интегральными соотношениями, которая в данном случае имеет вид

$$0 = \frac{m}{4\lambda} \langle v_{\perp}^2 v \rangle - \frac{m}{8\lambda} \left\langle \left( v_x^2 - \frac{v_{\perp}^2}{3} \right) v \right\rangle.$$

Из этого соотношения приходим к следующему уравнению для искомых параметров

$$\frac{m}{4\lambda} \cdot \frac{2T_{\perp}\omega}{m} \left( 1 + \frac{2T_{\perp}}{m\omega^2} \right) - \frac{m}{8\lambda} \cdot \frac{2}{3} \omega^3 \left( 1 + \frac{3T_{\parallel}}{m\omega^2} - \frac{2T_{\perp}^2}{m^2\omega^4} \right) = 0,$$

или

$$\frac{m\omega^2}{6} + \frac{1}{2} T_{\parallel} - T_{\perp} - \frac{7}{3} \frac{T_{\perp}^2}{m\omega^2} = 0.$$

Введем новые переменные,  $x = \frac{m\omega^2}{eE\lambda}$ ,  $y = \frac{T_{\parallel}}{eE\lambda}$ ,  $z = \frac{T_{\perp}}{eE\lambda}$ . Получим систему уравнений для этих переменных:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (x + y + z) &= 1, \\ \frac{x}{4} + \frac{3}{4} (y + z) + \frac{z^2}{x} &= 1, \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{2} &= z + \frac{7}{3} \frac{z^2}{x}. \end{aligned}$$

Решение этой системы дает  $x = 1,15$ ;  $y = 0,555$ ;  $z = 0,294$ , т. е. искомые параметры равны

$$\omega = 1,07 \sqrt{\frac{eE\lambda}{m}}, T_{\parallel} = 0,555 eE\lambda, T_{\perp} = 0,294 eE\lambda.$$

Точное решение задачи дает

$$\omega = 1,14 \sqrt{\frac{eE\lambda}{m}}, T_{\parallel} = 0,454 eE\lambda, T_{\perp} = 0,293 eE\lambda.$$

Степень совпадения результатов характеризует точность данного приближения метода. Заметим, что при подстановке точных значений искомых параметров в полученную систему уравнений значения правой и левой частей каждого из уравнений различаются не более чем на 5%.

**Задача 4.19.** Определить подвижность частицы аэрозоля или пылинки в газе. Частица имеет сферическую форму, ее радиус  $r_0$  значительно превышает длину свободного пробега молекул в газе; заряд частицы равен  $q$ .

В рассматриваемом случае сила  $qE$ , действующая на частицу со стороны электрического поля напряженностью  $E$ , уравновешивается силой трения, которая дается формулой Стокса и равна

$$F = 6\pi r_0 \eta \omega.$$

Здесь  $\eta$  — вязкость газа,  $\omega$  — скорость направленного движения частицы. Отсюда находим подвижность частицы:

$$K = \omega/E = q/6\pi r_0 \eta.$$

Эта формула справедлива для макроскопической частицы, размер которой значительно больше длины свободного пробега молекулы в газе.

Отметим, что использованное выражение для дрейфовой скорости частицы справедливо при малых числах Рейнольдса движущейся частицы:

$$Re = \omega r_0 \rho / \eta \ll 1,$$

где  $\rho$  — массовая плотность газа. Отсюда получаем ограничение на напряженность электрического поля, для которого справедлива полученная формула:

$$qE \ll 6\pi\eta^2/\rho.$$

В правую часть соотношения вошли только параметры газа. В частности, для воздуха при нормальных условиях этот критерий имеет вид

$$qE \ll 3 \cdot 10^8 \text{ эВ/см.}$$

## § 2. Диффузия заряженных частиц в газе во внешнем поле

**Задача 4.20.** Исходя из кинетического уравнения получить выражение для коэффициента диффузии заряженных частиц, движущихся в газе во внешних полях.

Пусть в слабоионизованном газе плотность заряженных частиц меняется в пространстве, причем изменение плотности на расстояниях порядка длины свободного пробега мало. Наличие градиента плотности заряженных частиц вызывает диффузионный поток заряженных частиц, который по определению равен

$$\mathbf{J}_{\text{диф}} = -\mathcal{D} \nabla N_i, \quad (4.26)$$

где  $N_i$  — плотность заряженных частиц, которая мала по сравнению с плотностью нейтральных частиц,  $\mathcal{D}$  — коэффициент диффузии заряженных частиц в газе.

При нахождении выражения для коэффициента диффузии мы используем малый параметр  $\lambda \frac{\partial \ln N_i}{\partial z}$  (где  $\lambda$  — длина свободного пробега заряженных частиц в газе; плотность ионов меняется вдоль направления  $z$ ). С учетом этого малого параметра мы проведем разложение кинетического уравнения Больцмана для ионов:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \frac{eE}{M} \frac{\partial f}{\partial v} = I_{\text{ст}}(f),$$

$I_{\text{ст}}$  — интеграл столкновений. Функция распределения заряженных частиц по скоростям пропорциональна плотности заряженных частиц  $N_i$ , которая зависит от параметра  $\mathbf{r} - \boldsymbol{\omega}t$  (здесь  $\mathbf{r}$  — координата,  $\boldsymbol{\omega}$  — дрейфовая скорость заряженной частицы). Учитывая, что зависимость функции распределения от координаты и времени содержится в плотности заряженных частиц, представим кинетическое уравнение в виде

$$(\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \ln N_i}{\partial z} f + \frac{eE}{M} \frac{\partial f}{\partial v} = I_{\text{ст}}(f).$$

Представим функцию распределения в виде разложения по малому параметру, связанному с градиентом плотности:

$$f(\mathbf{v}) = f^{(0)}(\mathbf{v}) - \frac{\partial \ln N_i}{\partial z} \Phi(\mathbf{v}),$$

направление  $z$  выбрано вдоль градиента плотности, функция  $f^{(0)}(\mathbf{v})$  отвечает постоянной плотности ионов и является решением кинетического уравнения:

$$\frac{eE}{M} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v} = I_{\text{ст}}(f^{(0)}).$$

При этом условии нормировки функций распределения  $f(\mathbf{v})$  и  $f^{(0)}(\mathbf{v})$  требует выполнения следующего соотношения для искомой

функции  $\Phi$ :

$$\int \Phi d\mathbf{v} = 0. \quad (4.26a)$$

Функция  $\Phi$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$(v_z - \omega_z) f^{(0)} = \frac{eE}{M} \frac{\partial \Phi}{\partial v} - I_{\text{ст}}(\Phi). \quad (4.27)$$

При этом мы учли, что плотность заряженных частиц мала и соударениями между ними можно пренебречь. Поэтому интеграл столкновений является линейным функционалом от функции распределения заряженных частиц.

Поток заряженных частиц по определению равен  $\mathbf{j} = \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}$ , причем диффузионный поток, обусловленный градиентом плотности заряженных частиц, создается за счет поправки к функции распределения. Сравнивая соответствующее выражение для диффузионного потока с его определением (4.26), получим выражение для коэффициента диффузии в виде

$$\mathcal{D}_z = \frac{1}{N_i} \int v_z \Phi(\mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

где  $N_i$  — плотность заряженных частиц и функция  $\Phi(\mathbf{v})$  является решением уравнения (4.27). С учетом условия (4.26a) выражение для коэффициента диффузии удобно представить в виде

$$\mathcal{D}_z = \frac{1}{N_i} \int (v_z - \omega) \Phi(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (4.28)$$

**Задача 4.21.** Вывести соотношение Эйнштейна для заряженных частиц из кинетического уравнения.

При малых напряженностях электрического поля функция распределения заряженных частиц имеет вид  $f = \varphi_0 + v_x \varphi_1$ , где  $\varphi_0$  — максвелловская функция распределения; ось  $x$  направлена вдоль поля. Раскладывая кинетическое уравнение

$$\frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = I_{\text{ст}}(f)$$

по теории возмущений, получим уравнение для  $\varphi_1$ :

$$\frac{eE}{m} \frac{d\varphi_0}{dv} \equiv \frac{eE v_x}{T} \varphi_0 = I_{\text{ст}}(v_x \varphi_1).$$

Это уравнение при  $E \rightarrow 0$  совпадает с уравнением (4.27) с точностью до замены  $\varphi_1$  на  $\frac{T}{eE} \dot{f}_1$ . Сравнивая дрейфовую скорость

$$\omega = \frac{1}{N} \int v_x^2 \varphi_1 d\mathbf{v}$$

с выражением для коэффициента диффузии (4.28), находим  $\mathcal{D} = T\omega/eE$ . Так как  $\omega = KE$ , то отсюда следует, что подвиж-

ность  $K$  и коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$  заряженных частиц при малых полях связаны соотношением Эйнштейна (1.79):

$$K = e\mathcal{D}T. \quad (4.29)$$

**Задача 4.22.** Определить величину коэффициента диффузии для электронов, которые движутся в газе в направлении, перпендикулярном электрическому полю.

Пусть электрическое поле направлено по оси  $x$ , и мы изучаем диффузию в направлении  $z$ , т. е. в этом направлении изменяется плотность электронов. Функция распределения электронов при постоянной плотности с учетом малого параметра (отношения массы электрона к массе частицы газа) имеет вид

$$f^{(0)}(\mathbf{v}) = f_0(\mathbf{v}) + v_x f_1(\mathbf{v}).$$

Подобным образом функция  $\Phi(\mathbf{v})$ , характеризующая диффузионное движение электронов, также может быть представлена в виде разложения по плотностям относительно оси, которая направлена вдоль градиента плотности электронов

$$\Phi(\mathbf{v}) = \Phi_0(\mathbf{v}) + v_x \Phi_1(\mathbf{v}).$$

Подставляя эти разложения в уравнение (4.27) для  $\Phi(\mathbf{v})$ , получим

$$v_z f_0 + v_z v_x f_1 = \frac{eE}{m} \frac{v_x}{v} \frac{d\Phi_0}{dv} + \frac{eE}{m} \frac{v_z v_x}{v} \frac{d\Phi_1}{dv} - I_{\text{ст}}(\Phi_0) + v v_z \Phi_1$$

( $m$  — масса электрона). При этом было использовано выражение для интеграла столкновений от несимметричной части функции распределения  $I_{\text{ст}}[v_z f(v)] = -v v_z f(v)$ , где  $v$  — частота столкновений электрона с частицами газа.

Умножая полученное уравнение на  $v_z$  и усредняя по углам, приходим к простому соотношению,  $f_0 = v \Phi_1$ . Используя его в выражении для коэффициента диффузии, находим

$$\mathcal{D}_\perp = \frac{1}{N_i} \int v_z^2 \frac{f_0}{v} d\mathbf{v} = \left\langle \frac{v^2}{3v} \right\rangle, \quad (4.30)$$

скобки означают усреднение по скоростям электронов.

**Задача 4.23.** В пределе малой напряженности электрического поля найти зависимость коэффициента диффузии ионов в газе от температуры, если рассеяние их на частицах газа происходит согласно классическим законам и потенциал взаимодействия пробной частицы с частицей газа в области расстояний  $R$  между ними, где он порядка температуры, хорошо аппроксимируется зависимостью  $U(R) = CR^{-n}$ .

Коэффициент диффузии частицы  $\mathcal{D} \sim \bar{v} \lambda$ , где  $\bar{v} \sim \sqrt{T}$  — характерная скорость частицы, длина свободного пробега  $\lambda \sim 1/N\sigma$ ,  $N$  — плотность атомов газа,  $\sigma$  — сечение рассеяния пробной частицы

на частицах газа. Сечение упругого столкновения этих частиц найдем из соотношения  $\sigma \sim \rho^2$ ,  $U(\rho) \sim \mu \bar{v}^2$ ,  $\mu$  — приведенная масса частиц. Используя данный потенциал взаимодействия, получаем  $\sigma \sim T^{-2/n}$ , так что

$$\mathcal{D} \sim \frac{1}{N} T^{\frac{1}{2} + \frac{2}{n}}. \quad (4.31)$$

Таким образом, коэффициент диффузии изменяется с температурой газа по закону

$$\mathcal{D} \sim T^{\frac{1}{2} + \frac{2}{n}}$$

при постоянной плотности частиц газа и по закону

$$\mathcal{D} \sim T^{\frac{3}{2} + \frac{2}{n}}$$

при постоянном давлении газа.

**Задача 4.24.** Получить соотношение между коэффициентом диффузии и подвижностью электронов в газе при произвольной напряженности электрического поля.

Введем величину  $\eta$ , характеризующую отношение коэффициента диффузии  $\mathcal{D}$  электронов в газе к подвижности электронов:

$$\eta = \frac{eE\mathcal{D}}{T\omega} = \frac{e\mathcal{D}}{TK},$$

где  $E$  — напряженность электрического поля,  $T$  — температура газа. Величина  $\eta$  называется энергетическим коэффициентом Таунсенда и при малых напряженностях электрического поля, согласно соотношению Эйнштейна (4.29), равна единице. Используя выражения для коэффициента диффузии (4.30) и дрейфовой скорости  $\omega$  (2.28а) электронов, имеем

$$\eta = \frac{\langle mv^2/v \rangle}{T \left\langle \frac{1}{v^2} \frac{d}{dv} \left( \frac{v^3}{v} \right) \right\rangle}. \quad (4.32)$$

В частности, если частота упругих соударений электронов с атомами  $\nu$  не зависит от скорости, то отсюда следует

$$\eta = \langle mv^2/3T \rangle.$$

В случае, когда функция распределения электронов по скоростям максвелловская, энергетический коэффициент Таунсенда равен

$$\eta = T_e/T.$$

В рассмотренных случаях энергетический коэффициент Таунсенда представляет собой отношение средней энергии электрона к средней кинетической энергии атомов. В общем случае это



соотношение выполняется приближенно. Так, при больших напряженностях поля, используя для распределения электронов по скоростям функцию Драйвейстейна, находим, что если сечение соударения электрона с частицами газа не зависит от скорости электрона (т. е.  $\nu \sim v$ ), то энергетический коэффициент Таунсенда равен  $\eta = 1,14 \langle mv^2/3T \rangle$ . В случае, когда  $\nu \sim v^{2/3}$ , имеем для энергетического коэффициента Таунсенда  $\eta = 1,07 \langle mv^2/3T \rangle$ , а при  $\nu \sim v^{1/2}$  эта величина равна  $\eta = 1,04 \langle mv^2/3T \rangle$ . Как видно, энергетический коэффициент Таунсенда в общем случае позволяет с приемлемой точностью определить среднюю энергию электрона.

**Задача 4.25.** Определить коэффициент диффузии ионов в газе в случае, когда частота соударения ионов с частицами газа не зависит от скорости столкновения.

Воспользуемся уравнением (4.27) для функции  $\Phi$ , определяющей коэффициент диффузии ионов в газе. Умножим это уравнение на скорость иона в направлении градиента плотности  $v_z$  и проинтегрируем по скоростям ионов. С учетом условия (4.26а) получим интегральное соотношение

$$\langle v_z^2 \rangle - \omega_z^2 N_i = - \int v_z I_{ct}(\Phi) d\mathbf{v},$$

где угловые скобки означают усреднение по скоростям ионов,  $N_i$  — плотность ионов. Это соотношение и позволяет в конечном итоге получить выражение для коэффициента диффузии.

Преобразуем правую часть соотношения:

$$\begin{aligned} - \int v_z I_{ct}(\Phi) d\mathbf{v} &= \\ &= \int v_z [\Phi(\mathbf{v}) \varphi(\mathbf{v}_1) - \Phi(\mathbf{v}') \varphi(\mathbf{v}'_1)] |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| d\sigma d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1 = \\ &= \int (v_z - v'_z) \Phi(\mathbf{v}) \varphi(\mathbf{v}_1) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| d\sigma d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}'$  — скорость иона до и после столкновения,  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}'_1$  — скорость частицы газа до и после столкновения,  $d\sigma$  — дифференциальное сечение рассеяния. Подынтегральное соотношение было преобразовано при обращении времени и соответственно скоростей до и после столкновения. При этом был использован принцип детального равновесия, согласно которому величина  $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| d\sigma$  при таком обращении сохраняется.

В полученном выражении выполним интегрирование по углам рассеяния. Эта операция неоднократно проделывалась ранее (см. например, задачу 1.10). В результате получим

$$\int (v_z - v'_z) d\sigma = \frac{m}{m+M} g_z \sigma^*,$$

где  $M$  — масса иона,  $m$  — масса частицы газа,  $\sigma^*$  — диффузионное сечение столкновения иона и частицы газа,  $\mathbf{g}$  — относительная скорость столкновения иона с частицей газа. Это позволяет

привести первоначальное соотношение к виду

$$\langle v_z^2 \rangle - \omega_z^2 N_i = \frac{m}{m+M} \int g_z \Phi(\mathbf{v}) \varphi(\mathbf{v}_1) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \sigma^* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1. \quad (4.33)$$

Воспользуемся теперь тем, что частота столкновения иона с частицами газа  $\nu = Ng\sigma^*(g)$  ( $N$  — плотность частиц газа) не зависит от скорости столкновения. Имеем

$$\langle v_z^2 \rangle - \omega_z^2 N_i = \frac{\nu m}{N(m+M)} \int (v_z - v_{1z}) \Phi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \varphi(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1.$$

Переменные в правой части соотношения разделяются, причем для частиц газа по определению  $\int \varphi(v_1) d\mathbf{v}_1 = N$ ,  $\int v_{1z} \varphi(v_1) d\mathbf{v}_1 = 0$ , где  $N$  — плотность частиц газа. Интеграл от искомой функции  $\Phi$  в той же комбинации, что и в данном соотношении, входит в выражение (4.28) для коэффициента диффузии. Воспользовавшись этим, получим для коэффициента диффузии

$$\mathcal{D}_z = \frac{M \langle v_z^2 \rangle - \omega_z^2}{\mu \nu}, \quad (4.34)$$

где  $\mu = mM/(m+M)$  — приведенная масса иона и частицы газа. Подобный результат получен в задаче 1.11 из аналогичных соображений.

Используем соотношения (4.20) для средней энергии иона в рассматриваемых условиях. Получим для коэффициента диффузии иона в направлении поля  $\mathcal{D}_{\parallel}$  и в перпендикулярном к полю направлении  $\mathcal{D}_{\perp}$ :

$$\mathcal{D}_{\parallel} = \frac{1}{\mu \nu_1} \left[ T + m\omega^2 \frac{\left( \nu_1 - \frac{1}{2} \nu_2 + \frac{m}{4M} \nu_2 \right)}{\left( \nu_1 + \frac{3m}{4M} \nu_2 \right)} \right],$$

$$\mathcal{D}_{\perp} = \frac{1}{\mu \nu_1} \left[ T + m\omega^2 \frac{\left( 1 + \frac{m}{M} \right) \nu_2}{4 \left( \nu_1 + \frac{3m}{4M} \nu_2 \right)} \right],$$

где частоты  $\nu_1 = Ng \int (1 - \cos \theta) d\sigma$  и  $\nu_2 = Ng \int (1 - \cos^2 \theta) d\sigma$  характеризуются разным способом усреднения по углам рассеяния  $\theta$ ;  $\omega$  — дрейфовая скорость иона.

**Задача 4.26.** Определить коэффициент продольной и поперечной диффузии тяжелых ионов в газе.

Вычислим коэффициент диффузии в двух предельных случаях — в одном из них дрейфовая скорость иона мала по сравнению с тепловой скоростью частиц газа, в другом выполняется обратное соотношение. При этом мы воспользуемся тем, что ширина функции распределения по скоростям мала по сравнению с характерными значениями скорости. Это позволит исполь-

зовать интегральное соотношение для функции  $\Phi$ , определяющей величину коэффициента диффузии (4.28).

Умножим уравнение (4.27) для искомой функции  $\Phi$  на проекцию скорости в направлении диффузии  $v_z$  и проинтегрируем по скоростям ионов. С учетом условия (4.26а) получим окончательное соотношение (4.33):

$$\langle v_z^2 \rangle - \omega_z^2 N_i = \frac{m}{m+M} \int g_z \Phi(\mathbf{v}) \varphi(\mathbf{v}_1) g \sigma^* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1.$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по скоростям ионов,  $N_i$  — плотность ионов,  $\mathbf{v}$  — скорость иона,  $\mathbf{v}_1$  — скорость частицы газа,  $\mathbf{g} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$  — относительная скорость иона и частицы газа,  $\varphi(\mathbf{v}_1)$  — максвелловская функция распределения частиц газа по скоростям,  $\sigma^*$  — диффузионное сечение рассеяния при соударении иона с частицей газа,  $M$  — масса иона,  $m$  — масса частицы газа.

Представив  $g_z = v_z - v_{1z}$  и учитывая, что остальная часть подынтегрального выражения является четной функцией относительно  $v_1$ , приведем полученное соотношение к виду

$$\langle v_z^2 \rangle - \omega_z^2 N_i = \frac{m}{m+M} \int v_z \Phi(\mathbf{v}) \varphi(\mathbf{v}_1) g \sigma^* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1.$$

Это соотношение и дает возможность определить коэффициент диффузии ионов.

При этом мы воспользуемся тем, что искомая функция  $\Phi$  является решением неоднородного интегро-дифференциального уравнения (4.27) того же типа, что и функция распределения ионов по скоростям  $f^{(0)}$ . Поэтому характерная область скоростей иона, где значение этой функции окажется порядка максимальной величины, будет иметь ту же ширину, что и область распределения ионов по скоростям. Учитывая это, имеем, что интеграл в правой части полученного соотношения сходится в малой области скоростей, где функция  $\Phi(\mathbf{v})$  отлична от нуля. Это позволяет разложить остальную часть подынтегрального соотношения в этой области скоростей и получить результат.

Рассмотрим сначала поперечную диффузию ионов. В случае малой напряженности поля поперечная скорость ионов мала по сравнению со скоростями частиц газа, а при больших напряженностях поля — и по сравнению с дрейфовой скоростью. Это позволяет провести интегрирование по скоростям частиц газа и дает:

$$\langle v_y^2 \rangle N_i = \frac{m}{m+M} \int v_y \Phi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \bar{\nu},$$

где ось  $y$  направлена перпендикулярно электрическому полю,  $\bar{\nu}$  — частота столкновения иона с частицами газа, усредненная по скоростям иона и атома. Если дрейфовая скорость иона мала

по сравнению с тепловой скоростью частиц газа, то

$$\bar{v} = \langle N v_1 \sigma^*(v_1) \rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по скоростям частиц газа  $v_1$ . В другом предельном случае

$$\bar{v} = N \omega \sigma^*(\omega),$$

( $\omega$  — дрейфовая скорость иона). В любом случае величина  $\bar{v}$  не зависит от поперечной скорости иона из-за ее малости, что с учетом формулы (4.28) дает для коэффициента поперечной диффузии

$$\mathcal{D}_\perp = \frac{m+M}{m} \frac{\langle v_y^2 \rangle}{\bar{v}} = \frac{T_\perp}{\mu v},$$

где  $T_\perp$  — поперечная температура ионов (4.25),  $\mu$  — приведенная масса иона и частицы газа.

Для коэффициента продольной диффузии в случае, когда дрейфовая скорость иона мала по сравнению с тепловой скоростью частиц газа, получим подобное соотношение, ибо  $\bar{v}$  не зависит от продольной скорости ионов:

$$\mathcal{D}_\parallel = \frac{(m+M)}{m} \frac{(\langle v_x^2 \rangle - \omega^2)}{\bar{v}} = \frac{T_\parallel}{\mu v},$$

где продольная температура ионов  $T_\parallel$  совпадает с температурой газа  $T$ .

В другом предельном случае,  $\omega \gg \sqrt{T/m}$ , имеем

$$(\langle v_x^2 \rangle - \omega^2) N_i = \int v_x \Phi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} v(\mathbf{v}),$$

поскольку относительная скорость столкновения иона и частицы газа в данном случае совпадает со скоростью иона  $v$ , которая в свою очередь близка к дрейфовой скорости иона  $\omega$ . Проведем разложение величины  $v_x v(\mathbf{v})$  по степеням  $v_x - \omega$ . Пусть  $v \sim v^\gamma$ , т. е.  $\gamma = \left. \frac{d \ln v}{d \ln v} \right|_{v=\omega}$ . Имеем

$$v^2 = (\omega + v_x - \omega)^2 + v_\perp^2 = \omega^2 \left[ 1 + \frac{2(v_x - \omega)}{\omega} \right],$$

так что

$$v(v) = v(\omega) \left[ 1 + \gamma \frac{(v_x - \omega)}{\omega} \right].$$

Это дает

$$v_x v(v) = \omega v(\omega) + (\gamma + 1)(v_x - \omega) v(\omega).$$

Первый член этого разложения при интегрировании дает нуль в силу условия (4.26а). Следовательно, с учетом определения

коэффициента диффузии (4.28)

$$\mathcal{D}_{\parallel} = \frac{(m+M)(\langle v_x^2 \rangle - w^2)}{m(1+\gamma)v(w)} = \frac{T_{\parallel}}{\mu v(w)(1+\gamma)}.$$

**Задача 4.27.** Вычислить коэффициент продольной диффузии атомных ионов в собственном газе в пределе большой напряженности электрического поля. Учесть, что сечение резонансной перезарядки иона на атоме не зависит от скорости соударения.

Кинетическое уравнение для функции распределения ионов в рассматриваемом случае дается формулой (4.13). Исключая поперечные компоненты иона и атома, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{eE}{M} \frac{\partial f}{\partial v_x} = \int [f(v'_x) \varphi(v_x) - f(v_x) \varphi(v'_x)] |v_x - v'_x| \sigma_{\text{рез}} dv'_x,$$

здесь  $\sigma_{\text{рез}}$  — сечение резонансной перезарядки иона на атоме,  $\varphi(v_x)$  — максвелловская функция распределения атомов по скоростям. Учитывая, что характерная скорость иона значительно больше скорости атомов, представим функцию распределения атомов в масштабе скоростей ионов как  $\varphi(v_x) = N \delta(v_x)$  ( $N$  — плотность атомов). В результате преобразуем кинетическое уравнение к виду

$$\frac{eE}{M} \frac{\partial f}{\partial v_x} = \frac{1}{\lambda} \delta(v_x) \int v'_x f(v'_x) dv'_x - \frac{v_x}{\lambda} f(v_x),$$

где  $\lambda = (N\sigma_{\text{рез}})^{-1}$  — длина пробега иона в собственном газе. Решение этого уравнения приводит к выражению (4.12), которое было получено другим способом.

На основании данного кинетического уравнения уравнение (4.27) для функции  $\Phi(v_x)$ , определяющей коэффициент диффузии ионов, приводится к виду

$$(v_x - w) f(v_x) = \frac{eE}{M} \frac{d\Phi}{dv_x} + \frac{v_x}{\lambda} \Phi - \frac{\delta(v_x)}{\lambda} \int v'_x \Phi(v'_x) dv'_x.$$

Введем безразмерную переменную

$$u = \left( \frac{Mv_x^2}{eE\lambda} \right)^{1/2} = \left( \frac{MN\sigma_{\text{рез}}}{eE} \right)^{1/2} v_x.$$

Учитывая, что дрейфовая скорость иона равна  $w = \left( \frac{2eE}{\pi MN\sigma_{\text{рез}}} \right)^{1/2}$ , с использованием выражения (4.12) для функции распределения ионов имеем

$$\frac{2\lambda}{\pi w} N_i \left( u - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) e^{-u^2/2} \eta(u) = \frac{d\Phi}{du} + u\Phi - \delta(u) \int u' \Phi(u') du',$$

где  $N_i$  — плотность ионов. Решение этого уравнения дает

$$\Phi = \frac{2\lambda}{\pi w} N_i e^{-u^2/2} \left( \frac{u^2}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u + C \right) \eta(u).$$

Константа  $C$  может быть найдена из условия (4.26а), которому удовлетворяет искомая функция:  $\int \Phi(u) du = 0$ . Это дает  $C = 2/\pi - 1/2$ , так что

$$\Phi(u) = \frac{2\lambda}{\pi\omega} N_i e^{-u^2/2} \left( \frac{u^2}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u + \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right)$$

и коэффициент диффузии ионов вдоль поля, согласно формуле (4.28), равен

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\parallel} &= \frac{1}{N_i} \int (v_x - \omega) \Phi dv_x = \frac{1}{N_i} \frac{eE\lambda}{M} \int \Phi(u) u du = \\ &= \lambda\omega \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) = 0,137 \omega\lambda. \end{aligned} \quad (4.35)$$

**Задача 4.28.** Определить коэффициент поперечной диффузии ионов в собственном газе в пределе большой напряженности электрического поля.

Отделим поперечные компоненты скорости ионов и атомов в выделенном направлении  $z$  и далее будем наблюдать только за поперечными  $z$ -компонентами скоростей иона и атома. Тогда интеграл столкновений от функции распределения ионов  $F(v_z)$  по поперечным компонентам скорости  $v_z$  согласно результату задачи 4.7 имеет вид

$$\begin{aligned} I_{ст}(F) &= \varphi(v_z) \int \langle |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \rangle \sigma_{рез} F(v'_z) dv'_z - \\ &\quad - F(v_z) \int \langle |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \rangle \sigma_{рез} \varphi(v'_z) dv'_z, \end{aligned}$$

где усреднение выполнено по компонентам  $x, y$  скоростей ионов и атомов,  $\varphi(v_z)$  — максвелловская функция распределения по скоростям. Учитывая, что скорость иона в направлении поля значительно превышает как характерную скорость атома, так и характерную поперечную скорость иона, находим, что  $\langle |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \rangle = \omega$  ( $\omega$  — дрейфовая скорость иона). Отсюда

$$I_{ст}(F) = \varphi(v_z) \omega \sigma_{рез} \int F(v'_z) dv'_z - F(v_z) N \omega \sigma_{рез}.$$

Используя приведенный вид интеграла столкновений, для уравнения (4.27) в рассматриваемом случае имеем

$$v_z \varphi(v_z) = N \omega \sigma_{рез} \Phi(v_z) - \varphi(v_z) \omega \sigma_{рез} \int \Phi(v_z) dv_z.$$

При этом последний интеграл согласно условию (4.26а) равен нулю, так что решение данного уравнения дает

$$\Phi(v_z) = \frac{v_z \varphi(v_z)}{N \omega \sigma_{рез}}.$$

Отсюда согласно формуле (4.28) получаем следующее выражение для коэффициента поперечной диффузии:

$$\mathcal{D}_{\perp} = \frac{\langle v_z^2 \rangle}{N\omega\sigma_{\text{рез}}} = \frac{T}{N\omega\sigma_{\text{рез}} M}. \quad (4.36)$$

**Задача 4.29.** Определить коэффициент диффузии электронов в направлении электрического поля. Считать, что средняя энергия электронов значительно превышает тепловую энергию частиц газа, частота столкновения электронов с частицами газа не зависит от скорости столкновения, а средняя энергия электронов определяется только упругими столкновениями с частицами газа.

Воспользуемся ранее полученными выражениями для коэффициента диффузии и функции распределения электронов. Функция распределения электронов, представленная в виде разложения по сферическим гармоникам, имеет вид

$$f = f_0(v) + v_x f_1(v),$$

причем, согласно результатам задачи 2.16,  $f_0(v) = A \exp\left(-\frac{3mv^2}{2M\omega^2}\right)$ ,

$f_1(v) = \frac{3m}{M\omega} f_0(v)$ . Здесь  $A$  — нормировочный множитель,  $\omega$  — дрейфовая скорость электрона,  $M$  — масса частицы газа. Другая часть функции распределения, которая отвечает диффузионному движению электронов, также может быть представлена в виде разложения по сферическим гармоникам:

$$\Phi(v) = \Phi_0(v) + v_x \Phi_1(v).$$

Подставим эти разложения в уравнение (4.27) для  $\Phi(v)$ . Усредним это уравнение по углу  $\vartheta$  между направлением скорости и направлением поля, а также, умножив это уравнение на  $\cos \vartheta = v_x/v$ , усредним его по углу. Получим систему двух уравнений для функций,  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$ :

$$\frac{v^2}{3} f_1 - \omega f_0 = \frac{eE}{m} \left( \Phi_1 + \frac{v}{3} \frac{d\Phi_1}{dv} \right) - I_{\text{ст}}(\Phi_0),$$

$$v f_0 - \omega v f_1 = \frac{eE}{m} \frac{d\Phi_0}{dv} + v \nu \Phi_1.$$

Мы использовали выражение для интеграла столкновений от несимметричной части функции распределения  $I_{\text{ст}}[v_x \Phi_1(v)] = -\nu v_x \Phi_1(v)$ .

Второе слагаемое во втором уравнении мало по сравнению с первым, ибо  $\omega f_1 = \frac{3m}{M} f_0 \ll f_0$  и им будем пренебрегать. Используем выражение для интеграла столкновений от сферически симметричной части функции распределения, имеющего при рассматриваемых соотношениях согласно формуле (2.21)

следующий вид:

$$I_{\text{ст}}(\Phi_0) = \frac{m}{M} \frac{v}{v^2} \frac{d}{dv} (v^3 \Phi_0).$$

На основе этих и ранее указанных соотношений приведем данную систему уравнений к виду

$$\begin{aligned} \left( \frac{mv^2}{M\omega} - \omega \right) f_0 &= \frac{eE}{3mv^2} \frac{d}{dv} (v^3 \Phi_1) - \frac{mv}{Mv^2} \frac{d}{dv} (v^3 \Phi_0), \\ v f_0 &= \frac{eE}{m} \frac{d\Phi_0}{dv} + v\omega \Phi_1. \end{aligned}$$

Введем новую переменную  $x = \frac{v}{\omega} \sqrt{\frac{m}{M}}$ , а искомые функции зададим в виде

$$\Phi_0 = \frac{M\omega}{mv} f_0 F_0, \quad \Phi_1 = \frac{f_0 F_1}{v}.$$

В новых переменных  $f_0 = A \exp\left(-\frac{3}{2}x^2\right)$ , так что  $\frac{df_0}{dx} = -3xf_0$ . На основе этого для функций  $F_0$  и  $F_1$  получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1) \exp\left(-\frac{3}{2}x^2\right) &= \frac{1}{3x^2} \frac{d}{dx} \left[ x^3 \exp\left(-\frac{3}{2}x^2\right) (F_1 - F_0) \right], \\ x \exp\left(-\frac{3}{2}x^2\right) &= \frac{d}{dx} \left[ F_0 \exp\left(-\frac{3}{2}x^2\right) \right] + x \exp\left(-\frac{3}{2}x^2\right) F_1. \end{aligned}$$

Выражая  $F_1 = 1 + 3F_0 - \frac{1}{x} \frac{dF_0}{dx}$  из второго уравнения и подставляя его в первое, находим

$$2x^2 - 2 - x \frac{dF_0}{dx} + \frac{2}{3x} \frac{dF_0}{dx} + \frac{1}{3} \frac{d^2F_0}{dx^2} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид  $F_0 = C + x^2$ . Константу  $C$  получим из условия (4.26а):  $\int \Phi dv = 0$ , которое в рассматриваемом случае имеет вид  $\int_0^{\infty} F_0(x) x^2 \exp\left(-\frac{3}{2}x^2\right) dx = 0$ . Это дает  $C = 1$ , откуда находим

$$F_0 = x^2 - 1, \quad F_1 = 3x^2 - 4.$$

В результате на основе формулы (4.28) находим для коэффициента диффузии электронов вдоль поля

$$\mathcal{D}_{\parallel} = \frac{1}{N_i} \int (v_x - \omega) v_x \Phi_1(v) dv = \frac{1}{3} \left\langle \frac{v^2}{v} F_1(v) \right\rangle.$$

Вычисление по этой формуле дает для коэффициента продольной диффузии

$$\mathcal{D}_{\parallel} = \frac{M\omega^2}{3mv} \equiv \frac{\langle v^2 \rangle}{3v}. \quad (4.37)$$



Величины для коэффициента продольной и поперечной диффузии электронов в газе в рассматриваемом случае, когда частота столкновения не зависит от скорости столкновения, совпадают.

### § 3. Образование заряженных частиц в слабоионизированной плазме

Равновесная плотность заряженных частиц в слабоионизированной плазме поддерживается за счет двух конкурирующих процессов: процесса ионизации атомов газа и процесса уничтожения заряженных частиц в результате их рекомбинации или ухода из занимаемого плазмой объема. В этом параграфе мы сосредоточим внимание на процессе образования заряженных частиц, который обусловлен столкновением электронов с атомами. Изменение плотности заряженных частиц из-за ионизации атомов определяется уравнением

$$\frac{dN_e}{dt} = k_{\text{ион}} N_e N_a,$$

здесь  $N_e$ ,  $N_a$  — плотность электронов и атомов,  $k_{\text{ион}}$  — константа ионизации. Величина  $\nu_{\text{ион}} = N_a k_{\text{ион}}$  носит название частоты ионизации.

Ионизация называется прямой, если она происходит при соударении электрона с атомом в основном состоянии; если свободные электроны образуются в основном за счет ионизации возбужденных атомов, т. е. атом ионизуется при многократном столкновении с электронами, то такая ионизация называется ступенчатой. При прямой ионизации атома электронным ударом константа ионизации равна

$$k_{\text{ион}} = \langle v \sigma_{\text{ион}} \rangle,$$

где  $v$  — скорость электрона,  $\sigma_{\text{ион}}$  — сечение ионизации, угловые скобки означают усреднение по скоростям электронов. Далее будут исследованы оба механизма ионизации.

**Задача 4.30.** Определить сечение прямой ионизации атома электронным ударом, считая, что в момент сильного взаимодействия налетающего электрона с валентным взаимодействием между ними значительно превышает их взаимодействие с атомным остатком, а валентный электрон в процессе рассеяния можно считать покоящимся.

При поставленных условиях задачи сечение ионизации атома совпадает с сечением столкновения налетающего электрона с покоящимся валентным электроном, причем при таком соударении валентному электрону передается энергия, превышающая потенциал ионизации атома. Согласно формуле (П1.6) сечение столкновения электрона с энергией  $E$  и покоящегося электрона, при

котором они обмениваются энергией в интервале от  $\Delta\varepsilon$  до  $\Delta\varepsilon + d\Delta\varepsilon$  равна

$$d\sigma = \frac{\pi e^4 d\Delta\varepsilon}{E\Delta\varepsilon^2}.$$

Пусть  $E$  — энергия налетающего электрона,  $J$  — потенциал ионизации атома. Интегрируя это выражение по передаваемой энергии от  $J$  до  $E$ , получим для сечения ионизации атома

$$\sigma_{\text{ион}} = \frac{\pi e^4}{E} \left( \frac{1}{J} - \frac{1}{E} \right). \quad (4.38a)$$

Эта формула носит название формулы Томсона и написана для одного валентного электрона. При наличии нескольких валентных электронов, которые принимают участие в ионизации, по ним следует провести суммирование.

**Задача 4.31.** Определить сечение прямой ионизации атома электронным ударом, считая, что рассеяние налетающего электрона на валентном определяется классическими законами и что распределение валентного электрона по скоростям сферически симметрично и определяется движением электрона в кулоновском поле атомного остатка. Исследовать случай, когда энергия налетающего электрона значительно превышает среднюю энергию валентного электрона.

При рассматриваемых условиях рассеяние налетающего электрона происходит в основном на малые углы, так что изменение импульса налетающего и валентного электронов при рассеянии равно (см. П1.4):

$$\Delta p = \frac{2e^2}{v\rho},$$

где  $\rho$  — прицельный параметр соударения,  $v$  — относительная скорость соударения. Отсюда имеем для сечения ионизации атома:

$$\sigma_{\text{ион}} = \int 2\pi\rho d\rho = \frac{8\pi e^4}{v^2} \left\langle \int \frac{d\Delta p}{\Delta p^3} \right\rangle,$$

где интегрирование ведется по передаваемым энергиям, приводящим к отрыву валентного электрона, и скобки означают усреднение по скоростям валентных электронов.

Изменение энергии валентного электрона в результате соударения с налетающим электроном, равно

$$\Delta\varepsilon = \frac{(mu + \Delta p)^2 - m^2u^2}{2m}$$

( $u$  — начальная скорость валентного электрона). Отсюда определяем величину передаваемого импульса

$$\Delta p = \sqrt{(mun)^2 + 2m\Delta\varepsilon} - mun,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный вдоль вектора  $\Delta\mathbf{r}$ . Подставляя это соотношение в выражение для сечения ионизации, получим

$$\sigma_{\text{ион}} = \frac{8\pi e^4}{v^2} \int \left\langle \frac{md \Delta\varepsilon}{[\sqrt{(mu\mathbf{n})^2 + 2m \Delta\varepsilon - mu\mathbf{n}}]^3 \sqrt{(mu\mathbf{n})^2 + 2m \Delta\varepsilon}} \right\rangle.$$

Усредняя это выражение по углу между векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{n}$ , получим

$$\sigma_{\text{ион}} = \frac{\pi e^4}{E} \left\langle \int \frac{d \Delta\varepsilon}{\Delta\varepsilon^2} \left( \Delta\varepsilon + \frac{2}{3} mu^2 \right) \right\rangle = \frac{\pi e^4}{E} \left[ \frac{1}{J} - \frac{1}{E} + \frac{\bar{mu}^2}{3} \left( \frac{1}{J^2} - \frac{1}{E^2} \right) \right].$$

Если скорость валентного электрона положить равной нулю, то отсюда получаем формулу Томсона. Будем считать, что валентный электрон в основном сосредоточен в поле кулоновского центра, тогда средняя кинетическая энергия электрона  $m\bar{u}^2/2 = J$ , так что полученная формула принимает вид

$$\sigma_{\text{ион}} = \frac{\pi e^4}{E} \left( \frac{5}{3J} - \frac{1}{E} - \frac{2J}{3E^2} \right). \quad (4.386)$$

Если эту формулу продолжить в область малых энергий налетающего электрона, сравнимых с потенциалом ионизации, то получаем, что в данном случае, как и в формуле Томсона, имеется порог при  $E = J$ . Обращение сечения ионизации в нуль при  $E = J$  в обеих формулах связано с выбором пределов интегрирования. Максимальное значение сечения ионизации согласно полученной формуле составляет  $\sigma_{\text{max}} \approx \pi e^4 / 2J^2$  при энергии налетающего электрона  $E = 1,85 J$ , тогда как формула Томсона дает максимальное сечение ионизации  $\sigma_{\text{max}} = \pi e^4 / 4J^2$  при энергии соударения  $E = 2J$ . В случае больших энергий налетающего электрона по сравнению с потенциалом ионизации атома сечение ионизации, рассчитанное по формуле (4.386) в  $5/3$  раз превышает сечение ионизации, рассчитанное по формуле Томсона. Таким образом, движение валентного электрона отражается на величине сечения ионизации атома электронным ударом.

**Задача 4.32.** Пользуясь формулой Томсона для сечения ионизации атома, сравнить частоту образования заряженных частиц в результате ионизации атомов в основном и возбужденном состояниях. Функция распределения электронов по скоростям максвелловская, потенциал ионизации атомов в основном состоянии  $I$  и в возбужденном  $I^*$  много меньше тепловой энергии электронов.

Сечение ионизации, согласно формуле Томсона (4.38а), равно  $\sigma = \frac{\pi e^4}{\varepsilon} \left( \frac{1}{I} - \frac{1}{\varepsilon} \right)$ . Поэтому частота ионизации (частота образования одного иона за счет одного пробного электрона) при

рассматриваемых условиях задачи равна

$$v_{\text{ион}} = \frac{\pi e^4}{I^2} \sqrt{\frac{8T}{\pi m}} e^{-I/T} N_0,$$

где  $N_0$  — плотность атомов в основном состоянии. Отсюда получаем отношение частот ионизации атомов в основном и возбужденном состояниях:

$$\frac{v_0}{v_b} = \frac{N_0 e^{-I/T}}{N_b e^{-I^*/T}} \left( \frac{I^*}{I} \right)^2, \quad (4.39)$$

где  $N_b$  — плотность атомов в возбужденном состоянии.

Из формулы (4.39) следует, что в случае термодинамического равновесия, когда плотность атомов в возбужденном состоянии определяется законом Больцмана, образование свободных электронов происходит в основном за счет ионизации возбужденных атомов. При этом использование формулы Томсона для сечения ионизации не носит принципиального характера, так как эта формула позволяет правильно оценить величину сечения ионизации. При нарушении максвелловского распределения электронов по энергиям, на основании которого получена формула (4.39), функция распределения электронов по энергиям при больших энергиях электрона убывает резче, чем максвелловская функция. Поскольку ионизация определяется энергичными электронами, соответствующими хвосту функции распределения, то при нарушении максвелловского распределения условия, приводящие к ступенчатой ионизации, выполняются гораздо лучше.

Наличие ступенчатого механизма ионизации атомов в случае, когда возбужденные атомы находятся в термодинамическом равновесии с электронами, может быть принято и из других соображений. Для системы, состоящей из ионов, электронов и атомов, процесс, обратный рассматриваемому процессу ионизации, — трехчастичная рекомбинация электронов и ионов в результате столкновения со свободными электронами. При тройной рекомбинации электронов и ионов сначала образуется возбужденный атом с энергией связи порядка температуры электронов, а затем в результате последующих столкновений с электронами этот атом переходит в основное состояние. Поскольку для системы, находящейся в термодинамическом равновесии, обратный по отношению к рекомбинации процесс проходит по тем же каналам, но в обратном направлении, то свободные электроны образуются в основном при ионизации возбужденных атомов.

**Задача 4.33.** Получить условие, при котором в положительном столбе газового разряда имеет место ступенчатая ионизация атомов.

Ступенчатая ионизация имеет место в том случае, если образование заряженных частиц в результате ионизации возбужден-

ных атомов происходит более интенсивно, чем в результате прямой ионизации атомов в основном состоянии. Определим плотность атомов в выбранном возбужденном состоянии. Пусть  $\tau_*$  — эффективное время жизни возбужденных атомов, которое определяется как уходом атомов на стенки, так и излучением, свободно выходящим за пределы положительного столба. Уравнение баланса для плотности возбужденных атомов имеет вид

$$\frac{dN_B}{dt} = 0 = N_e k_{0B} N_0 - N_e k_{B0} N_B - \frac{N_B}{\tau_*},$$

где  $k_{0B}$  — константа скорости возбуждения атомов основного состояния электронным ударом с переходом их в данное возбужденное состояние,  $k_{B0}$  — константа скорости обратного перехода,  $N_e$ ,  $N_0$ ,  $N_B$  — плотность электронов и атомов в основном и возбужденном состояниях соответственно. При  $\tau_* \rightarrow \infty$  возбужденные атомы находятся в термодинамическом равновесии с электронами и их плотность определяется законом Больцмана

$$N_B = \frac{g_B}{g_0} e^{-\Delta E/T}$$

где  $g_0$ ,  $g_B$  — статистический вес атома в основном и возбужденном состояниях,  $\Delta E = I - I^*$  — энергия возбуждения. Используя это в уравнении баланса, находим связь между константами возбуждения и девозбуждения атома электронным ударом:

$$k_{0B} = k_{B0} \frac{g_B}{g_0} e^{-\Delta E/T},$$

которая имеет место и при нарушении термодинамического равновесия. С помощью этого соотношения получаем из уравнения баланса для плотности возбужденных атомов

$$N_B = N_0 \frac{g_0}{g_B} e^{-\Delta E/T} \frac{1}{1 + N_e k_{B0} \tau_*}.$$

Подставляя это выражение в [формулу (4.39), находим условие ступенчатой ионизации

$$N_e k_{B0} \tau_* \frac{g_B}{g_0} \gg \left( \frac{I^*}{T} \right)_{\text{ст}}^{\text{эф}} \quad (4.40)$$

Если для одного из возбужденных состояний условие (4.40) выполняется, то ионизация в положительном столбе носит ступенчатый характер.

**Задача 4.34.** Установить связь между константами скоростей ступенчатой ионизации в двух различных газах при одинаковых плотности и температуре электронов. Распределение электронов по скоростям максвелловское, температура электронов много меньше энергии возбуждения атомов.

Плотность свободных электронов, образуемых в результате ступенчатой ионизации в единицу времени, равна

$$\frac{dN_e}{dt} = N_e \sum_n N_n k_n,$$

где  $N_e$  — плотность электронов;  $N_n$  — плотность атомов, находящихся в состоянии  $n$ ;  $k_n$  — константа скорости прямой ионизации этих атомов. Константа скорости ступенчатой ионизации  $k_{\text{ион}}$  вводится на основе соотношения  $\frac{dN_e}{dt} = k_{\text{ион}} N_0$ , где  $N_0$  — плотность атомов в основном состоянии. Отсюда

$$k_{\text{ион}} = \sum_n k_n \frac{iN_n}{N_0}. \quad (4.41)$$

При получении соотношения между константами скоростей ступенчатой ионизации в различных газах используем тот факт, что свойства сильно возбужденного атома не зависят от сорта атома, ибо определяются кулоновским взаимодействием электрона с зарядом атомного остатка. Поэтому константы скорости прямой ионизации возбужденного атома  $k_n$  одинаковы для атомов произвольного сорта. Кроме того, отношение плотности атомов разного сорта  $N_n^{(1)}/N_n^{(2)}$ , находящихся в одинаковых сильно возбужденных состояниях в двух разных газах при одинаковых плотностях и температурах электронов, не зависит от номера этого состояния. Считая  $N_n^{(1)}/N_n^{(2)} = s$  и учитывая, что при малых температурах электронов величина  $k_{\text{ион}}$  определяется разрушением сильно возбужденных атомов, получим для отношения констант скоростей ступенчатой ионизации атомов разного сорта при одинаковых плотностях и температуре электронов

$$\frac{k_{\text{ион}}^{(1)}}{k_{\text{ион}}^{(2)}} = s \frac{N_0^{(2)}}{N_0^{(1)}}.$$

Здесь индексы 1, 2 относятся к атомам соответствующего сорта.

Для определения коэффициента пропорциональности  $s$ , который не зависит от плотности электронов, рассмотрим случай высокой плотности электронов, когда частоты столкновения электрона с возбужденным атомом значительно превышают частоты излучения возбужденного атома. В этом случае плотность возбужденных атомов определяется законом Больцмана

$$N_n = \frac{g_n}{g_0} N_0 \exp\left(-\frac{I - I_n}{T_e}\right),$$

где  $T_e$  — температура электронов,  $g_0$ ,  $g_n$  — статистический вес соответствующего состояния,  $I$ ,  $I_n$  — потенциал ионизации атомов в основном и возбужденном состояниях. Используя это, находим

выражение для коэффициента пропорциональности:

$$s \leftarrow \frac{g_{2a}g_{1i}}{g_{1a}g_{2i}} \frac{N_0^{(1)}}{N_0^{(2)}} \exp\left(\frac{I_2 - I_1}{T_e}\right),$$

где  $g_{1a}$ ,  $g_{2a}$  и  $I_1$ ,  $I_2$  — статистический вес и потенциал ионизации соответствующего атома в основном состоянии,  $g_{1i}$ ,  $g_{2i}$  — статистический вес иона данного атома. При этом мы учитывали, что статистический вес сильно возбужденного атома равен  $g_n = g_e g_i n^2$ , где  $g_i$ ,  $g_e = 2$  — статистический вес иона и электрона, соответственно,  $n$  — главное квантовое число связанного электрона.

Таким образом, получаем следующее соотношение между константами скоростей ступенчатой ионизации для атомных газов двух сортов при одинаковой температуре электронов и плотности электронов:

$$k_{\text{ион}}^{(1)} \frac{g_{1a}}{g_{1i}} e^{I_1/T_e} = k_{\text{ион}}^{(2)} \frac{g_{2a}}{g_{2i}} e^{I_2/T_e}. \quad (4.42)$$

**Задача 4.35.** Определить зависимость константы скорости ионизации от температуры электронов при большой плотности электронов.

Если плотность электронов велика, то излучение атомов не играет роли и плотность возбужденных атомов определяется законом Больцмана:  $N_n = \frac{g_n}{g_0} N_0 e^{-\epsilon_n/T_e}$ , где  $\epsilon_n$  — энергия возбуждения соответствующего уровня. Частота ионизации равна

$$\nu_{\text{ион}} = k_{\text{ион}} N_0 = \sum_n k_n N_n.$$

Поскольку при неупругих столкновениях электрона с атомом в основном передается энергия порядка температуры электронов, преимущественный вклад в эту сумму вносят возбужденные состояния с энергией ионизации порядка температуры. Учитывая это, получим ( $g_n = g_i g_e n^2$ , где  $g_i$ ,  $g_e = 2$  — статистический вес иона и электрона соответственно,  $n$  — главное квантовое число рассматриваемого состояния)

$$k_{\text{ион}} \sim \frac{g_i}{g_0} n^3 \langle v\sigma \rangle e^{-I/T} \sim \left(\frac{me^4}{\hbar^2 T_e}\right)^{3/2} \langle v\sigma \rangle e^{-I/T} \frac{g_i}{g_0}.$$

Здесь  $n$  — главное квантовое число для возбужденных атомов, посредством прямой ионизации которых образуются свободные электроны,  $v \sim \sqrt{T_e/m}$  — скорость электрона; сечение ионизации  $\sigma$  возбужденного атома с энергией ионизации  $me^4/\hbar^2 n^2 \sim T_e$  по порядку величины равно сечению обмена энергией  $\sim T_e$  при столкновении двух электронов с энергиями  $\sim T_e$ :  $\sigma \sim e^4/T_e^2$ . Отсюда получаем

$$k_{\text{ион}} = A \frac{g_i}{g_0} \frac{me^{10}}{\hbar^3 T_e^3} e^{-I/T_e}, \quad (4.43)$$

где коэффициент пропорциональности  $A$  порядка единицы.

**Задача 4.36.** Определить константу скорости ступенчатой ионизации атомов, используя принцип детального равновесия и выражение для коэффициента рекомбинации при малой температуре и высокой плотности электронов.

Используем условие термодинамического равновесия плазмы с высокой плотностью электронов, когда процессы излучения возбужденных атомов не играют роли. Из условия равновесия следует, что число свободных электронов, образующихся в результате ступенчатой ионизации, равно числу электронов, рекомбинирующих в единицу времени в результате тройной рекомбинации электронов ( $e + e + A^+ \rightarrow e + A$ ), т. е. процесса, обратного процессу ступенчатой ионизации. Это условие дает

$$N_e N_a k_{\text{ион}} = N_e N_i \alpha,$$

где  $N_a$ ,  $N_e$ ,  $N_i$  — плотность атомов, электронов и ионов соответственно,  $k_{\text{ион}}$  — константа скорости ступенчатой ионизации,  $\alpha$  — коэффициент тройной рекомбинации. Так как рекомбинация происходит в результате тройных столкновений, то коэффициент рекомбинации пропорционален плотности электронов,  $\alpha = \mathcal{K} N_e$ . Учитывая это, получим

$$k_{\text{ион}} = \frac{N_e N_i}{N_a} \mathcal{K}.$$

Для плазмы, находящейся в термодинамическом равновесии, используем формулу Саха (2.14), устанавливающую связь между плотностями электронов, ионов и атомов:

$$\frac{N_e N_i}{N_a} = \frac{g_e g_i}{g_a} \left( \frac{m T_e}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-I/T_e},$$

где  $I$  — потенциал ионизации атома,  $T_e$  — температура электронов,  $g_e$ ,  $g_i$ ,  $g_a$  — статистический вес электрона, иона и атома соответственно. Отсюда

$$k_{\text{ион}} = \frac{g_e g_i}{g_a} \left( \frac{m T_e}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-I/T_e} \mathcal{K}(T_e).$$

Используем выражение для коэффициента рекомбинации при высоких плотностях электронов и низких температурах электронов:

$$\mathcal{K} = \frac{B e^{10}}{\sqrt{m T_e^{9/2}}},$$

где коэффициент пропорциональности  $B$  порядка единицы. Для константы скорости ступенчатой ионизации получим

$$k_{\text{ион}} = A \frac{g_i}{g_a} \frac{m e^{10}}{\hbar^3 T_e^3} e^{-I/T_e}, \quad A = \frac{2B}{(2\pi)^{3/2}} \quad (g_e = 2). \quad (4.44)$$



**Задача 4.37.** Сравнить значения констант скоростей прямой и ступенчатой ионизации при малой температуре и высокой плотности электронов.

При большой плотности электронов, когда излучением возбужденных атомов в процессе ионизации можно пренебречь, и малой температуре электронов константа скорости ступенчатой ионизации определяется формулой (4.43)

$$k_{\text{ступ}} = A \frac{g_i}{g_0} \frac{me^{10}}{\hbar^3 T_e^3} e^{-I/T_e},$$

где  $T_e$  — температура электронов,  $I$  — потенциал ионизации атома, константа  $A$  порядка единицы.

Сечение ионизации атома электронным ударом вблизи порога зависит от энергии по линейному закону и имеет вид

$$\sigma_{\text{ион}} = \sigma_0 (\varepsilon/I - 1), \quad \varepsilon > I,$$

где  $\varepsilon$  — энергия налетающего электрона, величина  $\sigma_0$  порядка поперечника атома. Считая функцию распределения электронов по скоростям максвелловской,

$$f(\varepsilon) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\pi^{1/2} T_e^{3/2}} e^{-\varepsilon/T_e}, \quad \int_0^{\infty} f d\varepsilon = 1,$$

для константы скорости прямой ионизации получим выражение

$$k_{\text{прям}} = \int_I^{\infty} f(\varepsilon) \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} \sigma_{\text{ион}} d\varepsilon = \sqrt{\frac{8T_e}{\pi m}} \sigma_0 e^{-I/T_e}, \quad \frac{T_e}{I} \ll 1.$$

Сравнивая эту величину с константой скорости ступенчатой ионизации, находим

$$\frac{k_{\text{прям}}}{k_{\text{ступ}}} = \frac{g_0 \sigma_0}{A g_i a_0^2} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left( \frac{\hbar^2 T_e}{m e^{10}} \right)^{1/2} \ll 1,$$

учитывая, что  $T_e \ll I \sim m e^4 / \hbar^2$ .

Таким образом, при больших плотностях электронов и малой электронной температуре свободные электроны в системе бесконечных размеров образуются в результате ступенчатой ионизации атомов.

#### § 4. Рекомбинация заряженных частиц в плазме

Изменение плотности положительных ионов  $N_+$  или отрицательно заряженных частиц (электронов или отрицательных ионов)  $N_-$ , связанное с их рекомбинацией, определяется соотношением

$$\frac{dN_+}{dt} = \frac{dN_-}{dt} = -\alpha N_+ N_-, \quad (4.45)$$

где  $\alpha$  — коэффициент рекомбинации. При рекомбинации заряженных частиц выделяется энергия, равная энергии связи рекомбинирующих частиц. Если эта энергия передается на внутренние степени свободы рекомбинирующих частиц, то рекомбинация носит двухчастичный характер и коэффициент рекомбинации не зависит от плотности частиц. Если же избыточная энергия отдается третьей частице (тройная рекомбинация), то коэффициент рекомбинации пропорционален плотности частиц третьего сорта.

**Задача 4.38.** Определить зависимость коэффициента тройной рекомбинации положительно и отрицательно заряженной частицы от параметров, характеризующих их взаимодействие с третьей частицей.

Пусть заряженные частицы находятся в термодинамическом равновесии с частицами третьего сорта, так что их кинетическая энергия порядка температуры системы  $T$ . Тогда для рекомбинации этих частиц необходимо, чтобы они сблизилась на расстояние, при котором потенциал взаимодействия заряженных частиц порядка тепловой энергии. Действительно, третья частица забирает энергию у одной из заряженных частиц, причем эта передача энергии порядка кинетической энергии заряженной частицы. Для рекомбинации заряженных частиц необходимо, чтобы эта передача энергии превышала кинетическую энергию заряженных частиц до столкновения.

Назовем расстояние  $b$  между рекомбинирующими частицами, при котором потенциал взаимодействия между ними порядка их тепловой энергии,  $U(b) \sim T$ , критическим радиусом. Частота исчезновения положительных ионов есть произведение частоты столкновения одной из заряженных частиц с частицей третьего сорта  $N_3 \bar{v} \sigma$  (при этом столкновении частице третьего сорта передается энергия порядка  $T$ ) на вероятность нахождения в этот момент отрицательно заряженной частицы в критической области  $N_- b^3$ . Здесь  $N_3$  — плотность частиц третьего сорта,  $\bar{v}$  — относительная скорость столкновения частицы третьего сорта с одной из заряженных частиц,  $\sigma$  — сечение столкновения, при котором одна из заряженных частиц передает частице третьего сорта энергию  $\sim T$ . Отсюда получаем для коэффициента тройной рекомбинации

$$\alpha \sim N_3 \bar{v} \sigma b^3. \quad (4.46)$$

При этом мы полагали, что одновременное соударение заряженной частицы с двумя частицами третьего сорта маловероятно, так что длина пробега заряженной частицы относительно столкновения с частицами третьего сорта велика по сравнению с размером критической области:

$$N_3 \sigma b \ll 1. \quad (4.47)$$

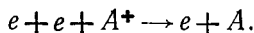
Описанный метод рассмотрения тройной рекомбинации частиц носит название модели Томсона. Модель Томсона применима в случае, если приведенная масса заряженных частиц и масса частицы третьего сорта одного порядка. При этом за каждое сильное столкновение частица третьего сорта обменивается с заряженными частицами энергией порядка  $T$ , так что в этом случае величина  $\sigma$  в формуле (4.46) оказывается порядка сечения упругого соударения частицы третьего сорта с заряженными частицами.

Модель Томсона позволяет оценить коэффициент рекомбинации в случае, когда связанное состояние заряженных частиц образуется в результате однократного соударения этих частиц с третьей частицей. Она основана на предположении, что захват происходит по законам классической механики, т. е. расстояние между уровнями соседних связанных состояний возбужденной системы, состоящей из рекомбинирующих частиц, мало. По этой причине модель не применима, например, к случаю образования отрицательного иона при тройных столкновениях электронов с атомами газа (электрон и атом могут образовать только одно связанное состояние).

Модель Томсона весьма полезна, ибо позволяет простым способом оценить величину коэффициента рекомбинации и определить его зависимость от параметров плазмы. Ценность такого подхода велика и потому, что точное нахождение коэффициента рекомбинации для каждого конкретного механизма рекомбинации является весьма сложной математической задачей, тогда как модель Томсона для данного случая взаимодействия рекомбинирующих частиц оставляет неопределенной лишь одну константу и имеет весьма простой физический смысл.

**Задача 4.39.** Определить зависимость коэффициента тройной рекомбинации электронов и ионов на электронах от параметров плазмы.

В этом случае рекомбинация происходит по схеме



Критический радиус для этой реакции определяется соотношением  $e^2/b \sim T$ , скорость столкновения электронов  $\bar{v} \sim \sqrt{T/m}$ , и если считать сечение передачи энергии кулоновским  $\sigma \sim e^4/T^2$ , то получим на основании формулы (4.46) коэффициент рекомбинации

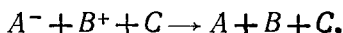
$$\alpha = a \sqrt{\frac{T}{m}} \left( \frac{e^2}{T} \right)^5 N_e, \quad (4.48)$$

где коэффициент  $a$  порядка единицы,  $N_e$  — плотность электронов. При этом условие применимости модели Томсона (4.47) совпадает с условием идеальности плазмы

$$\frac{e^6 N_e}{T^3} \ll 1.$$

**Задача 4.40.** Определить зависимость коэффициента тройной рекомбинации положительного и отрицательного ионов на атомах от параметров системы.

Этот процесс происходит по схеме



В этом случае сечение столкновения нейтральной частицы  $C$  с заряженной отвечает поляризационному взаимодействию между ними и оказывается порядка  $\sigma_y \sim \sqrt{\beta e^2/T}$ , где  $\beta$  — поляризуемость атома  $C$ . Коэффициент рекомбинации равен по порядку величины

$$\alpha \sim \frac{e^6 N_a}{T^3} \bar{v} \sigma_y, \quad (4.49)$$

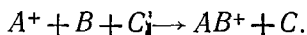
где  $N_a$  — плотность атомов  $C$ ;  $\bar{v}$  — относительная скорость соударения иона с атомом. Считаем, что массы ионов и атома одного порядка.

Полученный результат (4.49) справедлив при условии, что длина свободного пробега ионов относительно столкновений с атомами  $\lambda \sim 1/N_a \sigma_y$  много меньше размера критической области  $b \sim e^2/T$ . Поэтому критерий применимости формулы (4.49) дается соотношением

$$N_a \frac{e^2}{T} \sigma_y \ll 1. \quad (4.50)$$

**Задача 4.41.** Определить зависимость константы скорости образования молекулярных ионов из атомных в результате тройных соударений с атомами газа от параметров задачи (температуры и плотности газа, массы частиц и поляризуемости атомов).

Рассматриваемый процесс происходит по схеме



Хотя эта реакция уже не связана с рекомбинацией заряженных частиц, она носит тот же характер, что и рекомбинация, так что константа скорости данной реакции

$$\frac{dN_{A^+}}{dt} = -k_{\text{пр}} N_{A^+} N_B$$

может быть найдена теми же методами, что и коэффициент рекомбинации. Будем считать, что масса частиц  $A$ ,  $B$  и  $C$  одного порядка. Тогда критический радиус  $b$  дается соотношением  $\beta_B e^2/b^4 \sim T$ , где  $\beta_B$  — поляризуемость атома  $B$ , а расстояние сближения  $\rho$  ( $\sigma \sim \rho^2$ ) между частицами  $A^+$  и  $C$ , при котором частице  $C$  передается энергия порядка  $T$ , соответствует прицельному параметру захвата и может быть получено из соотношения  $\beta_C e^2/\rho^4 \sim T$ , где  $\beta_C$  — поляризуемость атома  $C$ . Используя полученные соотно-

шения, найдем на основе формулы (4.46) константу скорости рассматриваемой реакции

$$k_{\text{пр}} = aN_c \left( \frac{\beta V e^2}{T} \right)^{3/4} \left( \frac{\beta C e^2}{M} \right)^{1/2}, \quad (4.51)$$

где безразмерный коэффициент  $a$  порядка единицы,  $M$  — масса ядер ( $A$ ,  $B$  или  $C$  одного порядка).

**Задача 4.42.** Определить зависимость константы скорости процесса  $A + 2B \rightarrow AB + B$  от параметров задачи, исходя из соображений размерности. Температура  $T$  системы много меньше энергии связи для системы  $AB$ , находящейся в основном состоянии, масса  $m$  частицы  $B$  много меньше или порядка массы частицы  $A$ , потенциал взаимодействия рекомбинирующих частиц в области расстояний  $R$  между ними, где его величина порядка тепловой энергии, определяется зависимостью  $U(R) = -C/R^n$ .

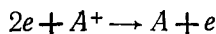
Согласно модели Томсона (задача 4.38) при тройной рекомбинации образуются в основном связанные состояния рекомбинирующих частиц с энергией порядка температуры системы. Поэтому константа скорости тройного захвата зависит только от параметров  $T$ ,  $m$ ,  $C$ . При этом мы считаем, что закон взаимодействия частиц, которые образуют связанное состояние, и закон взаимодействия одной из них с третьей частицей, которой отдается излишек энергии, одинаков. Поскольку скорость процесса определяется приведенной массой каждой из пары взаимодействующих частиц, то результат не будет зависеть от массы частицы  $A$ , если она значительно превышает величину  $m$  — массу частицы  $B$ .

Введем константу скорости тройного процесса  $\mathcal{K}^e$  на основе соотношения  $v_{\text{захв}} = \mathcal{K}^e N_A N_B^2$ , где  $v_{\text{захв}}$  — частота тройного захвата,  $N_A$ ,  $N_B$  — плотность частиц  $A$  и  $B$  соответственно. При таком определении величина  $\mathcal{K}^e$  не зависит от плотностей частиц и выражается только через параметры  $T$ ,  $m$ ,  $C$ . Из этих параметров мы можем составить только одну комбинацию для  $\mathcal{K}^e$  с нужной размерностью ( $\text{см}^6/\text{с}$ ):

$$\mathcal{K}^e = a (|C|)^{5/n} / T^{5/n-1/n} \sqrt{m},$$

где  $a$  — безразмерный коэффициент порядка единицы.

В частности, в случае процесса



эта формула дает для константы тройной рекомбинации ( $|C| = e^2$ , где  $e$  — заряд электрона):

$$\mathcal{K}^e = a e^{10} / T^{9/2} m^{1/2},$$

что совпадает с формулой (4.48). В случае процесса

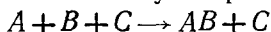


для константы тройного захвата получаем выражение ( $|C| = \beta e^2$ ,  $\beta$  — поляризуемость атома  $B$ )

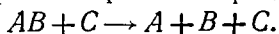
$$\mathcal{K}^e = a (\beta e^2)^{5/4} / T^{3/4} \sqrt{m},$$

которое совпадает с формулой (4.51), если считать частицы  $B$  и  $C$  одинаковыми.

**Задача 4.43.** Выразить константу скорости процесса



через константу скорости обратного процесса



Здесь  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — атомы или атомные ионы.

Уравнение баланса для плотности частиц имеет вид

$$\frac{dN_A}{dt} = \sum_{\nu, I} N_{AB} N_C k_{\text{расп}}(\nu, I) - \mathcal{K}^e N_A N_B N_C,$$

где  $N_A$ ,  $N_B$ ,  $N_C$  — плотности частиц  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно;  $N_{AB}$  — плотность молекул  $AB$ , находящихся в колебательном состоянии  $\nu$  и вращательном состоянии  $I$ ;  $k_{\text{расп}}(\nu, I)$  — константа распада молекул, находящихся в данном колебательном состоянии  $\nu$  и вращательном  $I$ ;  $\mathcal{K}^e$  — константа скорости тройного захвата атомов.

Если система находится в термодинамическом равновесии, то связь между плотностью атомов и молекул в данном колебательно-вращательном состоянии определяется соотношением Саха (2.14)

$$\frac{N_A N_B}{N_{AB}} = \frac{g_1 g_2}{(2I + 1) g_{\text{мол}}} \left( \frac{\mu T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-D^*/T},$$

где  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_{\text{мол}}$  — статистические веса атомов  $A$ ,  $B$  и молекулы  $AB$ , определяемые их электронным состоянием;  $\mu$  — приведенная масса молекулы  $AB$ ;  $D^*$  — энергия диссоциации молекулы в данном состоянии. Для поддержания термодинамического равновесия в системе необходимо выполнение следующего соотношения между константами скоростей прямого и обратного процессов:

$$\mathcal{K}^e = \frac{g_{\text{мол}}}{g_1 g_2} \left( \frac{2\pi \hbar^2}{\mu T} \right)^{3/2} \sum_{\nu, I} (2I + 1) k_{\text{расп}}(\nu, I) e^{D^*/T}.$$

Это соотношение между константами скоростей процессов, естественно, сохраняется, если термодинамическое равновесие поддерживается только внутри атомной системы.

**Задача 4.44.** Определить константу скорости образования молекулярных ионов  $A^+ + 2A \rightarrow A_2^+ + A$ , используя результат предыдущей задачи и вычисля константу скорости разрушения молекулярного иона в импульсном приближении.

Константа скорости разрушения молекулярного иона, через которую согласно результату предыдущей задачи выражается константа скорости образования молекулярного иона, может быть представлена следующим образом:

$$k_{\text{разр}} = k_{\text{захв}} W_{\text{расп}},$$

где  $k_{\text{захв}} = 2\pi \sqrt{3\beta e^2/2M}$  — константа скорости захвата атома молекулярным ионом ( $2M/3$  — приведенная масса атома и молекулярного иона,  $M$  — масса ядра атома  $A$ ),  $W_{\text{расп}}$  — вероятность распада комплекса на три частицы,  $\beta$  — поляризуемость атома  $A$ . Такая форма записи отвечает физической картине процесса, согласно которой распад системы может произойти только в результате сильного взаимодействия частиц, а оно возможно лишь при захвате, приводящем к сближению частиц. Основная проблема сводится к нахождению величины  $W_{\text{расп}}$ , которая определяется законами движения трех частиц. В силу математической сложности этой задачи при ее решении мы используем модель, которая приведет к существенным упрощениям. Как будет видно, каждое из предположений, соответствующих этой модели, приводит к завышению результата, который поэтому должен рассматриваться как верхняя граница для константы тройного захвата.

Будем считать, что захват происходит на уровне молекулярного иона, не близкие к основному, так что можно ограничиться классическими законами движения частиц. Кроме того, будем пренебрегать взаимодействием между атомами, которое в интересующей нас области расстояний между частицами мало по сравнению с поляризационным взаимодействием иона и атома. Эти предположения выполняются. Наряду с ними используем предположения, одно из которых соответствует импульсному приближению. Согласно импульсному приближению столкновение иона с атомом происходит очень быстро, так что за время столкновения расстояние между ионом и связанным атомом не успевает измениться. Согласно другому предположению будем считать, что ион и свободный атом обмениваются импульсами так, как это происходит при лобовом соударении. Тогда, если  $v_1$  — скорость свободного атома,  $v_2$  — скорость иона,  $v_3$  — скорость связанного атома до столкновения, то после столкновения эти величины окажутся равными соответственно  $v_2$ ,  $v_1$  и  $v_3$ .

Пусть  $\mathcal{E}$  — энергия диссоциации молекулярного иона в данном состоянии,  $U$  — модуль потенциала взаимодействия иона с атомом в молекулярном ионе при данном расстоянии между ними,  $V = (v_2 + v_3)/2$  — скорость молекулярного иона. Удобно ввести отно-

сительную скорость частиц в молекулярном ионе  $v = \sqrt{2(U - \mathcal{E})/\mu}$  ( $\mu = M/2$ ) до столкновения и выразить скорости частиц  $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  через величины  $\mathbf{V}, \mathbf{v}$ . При предположениях рассматриваемой модели относительная скорость частиц в молекулярном ионе после столкновения равна

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \frac{v}{2} + \mathbf{V} - \mathbf{v}_3 = \frac{v}{2} + \mathbf{u},$$

где  $\mathbf{u}$  — относительная скорость сближения молекулярного иона и атома до столкновения. Если  $\mu v_{\text{отн}}^2 \geq U(r)$ , то в результате такого столкновения происходит распад молекулярного иона. Учитывая это, для вероятности распада при данных модельных предположениях находим

$$W_{\text{расп}}(r, \mathcal{E}) = \begin{cases} 0, & u < \sqrt{\frac{2U(r)}{\mu}} - \frac{v}{2}, \\ \frac{\left(u + \frac{v}{2}\right)^2 - \frac{2U(r)}{\mu}}{2uv}, & \sqrt{\frac{2U(r)}{\mu}} - \frac{v}{2} < u < \sqrt{\frac{2U(r)}{\mu}} + \frac{v}{2}, \\ 1, & u > \sqrt{\frac{2U(r)}{\mu}} + \frac{v}{2}. \end{cases}$$

Мы несколько упростим это выражение, представив его в виде

$$W_{\text{расп}}(r, \mathcal{E}) = \begin{cases} 0, & u < \sqrt{\frac{2U(r)}{\mu}}, \\ 1, & u > \sqrt{\frac{2U(r)}{\mu}}. \end{cases}$$

Согласно результату предыдущей задачи, константа скорости тройного захвата равна

$$\mathcal{K}^0 = g \left( \frac{4\pi\hbar^3}{MT} \right)^{3/2} \int \frac{dr dp}{(2\pi\hbar)^3} \delta \left( -\mathcal{E} + U - \frac{p^2}{2\mu} \right) d\mathcal{E} k_{\text{расп}} e^{\mathcal{E}/T},$$

где  $g = \frac{g_{\text{мол}}}{g_1 g_2}$ ,  $\frac{dr dp d\mathcal{E}}{(2\pi\hbar)^3} \delta \left( U - \mathcal{E} - \frac{p^2}{2\mu} \right)$  — число состояний в данном элементе фазового пространства,  $p = \mu v$ . Величина  $k_{\text{расп}}$ , усредненная по относительной скорости молекулярного иона и атома с максвелловской функцией распределения, равна

$$k_{\text{расп}} = 2\pi \left( \frac{3\beta e^2}{2M} \right)^{1/2} \frac{2}{\sqrt{\pi} T^{3/2}} \int_{1/2 U}^{\infty} e^{-E/T} E^{1/2} dE.$$

Объясним нижний предел интегрирования. Распад происходит при  $\mu u^2/2 \equiv \mu u^2/4 \geq U$ . Относительная энергия соударения молекулярного иона и атома равна  $E = \mu u^2/3$ , ибо приведенная масса этих частиц равна  $2M/3$ . Отсюда находим, что распад молеку-



лярного иона осуществляется при относительных энергиях соударения  $E = \frac{4}{3}U$ . Это приводит к следующему выражению для константы тройного захвата:

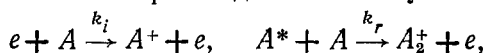
$$\mathcal{K}^e = g \frac{16 \sqrt{2} \pi (3\beta e^2)^{1/2}}{M^{1/2} T^3} \int_{\mathcal{E} \leq U} V \sqrt{U - \mathcal{E} r^2} dr e^{\mathcal{E}/T} d\mathcal{E} \int_{\frac{4}{3}U}^{\infty} e^{-E/T} E^{1/2} dE.$$

Основной вклад в интеграл вносит область  $r$ , где  $U \sim T$ , т. е. взаимодействие носит поляризационный характер ( $U = \beta e^2 / 2r^4$ ). Используя это и вводя новые переменные  $x = U/T$ ,  $y = \mathcal{E}/T$ ,  $z = \mathcal{E}/U$ , получим

$$\mathcal{K}^e = g \frac{(\beta e^2)^{5/4}}{M^{1/2} T^{3/4}} \frac{4\pi \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{7/4}} \int_0^x V \sqrt{x-y} dy e^y \times \\ \times \int_{\frac{4}{3}x}^{\infty} e^{-z} z^{1/2} dz = 13,6g \frac{(\beta e^2)^{5/4}}{M^{1/2} T^{3/4}}.$$

Как видно из полученного результата, зависимость константы реакции от параметров задачи  $\beta e^2$ ,  $M$ ,  $T$  такая же, как и в задачах 4.41, 4.42.

**Задача 4.45.** Монохроматический пучок электронов в течение короткого промежутка времени пропускается через газ. После этого измеряется отношение тока молекулярных ионов к току атомарных. Связать это отношение с константами реакций, если реакции в газе происходят по закону



Здесь  $A$ ,  $A^*$  — атом и возбужденный атом, из которого образуется молекулярный ион, над стрелками указаны обозначения для констант или времени реакции.

Уравнения баланса для плотности ионов имеют вид

$$\frac{dN_1}{dt} = N_e N_a k_i, \quad \frac{dN^*}{dt} = N_e N_a k_e - N^* \left( \frac{1}{\tau_a} + N_a k_r \right), \\ \frac{dN_2}{dt} = N^* N_a k_r,$$

где  $N_1$ ,  $N_2$  — плотности атомных и молекулярных ионов,  $N_a$ ,  $N^*$  — плотности атомов в основном и возбужденном состояниях. Решая эти уравнения в предположении  $N_a k_r t_0 \ll 1$ , получим для плотностей частиц к моменту прекращения импульса электронов

$t = t_0$ :

$$N_1(t_0) = N_a k_i \int_0^{t_0} N_e dt, \quad N^*(t_0) = N_a k_e \int_0^{t_0} N_e dt, \quad N_2 = 0.$$

Решая уравнения баланса при  $t > t_0$ , когда  $N_e = 0$ , и используя данные начальные условия, найдем для отношения токов молекулярных и атомных ионов

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{k_e}{k_i} \frac{1 - \exp[-(1/\tau_u + N_a k_r) \tau]}{1 + (N_a k_r \tau_u)^{-1}}.$$

Здесь  $\tau$  — время, отсчитанное от момента прекращения электронного тока. Полученная формула дает отношение между числом молекулярных и атомных ионов, образовавшихся к моменту  $\tau$ . Если образовавшиеся в газе ионы вытягиваются из него мгновенно и данное отношение молекулярных ионов к атомным может быть обнаружено в любой момент времени, такой эксперимент путем изменения плотности газа позволяет определить величины параметров  $k_e/k_i$ ,  $k_r$ ,  $\tau_u$ . Если же возможно измерение отношения между полным числом молекулярных и атомных ионов, образующихся в пределе  $t \rightarrow \infty$ , то такой эксперимент дает возможность найти параметры  $k_e/k_i$  и  $k_r \tau_u$ .

**Задача 4.46.** Сравнить время установления равновесной температуры и равновесной плотности в плазме.

Здесь предполагается, что внешние условия меняются очень быстро по сравнению со временем релаксации плазмы. Для того чтобы определить, по какому закону система будет возвращаться в равновесие, необходимо совместно решить уравнения баланса для плотности электронов и их температуры. Уравнение баланса для плотности электронов имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dN_e}{dt} &= -\alpha N_e^2 + \beta N_e N_a, \\ \frac{dN_e}{dt} &= -k N_e^3 + \beta N_e N_a, \end{aligned} \quad (4.52)$$

причем первое уравнение написано для случая двухчастичной рекомбинации (или тройной с участием атомов), второе — для тройной рекомбинации с участием электронов в качестве третьего тела. Здесь  $\alpha$ ,  $k N_e$  — коэффициент рекомбинации,  $\beta$  — коэффициент ионизации,  $N_e$  — плотность электронов,  $N_a$  — плотность атомов ( $N_e \ll N_a$ ), плазма квазинейтральна ( $N_e = N_i$ ). Пусть температура электронов в процессе релаксации плотности электронов не изменится. Тогда  $\beta = \alpha N_0 / N_a$  в первом случае и  $\beta = k N_0^2 / N_e$  во втором случае, где  $N_0$  — равновесная для данной температуры плотность электронов. Соответственно уравнения баланса для плотности

электронов (4.52) приводятся к виду

$$\frac{dN_e}{dt} = -\alpha (N_e - N_0) N_e, \quad \frac{dT_e}{dt} = -k (T_e - T_0) N_e,$$

так что в первом случае восстановление равновесной плотности происходит за время  $\sim (\alpha N_0)^{-1}$ , во втором случае  $\sim (k N_0^2)^{-1}$ .

Сравним частоты установления равновесных плотностей  $\alpha N_0$  и  $k N_0^2$  в рассмотренных случаях с частотой установления равновесной температуры  $\nu_{ea}$ . Пусть равновесная температура электронов устанавливается в результате упругих соударений электронов с атомами. Тогда  $\nu_{ea} \sim \frac{m}{M} N_a \nu \sigma_y$ , где  $\sigma_y$  — сечение упругого столкновения электрона и атома. Если коэффициент рекомбинации  $\alpha$  отвечает рекомбинации электронов и молекулярных ионов, то  $\alpha N_0 \sim \nu \sigma_p N_0$ , где  $\sigma_p$  — сечение рекомбинации электрона и иона. Обычно  $\sigma_p \ll \sigma_y$ , так что при  $N_0 \ll \frac{m}{M} N_a$  равновесная температура устанавливается скорее, чем равновесная плотность.

Как видно отсюда, в области плотностей электронов, при которых можно ввести понятие электронной температуры, частоты релаксации плотности и температуры электронов могут находиться в произвольном соотношении. Если частота релаксации электронной температуры определяется столкновениями электрона с частицами газа (возбуждение электронных состояний или колебательных уровней молекулы), приводящими к более сильному обмену энергией, чем при упругом столкновении, предпочтение следует отдать релаксации температуры. Равновесная температура восстанавливается скорее, чем равновесная плотность, если рекомбинация обусловлена тройными столкновениями электронов и ионов.

На рис. 4.4 показаны два предельных случая для изменения состояния слабоионизованной плазмы, которое характеризуется температурой и плотностью электронов. Цифрой 1 обозначено начальное состояние системы, цифрой 0 — равновесное конечное состояние. Сплошная линия соответствует случаю, когда частота установления равновесной энергии много больше частоты установления равновесной плотности, штриховая линия — противоположному случаю. Точки отвечают формуле Саха (2.14). Во втором предельном случае плотность электронов в каждый момент времени является равновесной для данной температуры. Если частоты релаксации температуры и плотности одного порядка, система

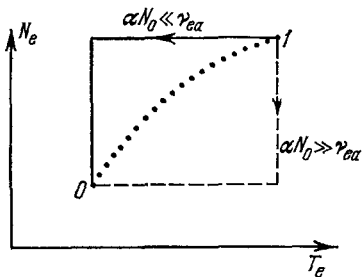


Рис. 4.4. Восстановление равновесной плотности и равновесной температуры в плазме.

приходит в равновесие по линии, находящейся между двумя указанными.

**Задача 4.47.** Показать, что время распада свободной неидеальной плазмы сравнимо с характерными атомными временами. Плазму считать некантовой ( $N_e a_0^3 \ll 1$ , где  $N_e$  — плотность электронов,  $a_0$  — радиус Бора), тепловая энергия электронов значительно меньше потенциала ионизации атомов.

Проанализируем уравнения баланса для плотности электронов и температуры электронов. Первое в соответствии с формулой (4.48) имеет вид

$$\frac{dN_e}{dt} = -\alpha N_e^2, \quad \alpha \sim \frac{e^{10} N_e}{m^{1/2} T_e^{9/2}},$$

где  $N_e$  — плотность электронов,  $T_e$  — температура электронов. При рекомбинации электрона выделяется энергия, равная потенциалу ионизации  $J$  образуемого атома. Средняя энергия электрона равна  $3/2 T_e$ , так что энергия плазмы в единице объема составляет  $3/2 N_e T_e$  (температуру ионов для простоты считаем малой по сравнению с температурой электронов). Отсюда получаем уравнение баланса для средней энергии плазмы:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} N_e T_e \right) = -J \frac{dN_e}{dt}.$$

Запишем это уравнение с учетом условия  $T_e \ll J$ . Воспользуемся уравнением баланса для плотности электронов. Получим

$$\frac{3}{2} N_e \frac{dT_e}{dt} = -J \frac{dN_e}{dt}.$$

Из этого уравнения следует, что температура электронов изменяется быстрее, чем плотность электронов, поскольку  $T_e \ll J$ . В процессе рекомбинации плазмы температура электронов увеличивается, ибо при этом выделяется энергия. Имеем

$$\frac{dT_e}{dt} \sim \frac{J}{N_e} \left| \frac{dN_e}{dt} \right| \sim J \alpha N_e \sim J \frac{e^{10} N_e^2}{m^{1/2} T_e^{9/2}}.$$

Введем  $\tau_0$  — время пролета электронов области порядка размера атома. Порядок этой величины

$$\tau_0 \sim \frac{\bar{r}}{v} \sim \frac{e^2}{J} \sqrt{\frac{m}{T_e}},$$

где  $\bar{r} \sim e^2/J$  — размер атома, а  $v \sim \sqrt{T_e/m}$  — характерная скорость атома. С учетом этого параметра, а также параметра идеальности плазмы  $\beta = N_e e^6 / T_e^3$  запишем уравнение баланса для температуры электронов в виде

$$\frac{dT_e}{dt} \sim \frac{T_e}{\tau_0} \beta^2.$$

Как видно, для неидеальной плазмы ( $\beta \gg 1$ ) характерное время изменения электронной температуры оказывается весьма малым даже по сравнению со временем пролета электроном расстояний порядка размера атома. Время изменения плотности электронов в  $J/T_e$  раз больше, но и оно значительно меньше мыслимых времен, за которые может быть создана плазма. При этом релаксационные процессы приводят к повышению электронной температуры и к уменьшению электронной плотности, что соответствует уменьшению степени неидеальности плазмы. Отсюда следует вывод, что неидеальная плазма не может быть создана в свободном состоянии. Этот вывод не относится к плотной плазме с дополнительным взаимодействием, например к плазме плотного газа или металла. При наличии дополнительных внутренних сил неидеальная плазма может быть устойчивой и стационарной.

**Задача 4.48.** Получить уравнение, позволяющее определить коэффициент рекомбинации, если известны частоты переходов между состояниями рекомбинирующих частиц.

Пусть  $W(n, n', t)$  — вероятность того, что система рекомбинирующих частиц, первоначально находящаяся в состоянии  $n$ , за время  $t$  перейдет в состояние  $n'$ , а  $W(n, t)$  — вероятность достигнуть основного состояния к моменту времени  $t$  системе, находящейся в начальный момент времени в состоянии  $n$ . Тогда по определению

$$W(n, t) = 1 - \sum_{n'} W(n, n', t), \quad (4.53)$$

и функция  $W(n, n', t)$  по своему смыслу удовлетворяет уравнению Смолуховского (1.66),

$$W(n, n', t + t') = \sum_k W(n, k, t) W(k, n', t').$$

Перейдя к пределу  $t' \rightarrow 0$ , получим из уравнения Смолуховского

$$\frac{\partial W(n, n', t)}{\partial t} = \sum_k \omega_{nk} W(k, n', t) - W(n, n', t) \sum_k \omega_{nk},$$

где  $\omega_{nk} = \lim_{t' \rightarrow 0} \frac{W(n, k, t')}{t'}$  — вероятность перехода в единицу времени из состояния  $n$  в состояние  $k$ , и суммирование проводится по всем состояниям, кроме основного. Было использовано условие нормировки  $\sum_k W(n, k, t') = 1$ . Просуммировав последнее уравнение по состояниям  $n'$  и воспользовавшись соотношением (4.53), найдем

$$\frac{\partial [1 - W(n, t)]}{\partial t} = \sum_k \omega_{nk} [1 - W(k, t)] - [1 - W(n, t)] \sum_k \omega_{nk}. \quad (4.54)$$

Введем

$$\tau(n) = \int_0^{\infty} [1 - W(n, t)] dt = \int_0^{\infty} t \frac{\partial W(n, t)}{\partial t} dt$$

— среднее время, за которое система рекомбинирующих частиц, первоначально находившаяся в состоянии  $n$ , достигает основного состояния. Интегрируя уравнение (4.54) по времени и учитывая, что  $W(n, 0) = 0$ ,  $W(n, \infty) = 1$ , получим уравнение для  $\tau(n)$

$$-1 = \sum_k \omega_{nk} \tau(k) - \tau(n) \sum_k \omega_{nk}. \quad (4.55)$$

Свяжем коэффициент рекомбинации  $\alpha$  со средним временем  $\tau$ , за которое система первоначально свободных рекомбинирующих частиц переходит в основное состояние, отвечающее наимизшему связанному состоянию частиц. Из определения вероятности  $W(n, t)$  перехода системы рекомбинирующих частиц в основное состояние следует, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$W(n, t + t_1) = W(n, t) + [1 - W(n, t)] \sum_{n'} W(n, n', t) W(n', t_1).$$

Это уравнение непосредственно следует из уравнения Смолуховского. Продифференцировав это уравнение по  $t_1$  и проинтегрировав его по  $t$ , получим в пределе  $t_1 \rightarrow 0$ :

$$1 = \int_0^{\infty} [1 - W(n, t)] dt \sum_{n'} W(n, n', t) \left. \frac{\partial W(n', t_1)}{\partial t_1} \right|_{t_1=0}. \quad (4.56)$$

Воспользуемся тем, что время рекомбинации много больше характерного времени перехода между состояниями непрерывного спектра рекомбинирующих частиц. Это определяется большим статистическим весом состояний непрерывного спектра. Так, в случае рекомбинации электронов и ионов число состояний непрерывного спектра, в которые возможны переходы,  $\sim 1/N_e (mT/\hbar^2)^{3/2}$ , т. е. для идеальной низкотемпературной плазмы весьма велико. Поэтому для времен  $t$ , превышающих времена перехода между состояниями непрерывного спектра,  $W(n, n', t)$  не зависит от начального состояния и для состояний непрерывного спектра  $n'$  совпадает с функцией распределения  $f(n')$  по состояниям непрерывного спектра ( $\sum_{n'} f(n') = 1$ ). Вообще говоря, следует учесть и некоторые состояния дискретного спектра, в которые система успевает перейти за рассматриваемые времена  $t$ . Однако в силу малого статистического веса состояний дискретного спектра их вклад в сумму по  $n'$  в уравнение (4.56) мал, так что ими можно пренебречь. В результате уравнение (4.56) приводится к виду

$$1 = \tau \sum_{n'} f(n') \left. \frac{\partial W(n', t_1)}{\partial t_1} \right|_{t_1=0}.$$

По определению коэффициента рекомбинации его величина равна

$$\alpha N_i = \sum_{n'} f(n') \left. \frac{\partial W(n', t)}{\partial t} \right|_{t=0},$$

где  $N_i$  — плотность ионов, и суммирование ведется по состояниям непрерывного спектра. Таким образом, коэффициент рекомбинации

$$\alpha = (\tau N_i)^{-1}, \quad (4.57)$$

причем при данных условиях задачи (идеальная плазма в случае рекомбинации электронов, большой статистический вес состояний непрерывного спектра в общем случае) время рекомбинации слабо зависит от начального состояния непрерывного спектра.

Таким образом, в случае, когда рекомбинация совершается в результате многократных переходов, время рекомбинации является решением уравнения (4.55), а это время простым соотношением (4.57) связано с коэффициентом рекомбинации.

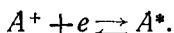
**Задача 4.49.** Определить величину коэффициента рекомбинации электрона и иона, происходящей через образование автоионизационного состояния атома.

Автоионизационное состояние — связанное состояние электрона и иона, энергия возбуждения которого больше потенциала ионизации атома. В автоионизационном состоянии возбуждены несколько электронов, и если это возбуждение передается одному электрону, система распадается с вылетом этого электрона. Наиболее простым примером автоионизационного состояния атома является атом гелия, у которого два электрона находятся в возбужденном состоянии. В результате взаимодействия электронов эта система распадается с образованием иона гелия в основном состоянии и свободного электрона.

Другим примером автоионизационного состояния атома является связанное состояние возбужденного иона и электрона, когда энергия связи электрона с ионом меньше энергии возбуждения иона (например, ион  $\text{Xe}^+ ({}^2P_{1/2})$  и электрон). В отличие от предыдущего примера, в этом случае возбужденной оказывается целая оболочка, и взаимодействие электрона с ней приводит к распаду системы. Следует заметить, что в силу слабой корреляции между электронами время жизни автоионизационных состояний оказывается значительно больше характерных атомных времен ( $\sim 10^{-17}$  с)\*, так что эти состояния являются квазистационарными.

\*) Например, ширина наиболее слабо возбужденного автоионизационного состояния атома гелия  $\text{He} (2s^2)1S$  составляет примерно 0,2 эВ (энергия возбуждения этого состояния 58 эВ). Ширина других автоионизационных состояний гелия значительно меньше. Ширина автоионизационного состояния отрицательного иона гелия  $\text{He}^- (1s2s^2)1S$  составляет примерно 0,01 эВ. Это состояние приводит к появлению резонанса в сечении упругого рассеяния электрона на атоме гелия при энергии электрона 19,3 эВ.

Частота рекомбинации электрона и иона через образование автоионизационного состояния есть произведение вероятности нахождения системы, состоящей из иона и электрона, в автоионизационном состоянии, на частоту перехода системы  $W_{a0}$  из автоионизационного состояния в связанные состояния, из которых атом в дальнейшем переходит в основное состояние. Вероятность нахождения атома в автоионизационном состоянии можно получить методом, подобным выводу формулы Саха (задача 2.7). Система находится в непрерывном спектре и образование автоионизационного состояния отвечает реакции



Отсюда, исходя из формулы Больцмана, получим для вероятности нахождения системы в автоионизационном состоянии выражение

$$\frac{g_a}{g_{\text{непр}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_a}{T}\right),$$

где  $g_a$  — статистический вес автоионизационного состояния,  $g_{\text{непр}}$  — статистический вес состояний непрерывного спектра, определяемый формулой (2.15),  $\varepsilon_a$  — энергия возбуждения автоионизационного состояния, отсчитанная от границы непрерывного спектра,  $T$  — температура электронов.

Отсюда находим для частоты рекомбинации

$$\nu_{\text{рек}} = \omega_{a0} \frac{g_a}{g_{\text{непр}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_a}{T}\right)$$

и далее, пользуясь формулой (2.15), получаем коэффициент рекомбинации электрона и иона через образование автоионизационного состояния

$$\alpha = \frac{\nu_{\text{рек}}}{N_i} = \omega_{a0} \frac{g_a}{g_e g_i} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_a}{T}\right), \quad (4.58)$$

где  $g_e = 2$ ,  $g_i$  — статистический вес электрона и иона соответственно.

Формула (4.58) получена в предположении, что автоионизационное состояние находится в термодинамическом равновесии с непрерывным спектром, а это справедливо, если ширина автоионизационного уровня  $\Gamma$  достаточно велика:  $\Gamma \gg \hbar\omega_{a0}$ . Если это условие не выполняется, то для определения коэффициента рекомбинации удобно воспользоваться системой уравнений (4.55), причем в силу частых переходов между состояниями непрерывного спектра эти состояния мы будем рассматривать как одно состояние, статистический вес которого, согласно формуле (2.15), равен  $g_{\text{непр}} = \frac{g_e g_i}{N_i} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$ . При этом система уравнений (4.55) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_{ca}(\tau_c - \tau_a) &= 1, \\ \omega_{ac}(\tau_a - \tau_c) + \omega_{a0}\tau_a &= 1. \end{aligned}$$



Здесь  $\tau_c$ ,  $\tau_a$  — среднее время перехода в связанное состояние из состояния непрерывного спектра и из автоионизационного состояния,  $\omega_{ca}$  — частота перехода из состояния непрерывного спектра в автоионизованное состояние,  $\omega_{ac}$  — частота обратного перехода,  $\omega_{a0}$  — частота перехода из автоионизационного в связанное состояние. Полученная система уравнений дает для времени рекомбинации выражение

$$\tau_c = \left( \frac{1}{\omega_{ac}} + \frac{1}{\omega_{a0}} \right) \frac{\omega_{ac}}{\omega_{ca}}.$$

Согласно принципу детального равновесия

$$\frac{\omega_{ac}}{g_{\text{непр}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_a}{T}\right) = \frac{\omega_{ca}}{g_a}.$$

Используя принцип детального равновесия, найдем коэффициент рекомбинации

$$\alpha = \frac{1}{\tau_c N_i} = \left( \frac{1}{\omega_{a0}} + \frac{\hbar}{\Gamma} \right)^{-1} \frac{g_a}{g_e g_i} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_a}{T}\right). \quad (4.59)$$

**Задача 4.50.** Определить зависимость коэффициента рекомбинации электрона и иона через образование автоионизационного состояния от температуры электронов.

Сечение рекомбинации электрона и иона, проходящей через образование квазисвязанного состояния, определяется формулой Брейта — Вигнера

$$\sigma_{\text{рек}} = \frac{\pi\hbar^2}{2m\varepsilon} \frac{\Gamma_n \Gamma}{(\varepsilon - \varepsilon_a)^2 + \Gamma^2/4}.$$

Здесь  $\varepsilon$  — энергия рекомбинирующего электрона,  $\varepsilon_a$  — энергия возбуждения автоионизационного уровня,  $\Gamma$  — ширина автоионизационного уровня,  $\Gamma_n = \hbar\omega_{a0}$  — неупругая часть ширины уровня, отвечающая переходу атома из автоионизационного в связанное состояние, так что  $\omega_{a0}$  — частота такого перехода. С помощью выражения для сечения рекомбинации получим для коэффициента рекомбинации  $\alpha = v\sigma_{\text{рек}}$ , усредненному по максвелловскому распределению электронов ( $v$  — скорость электрона):

$$\alpha = \frac{\omega_{a0}}{2\pi} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon/T} \Gamma d\varepsilon}{(\varepsilon - \varepsilon_a)^2 + \Gamma^2/4},$$

где  $T$  — температура электронов.

В пределе малой ширины автоионизационного уровня ( $\Gamma \rightarrow 0$ ) этот интеграл сходится вблизи энергий электрона  $\varepsilon = \varepsilon_a$ . Это означает, что рекомбинация определяется захватом резонансных электронов, энергия которых совпадает с энергией автоионизационного уровня. Соответственно коэффициент рекомбинации

в этом предельном случае равен

$$\alpha = \omega_{a0} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{\varepsilon_a}{T} \right). \quad (4.60a)$$

Эта формула с точностью до статистических весов совпадает с формулой (4.58), которая получена в предположении термодинамического равновесия между автоионизационным уровнем и непрерывным спектром. Расхождение во множителе, содержащем статистические веса частиц, связано с тем, что в формуле Брейта — Вигнера статистические веса электрона, иона и атома положены равными единице.

В другом предельном случае — малых температур — интеграл в выражении для коэффициента рекомбинации определяется малыми энергиями электрона, а коэффициент рекомбинации равен

$$\alpha = \omega_{a0} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{3/2} \frac{\Gamma T}{2\pi\varepsilon_a^2}. \quad (4.60б)$$

Эта формула справедлива при  $T/\varepsilon_a \ll 1$ , причем рекомбинация в этом случае связана с захватом медленных электронов.

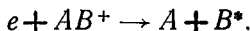
Сравнивая две полученные формулы, отвечающие разным механизмам рекомбинации, находим, что формула (4.60a) для коэффициента рекомбинации справедлива при следующем соотношении между параметрами задачи:

$$\frac{\Gamma}{\varepsilon_a} \ll 2\pi \frac{\varepsilon_a}{T} \exp \left( -\frac{\varepsilon_a}{T} \right). \quad (4.61)$$

При выполнении противоположного условия справедлива формула (4.60б). Заметим, что по определению автоионизационного состояния  $\Gamma/\varepsilon_a \ll 1$ , где  $\Gamma = \hbar\omega_{ac}$  — ширина автоионизационного уровня, отвечающая распаду автоионизационного состояния с образованием свободного электрона. При условии  $\Gamma \gg \hbar\omega_{a0}$  формула (4.59) совпадает с формулой (4.58).

**Задача 4.51.** Определить зависимость коэффициента диссоциативной рекомбинации электрона и молекулярного иона от температуры электронов, если молекулярный ион находится в основном колебательном состоянии и возбужденные атомы образуются в одном состоянии.

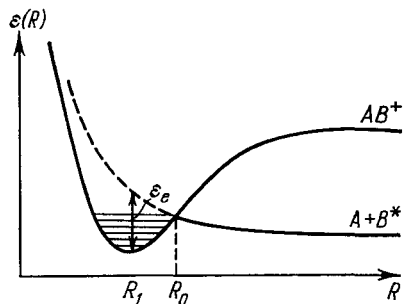
Диссоциативная рекомбинация электрона и молекулярного иона проходит по схеме



Она иллюстрируется рис. 4.5, на котором приведены терм основного состояния молекулярного иона  $AB^+$  и один из термов молекулы, составленной из атомов  $A$  и  $B^*$ . При расстоянии между ядрами  $R_0$  рассматриваемый терм молекулы  $AB$  пересекается с термом  $AB^+$ , так что при меньших расстояниях между ядрами

данное состояние молекулы становится автоионизационным. Электрон захватывается на этот автоионизационный уровень и, если до распада автоионизационного состояния ядра успевают разойтись на большее чем  $R_0$  расстояние, происходит рекомбинация.

Рис. 4.5. Потенциальные кривые молекулярного иона и молекулы в возбужденном электронном состоянии.



Согласно формуле (4.58) коэффициент диссоциативной рекомбинации электрона и молекулярного иона в рассматриваемом случае равен

$$\alpha = \int W(R) dR \frac{1}{\tau_{\text{разл}}} \frac{g_a}{2g_i} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_a(R)}{T}\right).$$

Здесь  $W(R)$  — вероятность нахождения ядер на расстоянии  $R$ , так что  $\int W(R) dR = 1$ ,  $\tau_{\text{разл}}$  — время разлета ядер, за которое расстояние между ними меняется от  $R$  до  $R_0$ ; полагаем, что ширина автоионизационного уровня  $\Gamma$  много больше величины  $\hbar/\tau_{\text{разл}}$ .

Так как молекулярный ион находится в основном колебательном состоянии, то расстояние между ядрами близко к равновесному  $R_1$ , т. е.  $W(R) = \delta(R - R_1)$ . Используя это, получаем для коэффициента диссоциативной рекомбинации

$$\alpha = \frac{1}{\tau_{\text{разл}}(R_1)} \frac{g_a}{2g_i} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_a(R_1)}{T}\right).$$

Если выполняется условие, обратное условию (4.61), то, согласно формуле (4.60б), коэффициент рекомбинации  $\alpha \sim T^{-1/2}$ .

**Задача 4.52.** Определить коэффициент рекомбинации положительного и отрицательного ионов в плотном газе.

Этот случай соответствует выполнению условия, противоположного условию (4.50). При этом основное время рекомбинирующие частицы тратят на сближение друг с другом, так что к задаче определения коэффициента рекомбинации ионов удобно подойти следующим образом. При расстоянии между ионами  $R$  они притягиваются друг к другу кулоновским полем с силой  $e^2/R^2$ . Пока длина пробега ионов в газе  $\lambda \sim 1/N_a \sigma_y$  меньше расстояния между

ними, средняя скорость сближения ионов  $\omega$  равна скорости их дрейфа в электрическом поле соответствующей напряженности:

$$\omega = \frac{e}{R^2} (K_+ + K_-),$$

где  $K_+$ ,  $K_-$  — подвижность положительных и отрицательных ионов в газе. Перейдем в систему координат, где один из ионов покоится. Тогда число ионов другого сорта, попадающих на этот центр в единицу времени, если эти ионы расположены первоначально на расстоянии  $R$  от центра, равно  $4\pi R^2 \omega N_i$ , где  $N_i$  — плотность ионов второго сорта. Используя выражение для скорости дрейфа, получим отсюда формулу Ланжевена для коэффициента трехчастичной рекомбинации положительного и отрицательного ионов в плотном газе:

$$\alpha = 4\pi e (K_+ + K_-). \quad (4.62)$$

**Задача 4.53.** Найти скорость рекомбинации зарядов в аэрозольной квазинейтральной плазме. Эта плазма представляет собой газ, в котором находятся заряженные аэрозольные частицы. При этом соприкосновение двух аэрозольных частиц приводит к нейтрализации находящихся на них зарядов. Считать, что все аэрозольные частицы имеют сферическую форму, одинаковый радиус  $r_0$  и несут на себе одинаковое число  $q$  элементарных зарядов.

Для расчета скорости рекомбинации в аэрозольной плазме используем тот же подход, что и в предыдущей задаче. В результате для коэффициента рекомбинации получим формулу, аналогичную формуле Ланжевена (4.62). Введем коэффициент рекомбинации  $\alpha$  в аэрозольной плазме в соответствии с уравнением баланса:

$$dN/dt = -\beta N^2,$$

где  $N$  — плотность аэрозольных частиц, которые несут на себе заряд одного знака. При соприкосновении двух частиц разного заряда они теряют этот заряд, т. е. число частиц, на которых сосредоточен заряд, при этом уменьшается.

Рекомбинация зарядов происходит в результате сближения частиц, которое обусловлено кулоновским притяжением аэрозольных частиц. При расстоянии  $R$  между частицами сила притяжения равна  $q^2/R^2$  (здесь  $q$  — заряд частицы). Приравняв эту силу силе трения за счет вязкости газа, которая дается формулой Стокса (1.62), находим для скорости  $\omega_+$ , с которой положительно заряженная частица движется навстречу отрицательно заряженной:

$$\omega_+ = q^2/R^2 6\pi r_0 \eta,$$

где  $r_0$  — радиус частицы,  $\eta$  — вязкость воздуха. С такой же скоростью движется отрицательно заряженная частица навстречу по-

ложительно заряженной. Отсюда находим, что скорость сближения двух аэрозольных частиц при заданных условиях равна

$$\omega = q^2/R^2 3\eta\pi r_0.$$

Перейдем теперь в систему координат, в которой положительно заряженная частица покоится. Число отрицательно заряженных аэрозольных частиц, пересекающих сферу радиуса  $R$ , равно

$$\nu = 4\pi R^2 \omega N.$$

По определению величина  $\nu$  удовлетворяет уравнению баланса:

$$dN/dt = -\nu N.$$

Отсюда получаем выражение для коэффициента рекомбинации:

$$\beta = \nu/N = 4q^2/3\eta r_0.$$

**Задача 4.54.** Рассмотреть предыдущую задачу в случае, когда аэрозольные частицы распределены по радиусу и заряду, который сосредоточен на частицах. Распределение частиц по радиусу и заряду одинаково для частиц, несущих заряд разных знаков. Кроме того, заряд, который несет частица, не зависит от ее радиуса.

Введем  $f(q)$  — функцию распределения аэрозольных частиц по заряду, который они имеют. Эта функция нормирована на единицу, так что  $\int f(q) dq = 1$ . Воспользуемся промежуточными результатами предыдущей задачи. Скорость сближения частиц аэрозоля с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , зарядами разных знаков  $q_1$  и  $q_2$  при расстоянии  $R$  между ними равна

$$\omega = \frac{q_1 q_2}{R^2} \frac{1}{6\pi\eta} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Поскольку коэффициент рекомбинации пропорционален этой величине и зависимость от радиуса частицы определяется только этим множителем, проведем усреднение скорости сближения частиц по радиусу частиц. Так как заряд частицы не зависит от ее радиуса, усреднение по заряду и радиусу можно проводить независимо. Усреднение по радиусу дает для средней скорости сближения разноименно заряженных частиц с зарядами  $q_1$  и  $q_2$ :

$$\omega = \frac{q_1 q_2}{R^2} \frac{1}{3\pi\eta r_0},$$

где  $1/r_0 = \langle 1/r \rangle$  и угловые скобки означают усреднение по радиусу частиц.

Введем коэффициент рекомбинации зарядов в аэрозольной плазме  $\alpha$  на основании уравнения баланса:

$$dN_+/dt = -\alpha N_+ N_-.$$

где  $N_+ = N_-$  — число зарядов в единице объема смеси. Эта величина связана с плотностью аэрозольных частиц  $N$ , использованной в предыдущей задаче, соотношением

$$N_+ = N_- = N \langle q \rangle,$$

где  $\langle q \rangle$  — средний заряд частицы. Соответственно, в случае частиц одинакового заряда  $q$ , который сосредоточен на отдельной аэрозольной частице, коэффициенты рекомбинации, введенные в предыдущей и данной задачах, связаны соотношением  $\beta = \alpha q$ .

Частота, с которой исчезает заряд на положительно заряженной частице заряда  $q_1$ , равна (ср. с предыдущей задачей)

$$\nu = 4\pi R^2 \omega N \min(q_1, q_2) = \frac{4q_1 q_2 N}{3\eta r_0} \min(q_1, q_2).$$

Отсюда имеем уравнение баланса для плотности зарядов:

$$\frac{dN_+}{dt} = -\nu N = -\alpha N^2 \langle q \rangle^2,$$

где  $\langle q \rangle$  — средний заряд на аэрозольной частице. Сравнивая выражения в этом уравнении, получим для коэффициента рекомбинации:

$$\alpha = \frac{4}{3\eta r_0} \frac{\langle q_1 q_2 \min(q_1, q_2) \rangle}{\langle q \rangle^2}.$$

В частности, для функции распределения, использованной в предыдущей задаче [ $f(q) = \delta(q - q_0)$ ], имеем отсюда

$$\alpha = \frac{4q_0}{3\eta r_0} = \frac{\beta}{q_0},$$

где  $\beta$  — коэффициент рекомбинации, найденный в предыдущей задаче.

Приведем результаты для простой функции распределения:

$$f(q) = \begin{cases} 0, & q < q_1, \\ (q_2 - q_1)^{-1}, & q_1 < q < q_2, \\ 0, & q > q_2. \end{cases}$$

В этом случае для коэффициента рекомбинации имеем

$$\alpha = \frac{16}{45\eta r_0} \frac{2q_2^3 + 4q_2^2 q_1 + 6q_2 q_1^2 + 3q_1^3}{(q_2 + q_1)^2}.$$

В предельном случае, когда  $q_1 = q_2$ , получаем результат предыдущей задачи.

В другом предельном случае,  $q_1 \ll q_2$ , получаем

$$\alpha = \frac{32q_2}{45\eta r_0}.$$

Оба предельных случая (а также промежуточные случаи для данной функции распределения) с точностью до 3% аппроксими-

руются выражением

$$\alpha = \frac{1,38 \langle q \rangle}{\eta r_0}.$$

Видимо, это выражение подходит и для другого распределения аэрозольных частиц по зарядам.

**Задача 4.55.** Определить зависимость коэффициента диссоциативной рекомбинации электрона и комплексного иона от температуры электронов, считая, что температура электронов порядка комнатной температуры.

В силу сложности комплексного иона имеется много каналов для перехода энергии электрона на внутренние степени свободы образуемого комплекса. Тем самым осуществляется сильное взаимодействие электрона и комплексного иона, которое и определяет искомую зависимость.

Решим задачу на основе следующей модели. Будем считать, что если электрон попадает в область, находящуюся вблизи комплексного иона радиуса  $R_0$ , то имеет место рекомбинация. В противном случае рекомбинации не происходит. Тем самым мы выделяем область сильного взаимодействия электрона и комплексного иона. Поэтому далее наша задача сводится к вычислению сечения попадания электрона в область радиуса  $R_0$  вблизи комплексного иона.

Воспользуемся классическим законом движения электрона. Установим связь между прицельным параметром столкновения  $\rho$  и расстоянием наибольшего сближения  $r_{\min}$ . Потенциал взаимодействия между электроном и ионом кулоновский, причем в области сильного взаимодействия между ними он значительно превышает тепловую энергию. Поэтому кинетическая энергия электрона на расстоянии  $r_{\min}$  от иона равна  $e^2/r_{\min}$ , а касательная компонента скорости при этом расстоянии (нормальная компонента скорости при расстоянии наибольшего сближения равна нулю), составляет  $\sqrt{2e^2/mr_{\min}}$ . Здесь  $e$  — заряд иона и электрона,  $m$  — масса электрона. Приравняем момент количества движения электрона относительно иона вдали от иона и при расстоянии наибольшего сближения. Имеем

$$m\rho v = m r_{\min} \sqrt{2e^2/mr_{\min}},$$

где  $v$  — скорость электрона на бесконечности. Отсюда находим связь между прицельным параметром столкновения  $\rho$  и расстоянием наибольшего сближения частиц  $r_{\min}$ . Это дает для сечения попадания электрона в область размера  $R_0$ , которое в рассматриваемом случае совпадает с сечением рекомбинации:

$$\sigma = \pi R_0^2 = 2\pi R_0 e^2 / m v^2.$$

Использованный при получении этой формулы классический закон движения справедлив, если основной вклад в сечение вносят соударения с большими значениями момента столкновения  $l$ . Имеем для моментов столкновения, вносящих основной вклад в сечение:

$$l \sim \frac{mrv}{\hbar} \sim \frac{mv \sqrt{e^2 R_0 / mv^2}}{\hbar} \sim \sqrt{\frac{R_0}{a_0}},$$

где  $a_0 = \hbar^2 / me^2$  — радиус Бора. Таким образом, полученный результат справедлив, если размер области сильного взаимодействия электрона и комплексного иона значительно превышает характерные атомные размеры.

Используя выражение для сечения рекомбинации, получим для коэффициента рекомбинации:

$$\alpha = \langle v\sigma \rangle = 2\pi \frac{e^2}{m} \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{2\sqrt{2\pi} e^2}{\sqrt{mT_e}},$$

где угловые скобки означают усреднение по скоростям электронов,  $T_e$  — температура электронов. Таким образом, коэффициент рекомбинации электрона и комплексного иона обратно пропорционален корню квадратному из температуры электронов.

Этот результат можно получить непосредственно из формулы Брейта—Вигнера, согласно которой сечение рекомбинации через образование автоионизационного состояния электрона и иона по каналу  $i$  равно

$$\sigma_i = \frac{\pi \hbar^2 (2l+1)}{2m\varepsilon} \frac{\Gamma_i \Gamma_l}{(\varepsilon - \varepsilon_i)^2 + \Gamma_i^2 / 4}.$$

Здесь  $l$  — момент электрона,  $\Gamma$  — полная ширина автоионизационного уровня,  $\Gamma_l$  — ширина, отвечающая упругому рассеянию,  $\Gamma_i$  — ширина, соответствующая распаду по рассматриваемому каналу,  $\varepsilon$  — энергия электрона,  $\varepsilon_i$  — положение  $i$ -го автоионизационного уровня.

Полное сечение рекомбинации есть сумма сечений рекомбинации по отдельным каналам, причем основной вклад в рекомбинацию вносят каналы с большой шириной автоионизационного уровня. Для этих каналов вторая дробь в выражении для сечения рекомбинации не зависит от энергии электронов. Тем самым сечение рекомбинации по основным каналам и полное сечение рекомбинации электрона и комплексного иона обратно пропорционально энергии электрона. Отсюда, как и ранее, получим, что коэффициент диссоциативной рекомбинации обратно пропорционален корню квадратному из температуры электронов.

Таким образом, два разных подхода, каждый из которых по-своему учитывает сильное взаимодействие электрона и комплексного иона, приводят к одинаковому результату. Именно: коэффициент диссоциативной рекомбинации электрона и комплекс-



ного иона обратно пропорционален квадратному корню из температуры электронов.

**Задача 4.56.** Определить коэффициент рекомбинации при малом изменении энергии рекомбинирующей частицы в результате однократного перехода.

В рассматриваемом случае уравнение (4.55) для времени рекомбинации переходит в дифференциальное уравнение. Чтобы его получить, воспользуемся уравнением Фоккера—Планка для плотности вероятности как функции начального состояния (задача 1.35):

$$-A(\varepsilon) \frac{\partial W(\varepsilon, \varepsilon', t)}{\partial \varepsilon} + B(\varepsilon) \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \varepsilon', t)}{\partial \varepsilon^2} = \frac{\partial W(\varepsilon, \varepsilon', t)}{\partial t}.$$

При этом вероятность  $W(\varepsilon, t)$  достигнуть основного состояния системе, первоначально находящейся в состоянии с энергией  $\varepsilon$ ,  $[W(\varepsilon, t) = 1 - \int W(\varepsilon, \varepsilon', t) \rho(\varepsilon') d\varepsilon']$ , удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial (1-v)}{\partial t} = -A \frac{\partial (1-v)}{\partial \varepsilon} + B \frac{\partial^2 (1-v)}{\partial \varepsilon^2}.$$

Отсюда получаем среднее время рекомбинации

$$\tau(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - W(\varepsilon, t)] dt = \int_0^{\infty} t \frac{\partial W(\varepsilon, t)}{\partial t} dt,$$

которое в случае, если система первоначально находилась в состоянии с энергией  $\varepsilon$ , удовлетворяет уравнению

$$B\tau'' - A\tau' = -1.$$

Эти же коэффициенты  $A$  и  $B$  входят и в уравнение Фоккера—Планка (1.71) для плотности вероятности

$$\frac{\partial (W\rho)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ A\rho W + \frac{\partial (B\rho W)}{\partial \varepsilon} \right].$$

Поскольку в равновесном состоянии функция распределения максвелловская ( $W = Ce^{-\varepsilon/T}$ ), то коэффициенты  $A$  и  $B$  связаны соотношением

$$A\rho e^{-\varepsilon/T} = -\frac{d}{d\varepsilon} (B\rho e^{-\varepsilon/T}),$$

т. е.

$$A = -B' + \frac{B}{T} - \frac{\rho'}{\rho} B,$$

где  $T$ —температура рекомбинирующих частиц.

Таким образом, уравнение для  $\tau$  приводится к виду

$$B\tau'' - \left( \frac{B}{T} - B' - B \frac{\rho'}{\rho} \right) \tau' = -1.$$

Решение этого уравнения:

$$\tau(\varepsilon) = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{e^{x/T} dx}{\rho(x) B(x)} \int_x^{C_1} e^{-y/T} \rho(y) dy,$$

где  $\varepsilon_0, C_1$  — константы интегрирования.

В дальнейшем будем иметь в виду рекомбинацию электрона и иона. Энергию электрона будем отсчитывать от границы непрерывного спектра, так что  $\varepsilon_0 = -I$ , где  $I$  — потенциал ионизации атома. Далее, при больших (по сравнению с температурой газа) энергиях пробного электрона он должен только отдавать энергию, т. е. членом  $B\tau''$  в уравнении для  $\tau$  можно пренебречь. Чтобы удовлетворить этому условию, следует положить  $C_1 = \infty$ , так что

$$\tau(\varepsilon) = \int_{-I}^{\varepsilon} dx \int_x^{\infty} \frac{dy e^{x/T} \rho(y) e^{-y/T}}{B(x) \rho(x)}.$$

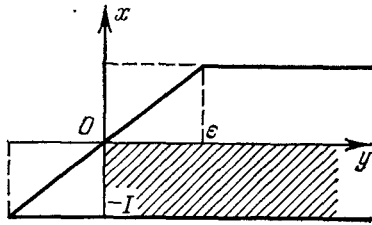


Рис. 4.6. Область интегрирования в задаче 4.5б.

Интегрирование ведется по области, показанной на рис. 4.6.

При этом в случае рекомбинации электрона и иона плотность состояний определяется формулой

$$\rho(\varepsilon) = \frac{dn}{d\varepsilon} = \int \delta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m} + \sum_i \frac{e^2}{r_i}\right) \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3},$$

где  $r_i$  — расстояние от электрона до  $i$ -го иона. Плотность состояний нетрудно вычислить для  $|\varepsilon| \gg e^2 N_i^{1/3}$  ( $N_i$  — плотность ионов). В случае положительных энергий электрона его взаимодействием с ионами при  $\varepsilon \gg e^2 N^{1/3}$  можно пренебречь (  $\sum_i e^2/r_i$  мало по сравнению с  $\varepsilon$  ), так что

$$\rho_{\text{непр}}(\varepsilon) = \int \delta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m}\right) \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi (2m\varepsilon)^{1/2} m\Omega}{(2\pi\hbar)^3}, \quad \varepsilon \gg e^2 N_i^{1/3},$$

где  $\Omega$  — объем системы,  $m$  — масса электрона. Для связанного электрона с энергией связи, превышающей потенциал взаимодействия электрона с отдельными ионами,  $|\varepsilon| \gg e^2 N_i^{1/3}$ , интеграл для плотности состояний разбивается на сумму интегралов вблизи каждого из ионов:

$$\rho_{\text{связ}}(\varepsilon) = N_i \Omega \int \delta\left(-|\varepsilon| - \frac{p^2}{2m} + \frac{e^2}{r}\right) \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\sqrt{2}\pi^3 e^6 m^{3/2} N_i \Omega}{(2\pi\hbar)^3 |\varepsilon|^{5/2}}, \quad |\varepsilon| \gg e^2 N_i^{1/3}.$$

Из сравнения выражений для плотности состояний  $\rho_{\text{непр}}$  и  $\rho_{\text{связ}}$  видно, что для идеальной плазмы  $\rho_{\text{непр}} \gg \rho_{\text{связ}}$ . При этом для идеальной плазмы область энергий  $\sim e^2 N_i^{1/3}$ , где плотность состояний не определена, мала. Поскольку  $\rho_{\text{непр}}/\rho_{\text{связ}} \gg 1$ , в интеграле для времени рекомбинации удобно ограничиться лишь областью, заштрихованной на рисунке, где  $y > 0$ ,  $x < 0$ , и в подынтегральное выражение входит отношение  $\rho_{\text{непр}}/\rho_{\text{связ}}$ . На основе этого получим

$$\begin{aligned} \tau(\epsilon) &\approx \tau(0) = \int_0^I \frac{e^{-|\epsilon|/T} d|\epsilon|}{B(\epsilon) \rho(\epsilon)} \int_0^\infty e^{-y/T} \rho(y) dy = \\ &= \frac{2T^{3/2}}{\pi^{3/2} e^6 N_i} \int_0^\infty e^{-|\epsilon|/T} |\epsilon|^{5/2} d|\epsilon| B^{-1}(\epsilon), \quad I \gg T. \end{aligned} \quad (4.63)$$

**Задача 4.57.** Вычислить коэффициент рекомбинации электрона и иона, если рекомбинация обусловлена тройными столкновениями электрона с атомами газа.

Время рекомбинации определяется формулой (4.63), найденной в предыдущей задаче, причем мы считаем  $I \gg T_e$  ( $T_e$  — температура электронов). Задача сводится к нахождению величины

$$B(\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial \Delta \epsilon^2}}{\partial t},$$

где черта сверху означает усреднение по координатам и скоростям электрона. При вычислении этой величины мы будем считать, что электрон движется в поле иона по классическим законам и в результате соударения с атомами обменивается с ними энергией. Тогда, как было найдено ранее (формула (1.74)),

$$B(\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{\overline{\partial \Delta \epsilon^2}}{\partial t} = \frac{1}{3} v_a^2 m^2 v_e^2 N_a v_e \sigma^*,$$

где  $v_a$  — скорость атома, с которым электрон обменивается энергией,  $v_e$  — скорость электрона,  $\sigma^*$  — диффузионное сечение упругого рассеяния электрона на атоме. Усредним это выражение по скоростям атомов и скоростям электронов. Рассматривая движение в системе координат, где ион неподвижен, получаем  $\langle v_a^2 \rangle = 3T_g/M + v_i^2$ , где  $T_g$  — температура газа,  $M$  — масса атомов,  $v_i$  — скорость иона. При малых скоростях электрона  $\sigma^* = \text{const}$ . Для связанного электрона имеем

$$\begin{aligned} \overline{v_e^3} &= \int v_e^3 \delta\left(\epsilon - \frac{mc_e^2}{2} + \frac{e^2}{r}\right) d\mathbf{v}_e d\mathbf{r} \left[ \int \delta\left(\epsilon - \frac{mv_e^2}{2} + \frac{e^2}{r}\right) d\mathbf{v}_e d\mathbf{r} \right]^{-1} = \\ &= \frac{16}{3\pi} \left( \frac{2|\epsilon|}{m} \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

На основе этого получим для  $\epsilon < 0$

$$B(\epsilon) = \frac{T_r}{M} \left( 1 + \frac{Mv_i^2}{3T_r} \right) N_a \sigma^* m^{1/2} \frac{16}{3\pi} (2|\epsilon|)^{3/2}.$$

При этом мы считали, что за несколько соударений электрона с атомом скорость иона не меняется. Отсюда

$$\tau = \frac{3MT_e^{7/2}}{16 \sqrt{2\pi} e^6 N_i T_r (1 + Mv_i^2/3T_r) N_a \sigma^* m^{1/2}}.$$

Коэффициент рекомбинации, усредненный по скоростям ионов, равен

$$\alpha = \frac{1}{\tau N_i} = \frac{16 \sqrt{2\pi}}{3} \frac{e^6 N_a}{T_e^{7/2}} \frac{T_r \sqrt{m} \sigma^*}{\mu}, \quad (4.64)$$

где  $\mu$ —приведенная масса атома и иона.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ГАЗЕ

## § 1. Равновесие излучения с газом

Излучение, находящееся в термодинамическом равновесии с газом, сосредоточенном в том же объеме, или со стенками сосуда, в котором оно находится, носит название черного излучения. Термодинамическое равновесие излучения с газом отвечает сильному взаимодействию между ними, которое сопровождается поглощением и излучением фотонов. Термодинамическое равновесие может иметь место как в узком интервале частот поля излучения, так и во всем спектре. Далее будут рассмотрены некоторые закономерности, характеризующие черное излучение.

**Задача 5.1.** Получить формулу для среднего числа фотонов, находящихся в одном состоянии при наличии термодинамического равновесия с температурой  $T$ .

Распределение для числа фотонов—осцилляторов поля излучения—определяется теми же законами, что и распределение для любого другого типа колебаний при термодинамическом равновесии. В частности, по аналогии с распределением молекул по колебательным состояниям, имеем, что вероятность возбуждения  $n$  фотонов в рассматриваемом состоянии с частотой  $\omega$  равна  $e^{-\frac{\hbar\omega n}{T}}$ . Отсюда находим среднее число фотонов, находящихся в одном состоянии с энергией  $\hbar\omega$ :

$$\bar{n}_\omega = \sum_n n e^{-\frac{\hbar\omega n}{T}} / \sum_n e^{-\frac{\hbar\omega n}{T}} = \left( e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1 \right)^{-1}. \quad (5.1)$$

Эта формула носит название распределения Планка.

**Задача 5.2.** На основе распределения Планка вывести законы черного излучения для спектральной плотности излучения  $U_\omega$ —энергии электромагнитного поля излучения, приходящейся на единицу объема и единичный интервал частот.

Выделим элементарный объем  $V$  из всего объема, в котором сосредоточено поле излучения. По определению спектральной плотности излучения имеем, что энергия поля излучения, находящаяся в выделенном объеме в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , равна  $VU_\omega d\omega$ . С другой стороны, эта величина равна  $2 \frac{V dk}{(2\pi)^3} \hbar\omega n_\omega$ ,

где множитель 2 учитывает число поляризации поперечной электромагнитной волны,  $\frac{V d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$ —число состояний в рассматриваемом интервале фазового пространства,  $n_\omega$ —число фотонов в одном состоянии,  $k$ —волновой вектор фотона,  $\hbar\omega$ —энергия этого фотона. Приравняем указанные величины и воспользуемся дисперсионным соотношением между частотой электромагнитной волны и волновым вектором  $\omega = kc$  ( $c$ —скорость света). Из полученного соотношения имеем следующее выражение для спектральной плотности излучения:

$$U_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} n_\omega.$$

Если поле излучения находится в термодинамическом равновесии с газом или стенками сосуда, в котором оно сосредоточено, то для числа фотонов в одном состоянии можно воспользоваться формулой (5.1). Это дает для спектральной плотности излучения:

$$U_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 \left( e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1 \right)}. \quad (5.2)$$

Полученная формула носит название формулы Планка. В предельном случае больших частот она переходит в формулу Вина:

$$U_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}, \quad \frac{\hbar\omega}{T} \gg 1.$$

В другом предельном случае, малых частот, формула Планка переходит в формулу Релея—Джинса:

$$U_\omega = \frac{\omega^2 T}{\pi^2 c^3}, \quad \frac{\hbar\omega}{T} \ll 1.$$

Формула Релея—Джинса соответствует классическому пределу, когда результат не зависит от квантового параметра  $\hbar$ . В этом случае зависимость спектральной плотности излучения от определяющих ее параметров может быть получена из соображений размерности. Действительно, в этом предельном случае спектральная плотность излучения выражается через параметры  $\omega$  (размерность частоты),  $T$  (размерность энергии),  $c$  (размерность скорости). Из этих параметров можно составить только одну комбинацию с размерностью спектральной плотности излучения, которая равна  $\omega^2 T c^{-3}$ . Отсюда с точностью до постоянного множителя имеем:  $U_\omega \sim \omega^2 T c^{-3}$ , что совпадает с формулой Релея—Джинса.

**Задача 5.3.** Определить поток энергии излучения, испускаемого с поверхности абсолютно черного тела (закон Стефана—Больцмана).

Внутри объема, заполненного черным излучением, во все стороны распространяется поток энергии излучения, который в рас-

сма­три­вае­мом ин­тер­вале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  равен

$$\hbar\omega i_\omega d\omega = cU_\omega d\omega.$$

Здесь  $i_\omega$  — поток фотонов внутри объема с черным излучением, который согласно формуле Планка определяется формулой

$$i_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^2} \left( e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1 \right)^{-1}. \quad (5.3)$$

Этот поток фотонов распределен изотропно в каждой точке рассматриваемого объема.

Поток энергии излучения, испускаемого с поверхности абсолютно черного тела, мы будем понимать как поток излучения, выходящий через отверстие из полости с непрозрачными стенками, которая заполнена черным излучением. С поверхности черного тела излучается изотропно во все стороны поток  $\int i_\omega \hbar\omega d\omega$ , так что в направлении элемента телесного угла  $d\omega$  излучается поток энергии, равный  $\frac{d\omega}{4\pi} \int i_\omega \hbar\omega d\omega$ . Проектируя элементарные потоки излучения на направление результирующего потока, который перпендикулярен к излучающей поверхности, и учитывая только часть потока, которая уходит наружу за пределы излучающего тела, получим для результирующего потока излучения

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{2\pi \cos\theta d \cos\theta}{4\pi} \int_0^\infty i_\omega \hbar\omega d\omega = \frac{1}{4} \int_0^\infty i_\omega \hbar\omega d\omega = \sigma T^4, \quad (5.4)$$

где  $\theta$  — угол между нормалью к поверхности и направлением испускаемого фотона,  $\sigma = (4\pi^2 c^2 \hbar^3)^{-1} \int_0^\infty (e^x - 1)^{-1} x^3 dx = \pi^2/60 c^2 \hbar^3 = 5,67 \cdot 10^{-12} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$  — постоянная Стефана — Больцмана. Сам закон (5.4) носит название закона Стефана — Больцмана.

**Задача 5.4.** Вывести закон Стефана — Больцмана из соображений размерности.

Равновесное излучение с поверхности абсолютно черного тела определяется температурой тела  $T$ , а также параметрами  $\hbar$  — постоянной Планка и  $c$  — скоростью света, которые характеризуют излучение. Из этих параметров можно построить только одну комбинацию с размерностью  $J$  — потока энергии. Эта комбинация имеет вид

$$J \sim \frac{T^4}{c^2 \hbar^3}.$$

Полученное соотношение с точностью до постоянного множителя совпадает с законом Стефана — Больцмана (5.4).

**Задача 5.5.** Получить уравнение состояния для поля излучения, находящегося в термодинамическом равновесии с газом и сосредоточенного внутри выделенного объема.

Фотоны, перемещаясь внутри рассматриваемой области, переносят импульс и за счет этого оказывают давление на находящийся в данном объеме газ или на ограничивающие его стенки. Поместим мысленно внутри объема площадку и подсчитаем силу, действующую на нее с каждой стороны. Каждый фотон с энергией  $\hbar\omega$  обладает импульсом  $\hbar\omega/c$ , где  $c$  — скорость света. Пусть  $j_\omega d\omega$  — поток фотонов через выделенную площадку, причем частота фотонов сосредоточена в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Как видно, световое давление на площадку с каждой стороны равно

$$p = \int \hbar\omega j_\omega d\omega.$$

В частности, если в данном объеме сосредоточено черное излучение с температурой  $T$ , то световое давление равно

$$p = \frac{\sigma T^4}{c},$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана.

**Задача 5.6.** Получить соотношение между коэффициентом поглощения газа на данной частоте и заданном переходе  $k_\omega$  и вероятностью испускания фотона  $a_\omega$  на этой частоте.

Коэффициент поглощения в газе вводится согласно соотношению

$$\frac{dJ_\omega}{dx} = -k_\omega J_\omega, \quad (5.5)$$

$J_\omega$  — интенсивность излучения, распространяющегося в направлении  $x$ . Соотношение между коэффициентом поглощения  $k_\omega$  и функцией распределения испускания фотонов по частотам  $a_\omega$  мы найдем из условия термодинамического равновесия между излучением и газом.

При наличии термодинамического равновесия для излучения и газа поток излучения, распространяющегося внутри газа, согласно законам черного излучения равен

$$i_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^2} \left( e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1 \right)^{-1}.$$

При этом в единице объема в единицу времени в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  поглощается количество фотонов, равное

$$k_\omega i_\omega d\omega.$$

Эта величина в силу равновесия совпадает с количеством фотонов, испускаемых в единицу времени, которое равно

$$\frac{N_B}{\tau} a_\omega d\omega,$$



где  $N_{\text{в}}$  — плотность атомных частиц на верхнем уровне перехода,  $\tau$  — время жизни атомной частицы на верхнем уровне относительно рассматриваемого перехода. Приравнявая полученные величины, находим

$$k_{\omega} = \frac{N_{\text{в}} a_{\omega}}{\tau I_{\omega}}.$$

Плотность атомных частиц на верхнем и нижнем уровнях перехода связаны законом Больцмана:

$$N_{\text{в}} = \frac{N_0}{g_0} g_{\text{в}} e^{-\frac{\hbar\omega}{T}},$$

где  $N_0$  — плотность атомных частиц на нижнем уровне перехода,  $g_0$ ,  $g_{\text{в}}$  — статистические веса соответствующих состояний. Используя эту формулу и явный вид для потока черного излучения внутри занимаемого им объема, получим

$$k_{\omega} = \frac{N_0}{\tau} a_{\omega} \frac{g_{\text{в}}}{g_0} \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2} \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{T}} \right).$$

Это соотношение справедливо при наличии термодинамического равновесия между верхним и нижним уровнями перехода. При отсутствии равновесия входящую в данную формулу температуру следует определить из формулы Больцмана. В результате получим

$$k_{\omega} = \frac{N_0 g_{\text{в}}}{\tau g_0} a_{\omega} \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{N_{\text{в}} g_0}{N_0 g_{\text{в}}} \right). \quad (5.6)$$

Это соотношение между параметрами, характеризующими поглощение и испускание фотона на данном переходе, справедливо при отсутствии термодинамического равновесия в газе.

## § 2. Перенос резонансного излучения в газе

Резонансными возбужденными состояниями атома или молекулы называют нижние возбужденные состояния, из которых возможен эффективный излучательный переход в основное состояние. Излучение, испускаемое или поглощаемое при таких переходах, носит название резонансного излучения.

Резонансное излучение наиболее эффективно взаимодействует с газом. Оно может составлять основную долю излучения, испускаемого газом. Кроме того, длина пробега резонансных фотонов (т. е. фотонов, составляющих резонансное излучение) невелика. Поэтому при распространении резонансного излучения важную роль играют процессы поглощения и переизлучения резонансных фотонов. Далее, резонансное излучение может влиять на плотность возбужденных атомов. Все это отражается на характере прохождения резонансного излучения через газовую среду. Процессы переизлучения зависят от формы линии излучения. Существенным

является то, что при малых интенсивностях излучения процесс переизлучения фотонов некогерентен, т. е. частота испускаемого фотона не зависит от частоты фотона, поглощаемого при возбуждении атомной частицы.

**Задача 5.7.** Для лоренцевской и доплеровской формы линии определить вероятность  $P(r)$  того, что в изотропной газовой среде резонансный фотон пройдет расстояние  $r$ , не поглотившись. Считать, что коэффициент поглощения не зависит от координаты и расстояние  $r$  много больше длины пробега фотона в центре линии.

По определению коэффициента поглощения (5.5) вероятность того, что фотон с частотой  $\omega$  пройдет расстояние  $r$ , не поглотившись, равна  $\exp(-k_\omega r)$ . Поскольку вероятность испускания фотона в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  равна  $a_\omega d\omega$ , то вероятность того, что резонансный фотон не поглотится на расстоянии  $r$ , оказывается равной

$$P(r) = \int a_\omega d\omega e^{-k_\omega r}. \quad (5.7)$$

Вычислим эту величину для лоренцевской формы линии  $a_\omega = \frac{\nu}{\pi} [(\omega - \omega_0)^2 + \nu^2]^{-1}$  ( $\nu$  — ширина линии). Вводя новую переменную  $s = (\omega - \omega_0)/\nu$ , получим  $a_\omega d\omega = \frac{ds}{\pi(1+s^2)}$  и  $k_\omega = \frac{k_0}{1+s^2}$ , где  $k_0$  — коэффициент поглощения в центре линии. Подставляя эти выражения в формулу (5.7), находим для вероятности не поглотиться резонансному фотону:

$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{(1+s^2)} \exp\left(-\frac{k_0 r}{1+s^2}\right) = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\pi} \exp\left(-k_0 r \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{k_0 r}{2}\right) I_0\left(\frac{k_0 r}{2}\right), \end{aligned}$$

здесь  $\varphi = 2 \arctg s$ ,  $I_0$  — функция Бесселя. В предельном случае когда излучение переносится на расстояние, значительно превышающее длину пробега фотона в центре линии  $1/k_0$ , эта формула дает

$$P(r) = (4\pi k_0 r)^{-1/2}, \quad k_0 r \gg 1.$$

В случае доплеровской формы линии воспользуемся формулой (П4.1) для функции распределения испускаемых фотонов по частотам и введем переменную  $s = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \sqrt{\frac{Mc^2}{2T}}$ . Получим:  $a_\omega d\omega = e^{-s^2} ds$  и  $k_\omega = k_0 e^{-s^2}$ . Подставляя это в формулу (5.7), имеем

$$P(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} ds \exp(-k_0 r e^{-s^2}).$$

После введения новой переменной  $t = k_0 r e^{-s^2}$  ( $0 \leq t \leq k_0 r$ ) эта формула примет следующий вид:

$$P(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi k_0 r}} \int_0^{k_0 r} e^{-t} dt \left( \ln \frac{k_0 r}{t} \right)^{-1}.$$

Вычислим этот интеграл в пределе  $k_0 r \gg 1$ , когда длина пробега фотона в центре линии много меньше расстояния  $r$ . Поскольку основной вклад в искомый интеграл вносят  $t \sim 1$ , заменим верхний предел бесконечностью. Получим:  $P(r) = (\sqrt{\pi} k_0 r \sqrt{\ln k_0 r / t_0})^{-1}$ ,

где  $t_0$  определяется соотношением  $\int_0^{\infty} e^{-t} dt \ln \frac{t}{t_0} = 0$ . В результате при доплеровском механизме уширения линии при  $k_0 r \gg 1$  находим:

$$P(r) = [\sqrt{\pi} k_0 r \sqrt{(\ln k_0 r + C)}]^{-1},$$

где постоянная Эйлера —  $C = 0,577$ .

**Задача 5.8.** Получить выражение для потока резонансных фотонов, выходящих за пределы газового объема на частоте  $\omega$ , и полный поток фотонов.

Геометрия излучения из объема газа представлена на рис. 5.1. Выбирая за начало координат точку поверхности, из которой подсчитывается выходящее излучение, имеем следующее выражение для потока излучения в этой точке поверхности, сосредоточенного в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ :

$$j_{\omega} d\omega = \int \frac{N_{\text{в}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\tau} a_{\omega} d\omega \frac{1}{4\pi r^2} \times \\ \times \exp\left(-\int_0^r k_{\omega} dr'\right) \cos\theta. \quad (5.8)$$

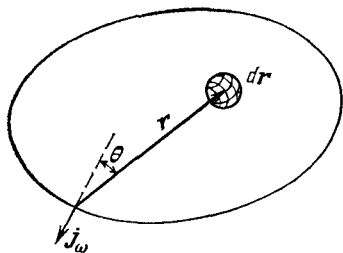


Рис. 5.1. Геометрия излучения газового объема.

Здесь первый множитель  $\frac{N_{\text{в}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\tau}$  представляет собой число фотонов, испускаемых выделенным элементом объема в единицу времени ( $N_{\text{в}}$  — плотность атомных частиц в верхнем состоянии перехода,  $\tau$  — время жизни этого состояния относительно высвечивания). Второй множитель характеризует вероятность того, что фотоны высвечиваются в рассматриваемом интервале частот;  $4\pi r^2$  — площадь на расстоянии  $r$  от источника ( $r$  — расстояние от рассматриваемой точки границы до исследуемого элемента объема).

Считая, что возбужденная атомная частица испускает фотоны изотропно, и разделив число испускаемых фотонов в единицу времени на эту площадь, мы получаем поток фотонов, создаваемый выделенным элементом объема.

Далее, множитель  $\exp\left(-\int k_{\omega} dr'\right)$  в формуле (5.8) представляет собой вероятность того, что испускаемый фотон дошел до границы, не поглотившись, а  $\cos\theta$  учитывает, что создаваемые отдельными элементами объема потоки фотонов как векторы складываются в полный поток;  $\theta$ —угол между направлением полного потока и направлением, соединяющим рассматриваемую точку границы и выделенный элемент объема.

На основе формулы для потока излучения на данной частоте (5.8) получим выражение для полного потока фотонов в данной точке границы. Запишем его в виде

$$j = \int j_{\omega} d\omega = \int \frac{N_B(r) dr}{\tau} \frac{P(r)}{4\pi r^2} \cos\theta. \quad (5.9)$$

Здесь  $P(r)$  представляет собой вероятность того, что испускаемый фотон проходит расстояние  $r$ , не поглотившись, и описывается формулой (5.7). Удобство введения вероятности  $P(r)$  в том, что эта величина не зависит от геометрии задачи. Заметим, что при написании формулы (5.9) мы неявно полагаем одинаковое направление векторов  $j_{\omega}$ .

**Задача 5.9.** Плотность возбужденных атомов  $N$  в газе, заполняющем объем, поддерживается постоянной по объему. Вычислить поток фотонов, выходящих за пределы системы, если форма линии излучения лоренцевская, коэффициент поглощения в центре линии равен  $k_0$ , а время жизни возбужденных атомов относительно высвечивания равно  $\tau$  и значительно превышает характерные времена установления равновесной плотности. Возбужденный газ заполняет объем: между двумя параллельными бесконечными плоскостями с расстоянием  $d$  между ними; внутри бесконечной цилиндрической трубки диаметром  $d$ ; внутри сферы диаметром  $d$ .

Оценим сначала величину потока фотонов по порядку величины. Если бы поглощение внутри объема отсутствовало, то поток фотонов по порядку величины составил бы

$$j \sim \frac{N_B}{\tau} d,$$

где  $d$ —наименьший характерный размер системы. Однако при рассматриваемых условиях характерная вероятность выхода фотона за пределы системы, не поглотившись внутри нее, составляет  $P(d) \sim (k_0 d)^{-1/2}$  (см. задачу 5.7). Учитывая это, находим для по-

тока фотонов

$$j \sim \frac{N_B d^{1/2}}{\tau k_0^{1/2}}.$$

Такая зависимость потока фотонов от параметров задачи имеет место для любой геометрии системы.

Вычислим теперь поток фотонов через рассматриваемую точку поверхности. Для этого переместимся в некоторую точку поверхности и, выбрав ее за начало координат, подсчитаем проходящий через нее поток фотонов. Согласно формуле (5.9) он равен

$$j = \int \frac{N_B(r) dr}{\tau} \frac{P(r) \cos \theta}{4\pi r^2}.$$

В рассмотренных далее примерах в силу симметрии задачи поток фотонов направлен перпендикулярно поверхности, так что далее  $\theta$  является углом между нормалью к поверхности и направлением, соединяющим выбранную точку поверхности и точку объема, откуда приходит фотон.

В рассматриваемом предельном случае основной вклад в поток фотонов вносит область объема, находящаяся от поверхности на расстоянии  $\sim d \gg 1/k_0$ . В связи с этим, воспользовавшись асимптотическим выражением для вероятности  $P(r)$ , получаем для потока фотонов

$$j = \frac{N_B}{4\pi^{3/2} k_0^{1/2} \tau} \int \frac{dr \cos \theta}{r^{5/2}}.$$

Выбрав в качестве оси  $x$  перпендикулярное к поверхности направление, а в качестве осей  $y$  и  $z$  — два других направления, приведем это выражение к виду

$$j = j_0 \frac{1}{4\pi^{3/2} d^{1/2}} \int \frac{x dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{7/4}},$$

где

$$j_0 = \frac{N_B d^{1/2}}{\tau k_0^{1/2}}, \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}.$$

Перейдем к рассмотрению конкретных случаев. Если газ заполняет объем между бесконечными стенками, расположенными на расстоянии  $d$ , то вводя новые переменные  $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ ,  $\varphi = \arctg(y/z)$ , получим

$$j = \frac{j_0}{4\pi^{3/2} d^{1/2}} \int_0^d x dx \int_0^\infty \frac{2\pi\rho d\rho}{(\rho^2 + x^2)^{7/4}} = \frac{j_0}{3\pi^{1/2} d^{1/2}} \int_0^d \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2j_0}{3\sqrt{\pi}} \approx 0,376 j_0.$$

В другом конкретном случае, когда возбужденный газ заполняет объем внутри цилиндрической трубки диаметра  $d$ , введем новые переменные  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \arctg(y/x)$ . Получим после

интегрирования по  $dz$ :

$$j = \frac{j_0}{4\pi^{3/2}d^{1/2}} \int \rho \cos \varphi \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \cdot \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(5/4)}{\rho^{5/2}\Gamma(7/4)} =$$

$$= \frac{j_0}{4\pi d^{1/2}} \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(7/4)} \int_0^\pi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{d \cos \varphi} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} = \frac{j_0 \Gamma^2(5/4)}{2\sqrt{\pi}\Gamma^2(7/4)} \approx 0,274j_0.$$

В случае, когда возбужденный газ занимает объем внутри сферы диаметра  $d$ , введем сферические переменные  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , так что  $0 \leq r \leq d \cos \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Получим

$$j = \frac{j_0}{4\pi^{3/2}d^{1/2}} \int_0^1 2\pi d \cos \theta \int_0^{d \cos \theta} r^2 \, dr \frac{r \cos \theta}{r^{7/2}} =$$

$$= \frac{j_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \cos^{3/2} \theta \, d \cos \theta = \frac{2j_0}{5\sqrt{\pi}} \approx 0,226j_0.$$

Используя полученные результаты, мы можем представить следующую приближенную формулу для среднего потока фотонов через поверхность:

$$j = \frac{0,54N_B}{\tau k_0^{1/2}} \sqrt{\frac{V}{S}},$$

где  $V$ —объем, занимаемый возбужденным газом,  $S$ —площадь ограничивающей его поверхности. Численный коэффициент 0,54 задан по результатам рассмотренных примеров. В трех ранее рассмотренных примерах значения, полученные на основе этой приближенной формулы, отличаются от результатов точного расчета не более, чем на 3%. Именно, в случае излучения плоского слоя эта приближенная формула дает для потока фотонов величину  $0,382j_0$ , в случае излучения газа, находящегося внутри цилиндрической трубки, поток фотонов согласно приближенной формуле равен  $0,270j_0$ , а в случае, когда излучающий газ находится внутри шара,  $0,220j_0$ .

Сравним найденный поток фотонов с потоком фотонов в случае, когда излучение свободно уходит за пределы системы. Если все излученные фотоны не поглощаются внутри газовой системы, то средний поток фотонов, уходящих за пределы системы, равен

$$j = \frac{N_B}{\tau} \frac{V}{S}.$$

В трех рассмотренных случаях в силу симметрии задачи поток фотонов не зависит от точки поверхности и определяется данным выражением.

Как видно, при лоренцевской форме линии в пределе, когда длина пробега фотона в центре линии велика по сравнению с

размерами системы, поток испускаемых фотонов в  $1,85\sqrt{k_0V/S}$  раз больше, чем при обратном соотношении между этими величинами.

**Задача 5.10.** Определить поток резонансных фотонов, выходящих за пределы газового объема на данной частоте при условии, что длина пробега резонансного фотона рассматриваемой частоты в газе много меньше размеров газовой системы и радиуса кривизны поверхности. Считать, что плотности возбужденных и невозбужденных атомов постоянны на расстоянии от поверхности порядка длины пробега резонансного фотона.

Воспользуемся формулой (5.8) для потока излучения с учетом упрощенных условий задачи. Согласно этим условиям поверхность границы раздела можно считать плоской, а плотность возбужденных частиц  $N_b$  и коэффициент поглощения  $k_\omega$  постоянными по объему. Тогда в силу симметрии задачи поток фотонов направлен перпендикулярно поверхности раздела. Вводя сферическую систему координат с началом координат в выбранной точке границы, на основании формулы (5.8) получим для потока фотонов:

$$j_\omega = \frac{N_b a_\omega}{\tau} \int_0^\infty \int_0^1 \frac{2\pi r^2 dr d \cos \theta}{4\pi r^2} e^{-k_\omega r} = \frac{N_b a_\omega}{4\tau k_\omega}. \quad (5.10)$$

Эта формула представляет поток фотонов из объема, внутри которого существует равновесие между состояниями атомных частиц и излучением. Действительно, будем считать, что такое равновесие имеет место и что поток излучения, распространяющийся внутри газового объема на данной частоте, равен  $i_\omega$ . Тогда число поглощенных фотонов данной частоты в единице объема в единицу времени равно  $i_\omega k_\omega$ , а число испускаемых фотонов на этой частоте в единице объема в единицу времени равно  $N_b a_\omega / \tau$ . Приравнявая эти величины, находим

$$i_\omega = \frac{N_b a_\omega}{\tau k_\omega}.$$

Поток фотонов внутри системы  $i_\omega$  распределен хаотически, так что поток фотонов в данной точке, направленный в элемент телесного угла  $d\omega$ , равен  $\frac{i_\omega d\omega}{4\pi}$ . Переходя к нахождению потока через границу раздела, мы должны попадающие на нее хаотически направленные потоки спроектировать на направление, перпендикулярное границе раздела. В результате для потока фотонов, пересекающего границу раздела, получим:

$$j_\omega = \int_{\cos \theta > 0} \frac{i_\omega d\omega}{4\pi} = \frac{i_\omega}{4} = \frac{N_b a_\omega}{4\tau k_\omega}.$$

Таким образом, наличие равновесия между процессами излучения и поглощения фотонов на данной частоте вблизи границы раздела приводит к формуле (5.10) для потока излучения.

**Задача 5.11.** Вычислить поток излучения на данной частоте, выходящий за пределы плоского слоя газа толщины  $l$  с бесконечными поперечными размерами. Считать, что параметры в слое зависят только от расстояния до поверхности.

Обозначив через  $x$  расстояние до рассматриваемой поверхности, из которой вычисляется поток излучения, введем оптическую толщину данного слоя согласно формуле

$$u = \int_0^x k_\omega dx.$$

При этом оптическая толщина всего слоя газа равна  $u_\omega = \int_0^l k_\omega dx$ . Далее,

$du = k_\omega dx = k_\omega dr \cos \theta$  и элемент объема  $dr = 2\pi r^2 dr d \cos \theta$  (рис. 5.2). Используя соотношение (5.6) между

Рис. 5.2. Геометрия излучения плоского слоя.

коэффициентами поглощения  $k_\omega$  и функцией распределения  $a_\omega$  испускаемых фотонов по частотам, представим выражение для потока фотонов (5.8) в виде

$$\begin{aligned} j_\omega &= \int d \cos \theta du \frac{N_B a_\omega}{2\tau k_\omega} \exp\left(-\frac{u}{\cos \theta}\right) = \\ &= \frac{\omega^2}{2\pi^2 c^3} \int_0^1 d \cos \theta \int_0^{u_\omega} du \exp\left(-\frac{u}{\cos \theta}\right) \left(\frac{g_B N_0}{g_0 N_B} - 1\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Если внутри газа поддерживается термодинамическое равновесие и температура не зависит от толщины слоя, то согласно распределению Больцмана  $\frac{g_B N_0}{g_0 N_B} = e^{\hbar\omega/T}$  и формула (5.11) принимает вид

$$j_\omega = 2j_\omega^{(0)} \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \left[1 - \exp\left(-\frac{u_\omega}{\cos \theta}\right)\right].$$

Здесь  $j_\omega^{(0)} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} (e^{\hbar\omega/T} - 1)^{-1}$  — поток фотонов на данной частоте, выходящий за пределы абсолютно черного тела.



Вводя новую переменную  $t = u_\omega / \cos \theta$ , перепишем полученную формулу в виде

$$\frac{j_\omega}{j_\omega^{(0)}} = 2 \int_{u_\omega}^{\infty} (1 - e^{-t}) \frac{u_\omega^2 dt}{t^3} = 1 - 2u_\omega^2 \int_{u_\omega}^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^3}.$$

Вычисляя интеграл по частям, находим

$$j_\omega = j_\omega^{(0)} [1 - e^{-u_\omega} + u_\omega e^{-u_\omega} + u_\omega^2 Ei(-u_\omega)].$$

В предельных случаях эта формула дает

$$\frac{j_\omega}{j_\omega^{(0)}} = \begin{cases} 2u_\omega + u_\omega^2 \ln u_\omega - (1 - C) u_\omega^2, & u_\omega \ll 1, \\ 1 - \frac{2e^{-u_\omega}}{u_\omega}, & u_\omega \gg 1, \end{cases}$$

где  $C = 0,577$  — постоянная Эйлера.

Таким образом, оптическая толщина слоя является тем параметром, которым удобно характеризовать выход излучения за пределы системы. Если длина пробега фотона  $1/k_\omega$  мала по сравнению с размерами системы, что отвечает большой оптической толщине слоя для данной частоты, то в слое устанавливается термодинамическое равновесие между излучением и газом. В этом случае поток уходящих фотонов на данной частоте совпадает с потоком черного излучения. В другом предельном случае малой оптической толщины слоя поток испускаемых с поверхности фотонов пропорционален оптической толщине слоя и мал по сравнению с равновесным потоком  $j_\omega^{(0)}$ .

**Задача 5.12.** Найти связь между сечением поглощения света частицей пыли или аэрозоля с площадью поверхности  $S$  и степенью черноты на данной частоте  $\alpha_\omega$ . Размер частицы значительно превышает длину волны излучения.

Поскольку частица достаточно велика по сравнению с длиной волны излучения, то она испускает свет с поверхности как макроскопическое тело. Поэтому испускаемая ею мощность излучения пропорциональна поверхности частицы. Мощность излучения частицы на частоте  $\omega$  составляет

$$p_\omega = \alpha_\omega j_\omega^{(0)} S,$$

где  $j_\omega^{(0)}$  — поток равновесного излучения на данной частоте при заданной температуре частицы,  $\alpha_\omega$  — степень черноты поверхности частицы.

Сравним излучение плоского слоя, полученное на основании данной формулы и формул предыдущей задачи. Это и позволит установить искомую связь. Пусть мы имеем оптически тонкий слой с толщиной  $\Delta x$  и плотностью частиц  $N$ . На единицу его площади приходится  $N \Delta x$  частиц, так что поток излучения на

данной частоте равен

$$J_{\omega} = \rho_{\omega} N \Delta x = j_{\omega}^{(0)} \alpha_{\omega} S N \Delta x.$$

С другой стороны, согласно результату предыдущей задачи поток излучения выражается через оптическую толщину слоя, определяемую соотношением

$$u_{\omega} = k_{\omega} \Delta x = N \sigma_{\omega} \Delta x,$$

где  $\sigma_{\omega}$  — сечение поглощения частицей света на данной частоте. При этом для потока излучения из оптически тонкого слоя на основе результата предыдущей задачи имеем

$$J_{\omega} = 2 \cdot 2u_{\omega} j_{\omega}^{(0)} = 4\sigma_{\omega} N \Delta x j_{\omega}^{(0)}.$$

Здесь множитель 2 учитывает, что излучение уходит через обе границы слоя.

Сравнивая выражение для потока испускаемого слоя излучения, находим для сечения поглощения частицы:

$$\sigma_{\omega} = 1/4 \alpha_{\omega} S.$$

Для абсолютно черной частицы согласно этому результату средняя площадь проекции частицы на плоскость равна четвертой части площади поверхности. Для сферической частицы этот результат естествен. Площадь поверхности частицы равна  $4\pi r_0^2$ , где  $r_0$  — ее радиус, площадь проекции частицы на любую плоскость равна  $\pi r_0^2$ . Однако для частицы произвольной формы этот результат неочевиден.

**Задача 5.13.** Определить поток резонансного излучения, выходящего за пределы плоского однородного слоя газа при доплеровском механизме уширения спектральной линии. Длина пробега фотона в центре линии значительно меньше толщины слоя  $l$ .

На основе формулы (5.11) с учетом однородности слоя имеем для потока фотонов за пределы слоя:

$$j = \int j_{\omega} d\omega = j_{\omega}^{(0)} \int d\omega \int 2 \cos \theta d \cos \theta \left[ 1 - \exp \left( - \frac{k_{\omega} l}{\cos \theta} \right) \right],$$

где

$$j_{\omega}^{(0)} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \left( \frac{g_B N_0}{g_0 N_B} - 1 \right)^{-1}.$$

— поток фотонов на данной частоте при условии, когда оно заперто, т. е. равновесный поток за пределы абсолютно черного тела. Поток фотонов на данной частоте  $j_{\omega}$  равен равновесному потоку фотонов  $j_{\omega}^{(0)}$  при частотах, на которых резонансное излучение заперто, т. е. оптическая толщина слоя  $k_{\omega} l$  велика. Для частот с малой оптической толщиной слоя поток фотонов на данной частоте  $j_{\omega} \ll j_{\omega}^{(0)}$ . При доплеровском уширении спектральной

линии область частот, где происходит переход от одного предельного случая к другому, относительно узка. Для решения поставленной задачи мы должны аккуратно учесть переходную область.

Представим коэффициент поглощения для доплеровского механизма уширения обычным образом (см. задачу 5.7 и формулу (П4.1)):

$$k_{\omega} = k_0 e^{-s^2}, \quad s = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \sqrt{\frac{Mc^2}{2T}},$$

где  $k_0$  — коэффициент поглощения в центре линии.

Обозначив  $v_D = \omega_0 \sqrt{2T/Mc^2}$ , представим поток испускаемых фотонов в виде

$$j = 2j_{\omega}^{(0)} v_D \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \left[ 1 - \exp \left( -\frac{k_0 l}{\cos \theta} e^{-s^2} \right) \right].$$

Изменив порядок интегрирования, сосредоточим внимание на вычислении интеграла:

$$J = \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \int_{-\infty}^{+\infty} ds \left[ 1 - \exp \left( -\frac{k_0 l}{\cos \theta} e^{-s^2} \right) \right].$$

Переходная область сосредоточена в окрестности точки  $s_0 = \sqrt{\ln(k_0 l / \cos \theta)}$ . При  $s < s_0$  экспонентой можно пренебречь по сравнению с единицей, при  $s > s_0$  выражение в квадратных скобках много меньше единицы. Поскольку  $k_0 l \gg 1$ , то  $s \gg 1$ . Учитывая это, в переходной области имеем  $s^2 = s_0^2 + 2(s - s_0)s_0$ . Введем значение  $s'$  так, что, с одной стороны,  $s_0 - s' \ll s_0$ , а с другой стороны,  $(k_0 l / \cos \theta) e^{-s'^2} \gg 1$ .

Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \left[ 1 - \exp \left( e^{s_0^2 - s^2} \right) \right] = 2s' + 2 \int_{s'}^{\infty} ds \{ 1 - \exp [\exp (-2(s - s_0)s_0)] \}.$$

Вводя новую переменную

$$x = \frac{k_0 l}{\cos \theta} e^{-s^2} = e^{s_0^2 - s^2} = \exp [-2s_0(s - s_0)],$$

получим  $\left( ds = -\frac{dx}{2s_0 x} \right)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \left[ 1 - \exp \left( e^{s_0^2 - s^2} \right) \right] &= 2s' + \frac{1}{s_0} \int_0^{\exp(s_0^2 - s'^2)} \frac{dx}{x} (1 - e^{-x}) = \\ &= 2s' + \frac{C}{s_0} + 2(s_0 - s') \approx 2\bar{s}, \end{aligned}$$

где  $\tilde{s} = \sqrt{\ln \frac{k_0 l}{\cos \theta} + C}$ ,  $C = 0,577$  — постоянная Эйлера. Отсюда находим

$$J = \int_0^1 2 \cos \theta d \cos \theta \sqrt{\ln(k_0 l) + C - \ln \cos \theta} = \sqrt{\ln(k_0 l) + C + 0,5}.$$

Этот интеграл вычислен с учетом соотношения  $\ln k_0 l \gg 1$ .

Таким образом, для потока фотонов за пределы плоского слоя окончательно получаем

$$j = 2j_{\omega}^{(0)} v_D \sqrt{\ln(k_0 l) + C + 0,5}.$$

Как видно, ширина линии излучения, уходящего за пределы плоского слоя, равна  $\Delta\omega \sim v_D \sqrt{\ln(k_0 l)}$ , что находится в полном соответствии с предыдущей задачей.

Покажем, что в случае оптически тонкого слоя полный поток фотонов за пределы плоского слоя равен

$$j = N_b l / 2\tau.$$

Введем объем  $V$  плоского слоя ограниченных размеров и поверхность  $2S$ , которая ограничивает его с двух сторон. Пусть  $N_b$  — плотность атомов в возбужденном состоянии,  $\tau$  — излучательное время жизни. Тогда  $N_b V / \tau$  — число излучательных переходов в единицу времени в выделенном объеме, откуда  $j = N_b l / 2\tau$  ( $V = Sl$ ). Введем эффективное излучательное время для возбужденного состояния атома  $\tau_{\text{эф}}$  с учетом переизлучения так, что полный поток фотонов равен

$$j = N_b l / 2\tau_{\text{эф}}.$$

Тогда, преобразуя полученное ранее выражение для полного потока фотонов с учетом формулы (5.10), а также принимая во внимание соотношение  $k_{\omega} / a_{\omega} = \sqrt{\pi} v_D k_0$  для доплеровского уширения, находим в данном случае для эффективного излучательного времени жизни возбужденного состояния:

$$\tau_{\text{эф}} = k_0 l \tau \left( \frac{\ln(k_0 l) + C + 0,5}{\pi} \right)^{-1/2}.$$

Подобным образом можно найти эффективное время жизни для другой конфигурации пространства, занятого возбужденным газом. В частности, в случае, когда возбужденный газ находится в длинном цилиндре радиуса  $r_0$ , выражение для потока фотонов в полном соответствии с ранее полученной формулой имеет вид

$$j = 2j_{\omega}^{(0)} v_D \sqrt{\ln(ak_0 r_0) + C + 0,5},$$

причем из общих соображений численный коэффициент  $1 < a < 2$ . Сравним это выражение с определением для  $\tau_{\text{эф}}$ , согласно

которому

$$j = N_B r_0 / 2\tau_{эф}.$$

Оно выбрано таким образом, чтобы в пределе  $k_0 r_0 \ll 1$  эффективное время жизни  $\tau_{эф} = \tau$ . Из сравнения полученных выражений находим

$$\tau_{эф} = \tau k_0 r_0 \sqrt{\frac{\pi}{\ln(k_0 r_0) + 1,4}}.$$

**Задача 5.14.** Для лоренцевской и доплеровской форм спектральной линии излучения отдельного атома оценить ширину линии излучения, уходящего за пределы объема размера  $l$ . Считать, что длина пробега фотона в центре линии  $1/k_0$  мала по сравнению с размерами системы.

Из ранее полученных результатов следует, что для тех частот, на которых оптическая толщина газовой системы велика, поток излучения за пределы системы совпадает с потоком, испускаемым абсолютно черным телом. На частотах, для которых оптическая толщина мала, поток излучения мал по сравнению с потоком черного излучения. Отсюда следует, что ширина линии излучения с поверхности газового объема определяется частотами, для которых оптическая толщина слоя порядка единицы.

Для лоренцевской формы линии на крыле линии коэффициент поглощения равен (согласно (П4.2))

$$k_\omega = \frac{k_0 v^2}{\pi (\omega - \omega_0)^2},$$

где  $v$  — ширина линии излучения отдельного атома,  $k_0$  — коэффициент поглощения в центре линии. Отсюда оптическая толщина газового объема равна  $u_\omega \sim \frac{k_0 l v^2}{(\omega - \omega_0)^2}$  и из условия  $u_\omega \sim 1$  оценим ширину линии излучения с поверхности газа:

$$\Delta\omega \sim v \sqrt{k_0 l}.$$

В случае доплеровской формы линии согласно (П4.1)  $k_\omega = k_0 \exp[-(\omega - \omega_0)^2 / v_D^2]$ , где  $v_D$  — ширина линии излучения отдельного атома при доплеровском законе уширения. Из условия  $u_\omega \sim k_\omega l \sim 1$  имеем следующую оценку для ширины линии испускаемого излучения:

$$\Delta\omega \sim v_D \sqrt{\ln k_0 l}.$$

Как видно, в обоих случаях в силу условия  $k_0 l \gg 1$  ширина линии излучения, уходящего за пределы системы, превышает ширину линии излучения отдельного атома. Зависимость этой величины от оптической толщины системы для центра линии  $k_0 l$  существенно разная.

**Задача 5.15.** Вычислить поток излучения из полубесконечного плоского слоя газа, температура которого медленно меняется с глубиной слоя, а оптическая толщина слоя велика.

Вспользуемся формулой (5.11) для потока излучения, выходящего из плоского слоя:

$$j_{\omega} = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c^2} \int_0^1 d \cos \theta \int_0^{\infty} du \exp\left(-\frac{u}{\cos \theta}\right) F(u),$$

где через  $F(u)$  обозначена функция  $\left(\frac{g_{\text{н}} N_0}{g_0 N_{\text{в}}} - 1\right)^{-1}$ . Если бы температура газа не изменялась с высотой, то функция  $F(u)$  не зависела бы от  $u$ , а слой газа излучал бы, как абсолютно черное тело, с температурой, совпадающей с температурой газа.

В случае, когда температура слоя медленно меняется с высотой, за пределы газа будут уходить фотоны из слоев, оптическая толщина которых порядка единицы. Поэтому в газе с медленно меняющейся температурой поток излучения на рассматриваемой частоте будет соответствовать потоку излучения абсолютно черного тела, температура которого совпадает с температурой тех слоев газа, оптическая плотность которых на данной частоте порядка единицы.

Получим этот результат более точно, разложив функцию  $F(u)$  в ряд вблизи некоторой точки  $u_1$ :

$$F(u) = F(u_1) + (u - u_1) F'(u_1) + \frac{(u - u_1)^2}{2} F''(u_1).$$

Подставив это разложение в выражение для потока излучения, получим

$$j_{\omega} = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c^2} \left[ \frac{1}{2} F(u_1) + \left(\frac{1}{3} - \frac{u_1}{2}\right) F'(u_1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{u_1}{3} + \frac{u_1^2}{4}\right) F''(u_1) \right].$$

Выберем  $u_1 = 2/3$  так, чтобы второе слагаемое обратилось в нуль. Это дает:

$$j_{\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \left[ F\left(u = \frac{2}{3}\right) + \frac{5}{8} F''\left(u = \frac{2}{3}\right) \right].$$

Пренебрегая последним слагаемым, находим, что поток излучения в рассматриваемом случае совпадает с потоком излучения с поверхности абсолютно черного тела; температура этого черного тела совпадает с температурой того слоя газа, оптическая толщина которого равна  $2/3$ .

Определим малый параметр, который положен в основу проведенного разложения. Он равен

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{du} = \frac{\frac{dF}{dT} \frac{dT}{dx}}{\frac{du}{dx} F} = \frac{d \ln T}{k_{\omega} dx} \frac{e^{\hbar\omega/T}}{(e^{\hbar\omega/T} - 1)} \sim \frac{d \ln T}{k_{\omega} dx} \ll 1.$$

Таким образом, полученный результат для потока уходящих фотонов справедлив, если температура газа мало меняется на расстояниях, сравнимых с длиной пробега фотонов в газе.

**Задача 5.16.** Определить лучистую теплопроводность в газе, которая связана с переносом энергии фотонами. Параметры рассматриваемого слоя газа не зависят от поперечной координаты, а температура слабо меняется с высотой.

Подсчитаем поток фотонов, проходящих на данной высоте в ту и в другую сторону. Если положительное направление выбрано вверх и на рассматриваемой высоте выбрать начало координат, то поток фотонов вверх согласно ранее полученным формулам равен  $j_{\omega}^{+} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} F(u = 2/3)$ , а поток фотонов вниз равен  $j_{\omega}^{-} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} F(u = 2/3)$ . Разность этих потоков, обусловленная изменением температуры по высоте, равна

$$|j_{\omega}^{+} - j_{\omega}^{-}| = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{4}{3} \left| \frac{dF}{du} \right| = \frac{\omega^2}{3\pi^2 c^2} \left| \frac{dF}{dT} \right| \left| \frac{dT}{dx} \right| \left| \frac{du}{dx} \right| = \frac{\omega^2}{3\pi^2 c^2} \hbar \omega \left| \frac{dT}{dx} \right| [k_{\omega} T^2 (e^{\hbar\omega/T} - 1)^2]^{-1}.$$

При этом мы использовали выражение для  $F = (e^{\hbar\omega/T} - 1)^{-1}$ .

Тепловой поток, который связан с переходом фотонов, сосредоточенных в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , равен  $\hbar\omega |j_{\omega}^{+} - j_{\omega}^{-}| d\omega$ . Сравнивая выражение для теплового потока  $q = \int \hbar\omega |j_{\omega}^{+} - j_{\omega}^{-}| d\omega$  с определением коэффициента теплопроводности  $\kappa \left( q = -\kappa \frac{dT}{dx} \right)$ , для коэффициента лучистой теплопроводности получим следующее выражение:

$$\kappa = \frac{1}{3\pi^2 c^2} \int \frac{\omega^2 d\omega}{k_{\omega}} \frac{(\hbar\omega/T)^2}{(e^{\hbar\omega/T} - 1)^2}.$$

В этой формуле, интегрирование следует проводить только по частотам тех фотонов, длина пробега которых мала по сравнению с характерными размерами системы.

**Задача 5.17.** Выяснить, при каких условиях возникает самообращение спектральной линии излучения.

Самообращение спектральной линии сводится к тому, что поток излучения, уходящего за пределы системы, для частоты центра линий оказывается ниже, чем для соседних частот. При этом интенсивность излучения отдельного атома падает по мере удаления от центра линии (рис. 5.3).

Самообращение спектральных линий возникает в том случае, если температура газа внутри газовой системы выше, чем вблизи ее границы. Поскольку излучение в центре линии создается объемом

газа, находящимся вблизи границы раздела, то поток излучения в центре линии ниже, чем в той части крыла спектральной линии, для которой оптическая толщина слоя порядка единицы и которой соответствует более высокая температура. В результате на кривой

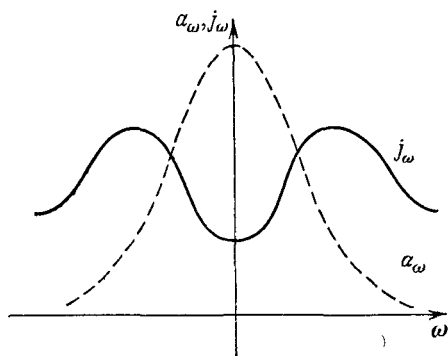


Рис. 5.3. Форма спектральной линии для элементарного акта излучения  $a_\omega$  и для суммарного потока  $j_\omega$ , выходящего за пределы системы при самообращении спектральной линии.

зависимости потока излучения от частоты возникает провал в центре линии.

Оценим, при каких условиях самообращение спектральной линии излучения оказывается весьма заметным, так что поток излучения в центре линии значительно меньше, чем при частотах, где он достигает максимума. Согласно формуле (5.11) это имеет место в случае, если подынтегральное выражение в этой формуле заметно меняется на расстояниях порядка длины пробега фотона в центре линии. Считая, что распределение атомов по состояниям определяется формулой Больцмана и что возбужденных атомов много меньше, чем невозбужденных, представим данный критерий в виде

$$\frac{1}{k_0} \frac{\hbar \omega}{T^2} \left| \frac{dT}{dx} \right| \gg 1.$$

**Задача 5.18.** Проследить за самообращением линии излучения со стороны плоского слоя толщиной  $l$  с бесконечными поперечными размерами. Температура слоя вблизи его границы равна  $T(x) = T_0 + \alpha x$ , где  $x$  — расстояние до поверхности слоя и  $\alpha l \ll 1$ . Форма линии излучения отдельного атома лоренцевская, коэффициент поглощения не меняется при удалении от поверхности слоя. При заданных условиях определить отношение потока фотонов на частоте, при которой величина потока фотонов максимальна, к потоку фотонов в центре линии.

Воспользуемся формулой (5.11) для потока излучения со стороны плоского слоя:

$$j_\omega = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c^2} \int_0^1 d \cos \theta \int_0^{u_\omega} du \exp\left(-\frac{u}{\cos \theta}\right) F,$$



где  $F = \left( \frac{N_0 g_B}{N_B g_0} - 1 \right)^{-1} = (e^{\hbar\omega/T} - 1)^{-1}$ . Функция  $F(T)$  слабо изменяется внутри слоя. Разложив ее в ряд, получим:  $F = F(T_0) + \frac{dF}{dT} \alpha x$ , где  $x$  — высота слоя и второй член разложения везде значительно меньше первого. Далее, оптическая толщина слоя высотой  $x$  выражается через оптическую толщину всего слоя на данной частоте  $u_\omega$  посредством соотношения  $u = u_\omega x/l$ , ибо коэффициент поглощения не зависит от положения слоя. Кроме того, при лоренцевской форме линии согласно формуле (П4.2)  $k_\omega = \frac{k_0}{1+s^2}$ , где  $s = \frac{\omega - \omega_0}{\nu}$ ,  $\nu$  — ширина линии,  $\omega_0$  — частота в центре линии,  $k_0$  — коэффициент поглощения в центре линии. На основе этих соотношений получим

$$j_\omega = 2j_\omega^{(0)} \int_0^1 d \cos \theta \int_0^{u_\omega} du \exp \left( -\frac{u}{\cos \theta} \right) \left[ 1 + \frac{d \ln F}{dT} \Big|_{T_0} \frac{\alpha u (1+s^2)}{k_0} \right],$$

здесь  $j_\omega^{(0)}$  — поток излучения с поверхности абсолютно черного тела с температурой  $T_0$ .

Вычислим полученный интеграл для частот, которым отвечает большая оптическая плотность слоя,  $u_\omega \gg 1$ . При этом для первого слагаемого наряду с основным членом определим поправку, а для второго слагаемого в квадратных скобках, которое много меньше единицы, ограничимся основным членом. Получим

$$j_\omega = j_\omega^{(0)} \left( 1 - \frac{e^{-u_\omega}}{u_\omega} + \frac{a}{u_\omega} \right),$$

где

$$u_\omega = \frac{k_0 l}{1+s^2}, \quad a = \frac{2}{3} \alpha l \frac{d \ln F}{dT} \Big|_{T_0}, \quad \text{причем } a \ll 1.$$

Проанализируем полученный результат, который справедлив для  $u_\omega \gg 1$ . По мере удаления от центра спектральной линии  $u_\omega$  уменьшается. Если  $u_0 \gg \ln 1/a$  ( $u_0$  — оптическая плотность для центра линии), то при удалении от центра линии вблизи него интенсивность излучения возрастает, т. е. в этом случае имеет место самообращение спектральной линии излучения. Максимальная интенсивность излучения достигается при частоте, на которой оптическая плотность слоя удовлетворяет соотношению

$$(u_\omega + 1) e^{-u_\omega} = a.$$

Поскольку  $a \ll 1$ , то для оптической толщины слоя, являющегося решением этого уравнения, имеем  $u_\omega \gg 1$ . Поэтому справедливы формулы, использованные при получении данного уравнения, и на основе этих формул мы можем проследить за потоком излучения при тех частотах, где поток максимален. Максимальное

значение потока фотонов равно

$$j_{\omega} = j_{\omega}^{(0)} \left( 1 + \frac{a}{1 + u_{\omega}} \right),$$

и поскольку  $a \ll 1$ ,  $u_{\omega} \gg 1$ , то при рассматриваемых условиях оно мало отличается от потока в центре линии.

**Задача 5.19.** Вывести кинетическое уравнение для плотности резонансно-возбужденных атомных частиц с учетом процессов переизлучения фотонов в газе. Считать, что излучение не влияет на процессы перехода между основным и резонансно возбужденным состоянием в результате столкновений.

Искомое уравнение имеет вид уравнения баланса для плотности резонансно возбужденных атомных частиц с учетом столкновений и излучения. Если бы излучение отсутствовало, то уравнение баланса для плотности возбужденных атомных частиц имело бы следующий вид:

$$\frac{dN_B}{dt} = -\nu_{\text{гум}} N_B + \nu_{\text{возб}} N_0,$$

где  $\nu_{\text{гум}}$  — частота перехода из верхнего состояния в нижнее, а  $\nu_{\text{возб}}$  — частота перехода из нижнего состояния в верхнее в результате столкновений. В стационарном случае  $\nu_{\text{возб}} = \nu_{\text{гум}} N_B^E / N_0^E$ , где  $N_0^E, N_B^E$  — значения плотностей при наличии термодинамического равновесия в системе, которые описываются законом Больцмана.

Представим кинетическое уравнение для возбужденных частиц с учетом излучения. Оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial N_B(\mathbf{r})}{\partial t} = -\nu_{\text{гум}} N_B(\mathbf{r}) + \nu_{\text{возб}} N_0(\mathbf{r}) - \frac{N_B(\mathbf{r})}{\tau} + \frac{1}{\tau} \int N_B(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}'.$$

Первые два члена в правой части уравнения отвечают столкновению частиц и имеют тот же вид, что и ранее. Третий член описывает спонтанное высвечивание возбужденных частиц, так что  $\tau$  — время жизни относительно этого высвечивания. Последний член в правой части уравнения характеризует переизлучение, т. е. поглощение в данной точке пространства фотона, родившегося в другой точке. При этом функция Грина  $G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$  данного уравнения имеет следующий физический смысл. Величина  $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}'$  представляет собой вероятность того, что фотон, родившийся в точке  $\mathbf{r}'$ , поглотится в элементе объема  $\mathbf{r}$ . Она обладает следующими свойствами:  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ ,  $\int G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' = 1$ . Первое свойство было использовано при написании уравнения, второе свойство следует из определения функции Грина, причем интеграл берется по всему бесконечному пространству.

Найдем явный вид функции Грина данного уравнения. Для этого найдем вероятность того, что фотон, испускаемый в точке  $\mathbf{r}'$ ,

поглотится в элементе объема  $d\mathbf{r}$  вблизи точки  $\mathbf{r}$  (рис. 5.4). Представим элемент объема  $d\mathbf{r} = d\mathbf{s} dx$ , где  $x$  направлено по лучу, а элемент площади  $d\mathbf{s}$  — перпендикулярно ему. Тогда для искомой вероятности получим

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int a_{\omega} d\omega \frac{d\mathbf{s}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} k_{\omega} dx \exp\left(-\int k_{\omega} dx\right).$$

Здесь первый множитель представляет собой вероятность того, что фотон будет излучен в заданном частотном интервале, второй — вероятность того, что будучи излученным изотропно, он пройдет через выделенный элемент объема  $d\mathbf{r}$ . Третий множитель характеризует вероятность поглощения фотона на длине  $dx$ , а четвертый — вероятность того, что фотон дойдет до точки  $\mathbf{r}$ , не поглотившись по дороге. Интеграл в экспоненте берется по лучу между рассматриваемыми точками.

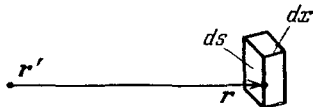


Рис. 5.4. Геометрия распространения фотона.

Таким образом, функция Грина рассматриваемого уравнения равна

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \int \frac{a_{\omega} k_{\omega} d\omega}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \exp\left(-\int k_{\omega} dx\right), \quad (5.12)$$

где интегрирование ведется по частотам фотонов. В соответствии с этим кинетическое уравнение для возбужденных атомных частиц принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dN_B(\mathbf{r})}{dt} = & -\nu_{\text{гум}} N_B(\mathbf{r}) + \nu_{\text{возб}} N_0(\mathbf{r}) - \frac{N_B(\mathbf{r})}{\tau} + \\ & + \frac{1}{\tau} \int \frac{N_B(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' a_{\omega} k_{\omega} d\omega}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \exp\left(-\int k_{\omega} dx\right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Это уравнение носит название уравнения Бибермана — Холстейна.

**Задача 5.20.** Определить функцию Грина для переноса излучения в однородной газовой среде при лоренцевской и доплеровской формах спектральной линии излучения. Считать, что перенос происходит на расстояния, значительно превышающие длину свободного пробега фотона в центре линии.

В случае лоренцевской формы линии введем переменную  $s = \frac{2(\omega - \omega_0)}{\nu}$ , где  $\nu$  — ширина спектральной линии (см. формулу (П4.2)). Получим  $a_{\omega} d\omega = \frac{ds}{\pi(1+s^2)}$ ,  $k_{\omega} = \frac{k_0}{1+s^2}$ , где  $k_0$  — коэффициент поглощения в центре линии, т. е. на частоте  $\omega_0$ . Подставляя

это в выражение (5.12) для функции Грина, получим ( $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ )

$$G(R) = \int \frac{a_\omega k_\omega d\omega}{4\pi R^2} \exp(-k_\omega R) - \frac{k_0}{4\pi^2 R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{(1+s^2)^2} \exp\left(-\frac{k_0 R}{1+s^2}\right) = \\ = \frac{k_0}{4\pi R^2} \frac{d}{dk_0 R} \left[ \exp\left(-\frac{k_0 R}{2}\right) I_0\left(\frac{k_0 R}{2}\right) \right].$$

При вычислении этого интеграла была использована замена переменных  $s = \operatorname{tg}(\varphi/2)$  и определение функции Бесселя  $I_0(z) =$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-z \cos \varphi} d\varphi. \text{ В пределе } k_0 R \gg 1 \text{ полученная формула дает}$$

$$G(R) = (4\pi)^{-3/2} R^{-7/2} k_0^{-1/2}.$$

В случае доплеровской формы линии (П4.1) введем безразмерную переменную  $s = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \sqrt{\frac{Mc^2}{2T}}$ , так что  $a_\omega d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2} ds$  и  $k_\omega = k_0 e^{-s^2}$ . Подставляя это в выражение для функции Грина, получим

$$G(R) = \frac{k_0}{4\pi^{3/2} R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2s^2} ds e^{-t} = \int_0^\infty \frac{te^{-t} dt}{4\pi^{3/2} k_0 R^4 \sqrt{\ln(k_0 R/t)}},$$

здесь  $t = k_0 R e^{-s^2}$ . В пределе  $k_0 R \gg 1$ , заменяя верхний предел в интеграле бесконечностью и учитывая, что  $\ln k_0 R \gg 1$ , получим

$$G(R) = (4\pi^{3/2} k_0 R^4 \sqrt{\ln(k_0 R/t_0)})^{-1},$$

где  $t_0$  является решением уравнения  $\int_0^\infty te^{-t} dt \ln(t/t_0) = 0$ . Решая это уравнение, находим  $\ln t_0 = 1 - C - 0,423$ , где  $C$  — постоянная Эйлера. На основе этого получим окончательно

$$G(R) = [4\pi^{3/2} k_0 R^4 \sqrt{(\ln k_0 R - 0,42)}]^{-1}.$$

**Задача 5.21.** Выяснить, при каких условиях излучение не нарушит термодинамического равновесия между основным и возбужденными состояниями атомных частиц. Считать, что плотность возбужденных частиц значительно меньше, чем плотность атомных частиц в основном состоянии.

Искомый критерий следует установить из анализа уравнения (5.13), в которое включены процессы перехода между рассматриваемыми состояниями в результате столкновений и под действием излучения. При поставленных условиях эти процессы не влияют на плотность атомных частиц в основном состоянии, где находятся практически все атомные частицы. Уравнение баланса для плот-

ности резонансно возбужденных частиц (5.13) удобно переписать в безразмерных переменных.

Введем безразмерную функцию  $y(\mathbf{r}) = N_{\text{в}}/N_{\text{в}}^{\text{Б}}$ , которая равна единице, если плотность возбужденных частиц та же, что и при отсутствии излучения ( $N_{\text{в}}^{\text{Б}}$  — плотность возбужденных частиц, отвечающая распределению Больцмана). Введем безразмерный параметр  $\beta = v_{\text{туш}} \tau$  и безразмерное время  $t' = t/\tau$ . Поскольку  $N_0 v_{\text{возб}} = N_{\text{в}}^{\text{Б}} v_{\text{туш}}$ , то уравнение (5.13) в новых переменных принимает следующий вид:

$$\frac{dy(\mathbf{r})}{dt'} = \int y(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \beta - (1 + \beta) y(\mathbf{r}). \quad (5.14)$$

Из полученного уравнения следует, что влияние излучения на свойства газа характеризуется параметром  $\beta$ . В частности, если  $\beta \gg 1$ , то  $y(\mathbf{r}) = 1$ , т. е. распределение такое же, как и при отсутствии излучения. В этом предельном случае процессы столкновения происходят быстро и излучение не успевает нарушить в системе равновесие, создаваемое в результате столкновения частиц.

Термодинамическое равновесие может не нарушаться и в случае, когда указанное соотношение не выполняется. Проследим за этим случаем. Введем  $W = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$  — вероятность того, что родившийся в газовой системе фотон поглотится внутри газовой системы. Введем среднее по объему значение безразмерной функции  $\bar{y} = \frac{1}{\Omega} \int y(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ , где  $\Omega$  — объем системы. Тогда приближенное решение стационарного уравнения (5.14) после интегрирования его по объему дает  $\bar{y} = \beta / (1 + \beta - W)$ . Как видно, если длина пробега фотона мала по сравнению с размерами системы ( $W \approx 1$ ), то в основной части объема газа термодинамическое равновесие нарушаться не будет. Действительно, в этом случае почти любой фотон поглощается внутри газа, т. е. излучение не уносит возбуждения за пределы системы.

**Задача 5.22.** Считая плотность возбужденных частиц и другие параметры излучающего газа постоянными внутри занимаемого им объема, определить плотность возбужденных частиц и поток выходящего за пределы системы излучения. Форма линии излучения лоренцевская, длина пробега фотона в центре линии мала по сравнению с размерами системы.

Воспользовавшись стационарным уравнением (5.14) и решая его с учетом того, что  $y(\mathbf{r}) = \text{const}$ , получим

$$y = \frac{\beta}{\beta + 1 - \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'},$$

причем интеграл в знаменателе берется по объему, занимаемому излучающим газом. Проанализируем полученное выражение.

Величина  $\int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$  представляет собой вероятность того, что возникший внутри излучающего газа фотон поглотится внутри объема, занимаемого этим газом. Рассмотрим сначала случай, когда среда оптически тонка, т. е. родившийся внутри объема фотон свободно выходит за его пределы, так что величина  $\int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \ll 1$ . Тогда  $y = \beta/(1 + \beta)$ . Как следует из этого решения и определения параметра  $\beta$ , если характерное время тушения возбужденного состояния  $1/\nu_{\text{гум}}$  много меньше времени излучения  $\tau$ , то  $y = 1$ . В этом случае излучение не нарушает равновесного распределения частиц по состояниям.

В случае, когда среда является оптически плотной, т. е. длина пробега фотона в центре линии много меньше размеров среды, введем новый безразмерный параметр. Обозначим  $\tau_{\text{эфф}} = \tau / \left[ 1 - \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right]$  — среднее время, за которое возбуждение в виде излучения уходит за пределы системы. Вводя

$$\beta_{\text{эфф}} = \nu_{\text{гум}} \tau_{\text{эфф}} = \frac{\beta}{1 - \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'},$$

представим решение стационарного уравнения (5.14) в виде  $y = \frac{\beta_{\text{эфф}}}{1 + \beta_{\text{эфф}}}$ . Как видно, при наличии переизлучения  $\beta_{\text{эфф}}$  является параметром, характеризующим влияние излучения на оптические свойства среды.

Подсчитаем интенсивность излучения, выходящего из объема, занимаемого газом. Число фотонов, покидающих этот объем в единицу времени, равно

$$N_{\text{в}} V / \tau_{\text{эфф}},$$

где  $V$  — объем системы. В пределе  $\beta_{\text{эфф}} \ll 1$  имеем  $y = \beta_{\text{эфф}}$ ,  $N_{\text{в}} = N_{\text{в}}^{\text{г}} \beta_{\text{эфф}}$ , и число фотонов, испускаемых объемом в единицу времени, равно

$$N_{\text{в}}^{\text{г}} \nu_{\text{гум}} \tau_{\text{эфф}} V / \tau_{\text{эфф}} = N_0 \nu_{\text{возб}} V.$$

При этом мы воспользовались соотношением между частотами возбуждения и тушения. Как видно, в рассматриваемом предельном случае разрушение возбужденных состояний определяется их излучением. Поэтому полное число выходящих из системы фотонов равно полному числу возбуждений, которые создаются в результате процессов столкновения.

В другом предельном случае,  $\beta_{\text{эфф}} \gg 1$ , имеем  $N_{\text{в}} = N_{\text{в}}^{\text{б}}$ . При лоренцевской форме спектральной линии согласно результатам задачи 5.9 полное число фотонов, выходящих за пределы системы, равно

$$jS = \frac{0,54 N_{\text{в}}^{\text{б}}}{\tau \sqrt{k_0}} \sqrt{VS}, \quad k_0 \frac{V}{S} \gg 1.$$

Здесь  $j$  — поток фотонов,  $V$  — объем, занимаемый излучающим газом,  $S$  — ограничивающая его площадь.

**Задача 5.23.** На плоский оптически толстый слой плазмы с бесконечными поперечными размерами падает пучок резонансных фотонов, поток которых равен  $j_0$  и направлен перпендикулярно поверхности плазмы. Определить плотность возбужденных атомов на границе раздела, если плотность электронов мала, так что каждый возбужденный атом разрушается в результате высвечивания фотона.

Внутри плазмы возникают два типа потока фотонов. Один из них — направленный, с плотностью потока  $j_+(x)$  ( $x$  — расстояние до границы раздела), — создается под действием внешнего источника. Другой — изотропный, с плотностью потока  $j_*(x)$  — возникает в результате переизлучения фотонов. Условие равновесия для оптически плотной плазмы, для которой влиянием второй границы раздела можно пренебречь, приводит к равенству потоков фотонов, падающих на границу раздела и уходящих с нее. Это дает

$$j_0 \equiv j_+ = \frac{1}{2} j_*(0).$$

Плотность возбужденных атомов на границе раздела  $N_B$  найдем из уравнения баланса для числа излученных фотонов из единицы объема в единицу времени, которое равно  $N_B/\tau$ , и числа поглощенных единицей объема в единицу времени фотонов, которое равно  $k(j_+ + j_*)$  ( $k$  — коэффициент поглощения). Это дает

$$N_B = 3kj_0\tau.$$

### § 3. Перенос инфракрасного излучения в слое молекулярного газа

Особенности переноса инфракрасного излучения в молекулярном газе состоят в том, что спектр излучения этого молекулярного газа содержит в себе большое число линий, каждая из которых соответствует определенному колебательно-вращательному или вращательному переходу. Если ширина отдельной линии значительно меньше расстояния между соседними линиями, то коэффициент поглощения молекулярного газа является сильно осциллирующей функцией в небольшой области частот. Далее мы будем рассматривать прохождение инфракрасного излучения через слой молекулярного газа или выход излучения из слоя газа. Введем величины, которыми удобно характеризовать эти процессы.

Назовем функцией поглощения величину

$$A(\omega_0, \Delta\omega) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} (1 - e^{-u\omega}) d\omega, \quad (5.15)$$

где  $u_{\omega}$  — оптическая толщина рассматриваемого слоя молекулярного газа,  $\Delta\omega$  — ширина выделенного интервала частот.

Согласно формуле (5.15) функция поглощения представляет собой среднюю вероятность того, что в выделенном интервале частот излучение поглотится в рассматриваемом слое газа. Если ширина выделенного интервала частот  $\Delta\omega$  велика по сравнению с разностью частот для соседних переходов, но на этом интервале частот  $\Delta\omega$  мало изменяется средняя интенсивность линии, то функция поглощения слабо зависит от величины выделяемого интервала частот. В этом случае функция поглощения является удобной характеристикой, описывающей прохождение излучения через слой газа. Величина

$$1 - A = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} e^{-u_{\omega}} d\omega \quad (5.16)$$

называется функцией пропускания слоя газа.

Полный поток излучения с поверхности плоского слоя молекулярного газа равен

$$j = \int j_{\omega} d\omega,$$

где  $j_{\omega}$  — поток излучения на данной частоте. Если температура слоя постоянна и излучение происходит в узком по сравнению с испускаемой частотой интервале частот, то согласно формуле (5.11) полный поток излучения за счет рассматриваемых переходов может быть представлен в виде

$$j = j_{\omega}^{(0)} \Delta\omega, \quad \Delta\omega = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^1 d \cos \theta \left( 1 - \exp \left( -\frac{u_{\omega}}{\cos \theta} \right) \right) \cos \theta. \quad (5.17)$$

Здесь  $j_{\omega}^{(0)}$  — поток черного излучения для средней частоты перехода при заданной температуре,  $\Delta\omega$  — эффективная ширина зоны, в которой слой газа излучает за счет рассматриваемого набора переходов. Если имеется несколько наборов излучательных переходов, причем создаваемые ими области частот переходов не перекрываются, то полный поток выходящего инфракрасного излучения складывается из потоков, создаваемых набором (полосой) переходов.

Коэффициент поглощения в молекулярном газе в инфракрасном спектре, величина которого определяется колебательно-вращательными или вращательными переходами, равен

$$k_{\omega} = \sum_i S_i a(\omega - \omega_i), \quad (5.18)$$

где  $\omega_i$  — частота, характеризующая положение центра линии для соответствующего колебательно-вращательного перехода. Величина



$S_i$  называется интенсивностью соответствующего перехода, и ее значение может быть выражено через параметры перехода на основе общих формул\*);  $a(\omega - \omega_i)$  — функция распределения испускаемых фотонов по частотам ( $\int a(\omega - \omega_i) d\omega = 1$ ).

Громоздкий вид коэффициента поглощения (5.18), а соответственно и выражений для функции поглощения (5.15) и потока излучения (5.17) делают сложным аналитическое определение этих характеристик. Поэтому особое внимание вызывают предельные случаи и модельные описания поглощения и излучения слоя, которые мы далее и рассмотрим.

**1. Модель одиночных линий.** Это приближение имеет место, если минимальная оптическая плотность в промежутке между двумя линиями  $u_{\min} \ll 1$ , хотя оптическая плотность в центре соответствующей линии  $u_{\max} \geq 1$ . Тогда область частот, в которой происходит поглощение проходящего излучения или излучение плоского слоя, состоит из «верхушек» отдельных линий, где  $u_{\omega} \geq 1$ . Этот интервал частот для отдельной линии составляет величину  $\Delta\omega$ , которая может быть найдена из соотношения  $u_{\max} \frac{a(\Delta\omega)}{a(0)} \sim 1$  ( $u_{\max}$  — оптическая толщина для центра линии). Соответственно функция поглощения в данной области частот по порядку величины составляет  $A \sim \Delta\omega/\delta$ , где  $\delta$  — среднее расстояние между уровнями.

**2. Регулярная модель (модель Эльзассера).** Эта модель предполагает, что соседние линии равноудалены друг от друга, а их интенсивности медленно изменяются с изменением номера перехода, так что формула (5.18) принимает вид

$$k_{\omega} = S(\omega) \sum_n a(\omega - \omega_0 \pm n\delta), \quad (5.19)$$

здесь  $\omega_0$  — центр полосы перехода,  $\delta$  — разность частот для соседних переходов.

Эта модель справедлива для линейных молекул.

**3. Случайная модель.** При статистическом подходе предполагается, что относительное положение соседних линий носит случайный характер, хотя среднее расстояние между соседними линиями  $\delta$  в рассматриваемом интервале частот задано. Кроме того, задается вероятностный закон распределения для интенсивности отдельной линии, находящейся в рассматриваемом интервале частот.

\* ) Согласно формуле (5.6)

$$S_i = \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2 \tau_i} N_0 \left( 1 - \exp \left( - \frac{\hbar \omega_i}{T} \right) \right),$$

где  $\omega_i$  — частота  $i$ -го перехода,  $\omega$  — частота излучательного перехода,  $N_0$  — плотность молекул на нижнем уровне перехода.

**Задача 5.24.** На основании случайной модели определить среднюю функцию поглощения в рассматриваемом интервале частот.

Пусть  $\delta$  — среднее расстояние между уровнями, а  $p(S) dS$  — вероятность того, что интенсивность отдельной линии рассматриваемого интервала частот заключена в промежутке от  $S$  до  $S + dS$ . Функция поглощения для интервала, содержащего  $N$  линий, согласно формулам (5.15), (5.18) равна

$$\bar{A} = 1 - \frac{1}{N\delta} \int_{\omega_0 - N\delta/2}^{\omega_0 + N\delta/2} \exp \left[ - \sum_{i=1}^N u_{\omega}^{(i)} \right] d\omega,$$

здесь  $\omega_0$  — центр рассматриваемого интервала частот,  $u_{\omega}^{(i)}$  — оптическая толщина слоя на данной частоте за счет  $i$ -го перехода.

На основании случайной модели имеем, что вероятность нахождения центра  $i$ -й линии в интервале частот от  $\omega_i$  до  $d\omega_i + \omega_i$  пропорциональна величине этого интервала  $d\omega_i$ . Поэтому вместо вышеприведенной формулы для среднего значения функции пропускания следует написать:

$$\bar{A} = 1 - \frac{\int \exp \left[ - \sum_{i=1}^N u_{\omega}^{(i)} \right] \prod_i d\omega_i}{\prod_i \int d\omega_i} = 1 - \frac{\prod_{i=1}^N \int_{\omega_0 - N\delta/2}^{\omega_0 + N\delta/2} d\omega_i e^{-u_{\omega}^{(i)}}}{\prod_{i=1}^N \int_{\omega_0 - N\delta/2}^{\omega_0 + N\delta/2} d\omega_i},$$

и  $\bar{A}$  представляет собой среднюю вероятность того, что фотон в рассматриваемом интервале частот поглотится данным молекулярным слоем. Поскольку все интервалы в правой части выражения одинаковы, то эту формулу можно написать в виде

$$\bar{A} = 1 - \left( \frac{1}{N\delta} \int_{\omega_0 - N\delta/2}^{\omega_0 + N\delta/2} e^{-u_{\omega}} d\omega \right)^N,$$

где  $u_{\omega}$  — оптическая толщина, создаваемая отдельной линией.

На краях рассматриваемого интервала частот, ширину которого мы выберем большой по сравнению с шириной отдельной линии, оптическая толщина слоя стремится к нулю, а сам интеграл — к единице. Поэтому удобно представить данное выражение в виде

$$\bar{A} = 1 - \left[ 1 - \frac{1}{N\delta} \int_{\omega_0 - N\delta/2}^{\omega_0 + N\delta/2} (1 - e^{-u_{\omega}}) d\omega \right]^N.$$

Устремляя число линий на данном интервале к бесконечности и замечая, что полученный интеграл не зависит от величины выбранного интервала частот, получаем

$$\bar{A} = 1 - \exp \left[ - \int (1 - e^{-u_{\omega}}) \frac{d\omega}{\delta} \right]. \quad (5.20)$$

Если учесть закон распределения интенсивностей для спектральной линии рассматриваемого диапазона, то полученная формула преобразуется к виду

$$\bar{A} = 1 - \exp \left[ - \int (1 - e^{-u_{\omega}(S_i)}) \frac{d\omega_i}{\delta} p(S_i) dS_i \right], \quad (5.21)$$

где  $u_{\omega}(S_i)$  — по-прежнему оптическая толщина слоя для  $i$ -го перехода при интенсивности линии, равной  $S_i$ .

**Задача 5.25.** Определить коэффициент поглощения в полосе, если средняя разность частот для соседних переходов мала по сравнению с шириной линии отдельного перехода.

В этом случае коэффициент поглощения слабо зависит от взаимного расположения соседних линий, так что при его вычислении воспользуемся случайной моделью. Выражение (5.18) для коэффициента поглощения усредним по положению отдельной линии. Выберем фиктивный интервал частот  $N\delta$ , в котором расположено  $N$  линий ( $\delta$  — среднее расстояние между соседними линиями). Вероятность нахождения центра  $i$ -й линии в интервале частот от  $\omega_i$  до  $\omega_i + d\omega_i$  пропорциональна  $d\omega_i$ , так что среднее значение коэффициента поглощения в рассматриваемом интервале равно

$$k_{\omega} = \frac{1}{N\delta} \sum_{i=1}^N \int S_i a(\omega - \omega_i) \frac{d\omega_i}{N\delta} = \frac{1}{N\delta} \sum_{i=1}^N S_i = \frac{\bar{S}}{\delta},$$

где  $\bar{S}$  — средняя интенсивность для линии, находящейся в рассматриваемом интервале.

**Задача 5.26.** В рамках случайной модели определить в заданном интервале частот функцию распределения по оптическим плотностям.

Пусть  $\delta$  — средняя разность частот для соседних линий, а  $p(S) dS$  — вероятность того, что интенсивность линии в рассматриваемом частотном интервале лежит в промежутке от  $S$  до  $S + dS$ . Наша задача найти вероятность  $f(u) du$  того, что оптическая толщина при данной частоте лежит в интервале от  $u$  до  $u + du$ . Заданная оптическая толщина при рассматриваемой частоте зависит от положения отдельных линий, которое носит случайный характер. Распределение линий в рассматриваемом частотном интервале создает и распределение по оптическим толщинам при данной частоте.

При нахождении искомой функции распределения мы воспользуемся методом, разработанным для определения формы спектральной линии в статистической теории уширения спектральной

линии. Введем характеристическую функцию  $\chi(t)$ :

$$\chi(t) = \int_0^{\infty} e^{-itu} f(u) du = \prod_i \int e^{itu_i} W(u_i) du_i = \prod_i \chi_i(t).$$

Здесь  $u_i$  — оптическая толщина, создаваемая  $i$ -й линией на данной частоте ( $u = \sum_i u_i$ );  $W(u_i) du_i$  — вероятность того, что оптическая толщина за счет  $i$ -й линии при данной частоте лежит в интервале от  $u_i$  до  $u_i + du_i$ , так что  $\int f(u) du = \int \prod_i W(u_i) du_i$ .

Обратная операция дает

$$f(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t) e^{itu} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_i \chi_i(t) e^{itu_i} dt.$$

Выделим фиктивный интервал частот  $\Delta\omega$ , в котором находится рассматриваемая частота. Вероятность того, что центр  $i$ -й линии расположен в промежутке от  $\omega_i$  до  $\omega_i + d\omega_i$  в данном интервале, равна  $d\omega_i/\Delta\omega$ . Считая, что ширина отдельной линии мала по сравнению с величиной выделенного интервала, так что создаваемая  $i$ -й линией оптическая толщина на расстоянии порядка  $\Delta\omega$  от ее центра много меньше единицы, получим

$$\chi_i(t) = \int e^{-itu_i} \frac{d\omega_i}{\Delta\omega} = 1 - \frac{1}{\Delta\omega} \int [1 - e^{-itu_i(\omega_i)}] d\omega_i.$$

Отсюда, учитывая малость второго слагаемого по сравнению с единицей, находим

$$\ln \chi_i(t) = \frac{1}{\Delta\omega} \int d\omega_i [1 - e^{-itu_i(\omega_i)}]$$

и

$$\ln \chi(t) = \frac{1}{\Delta\omega} \sum_i \int d\omega_i [1 - e^{-itu_i(\omega_i)}].$$

Устремляя  $\Delta\omega$  к бесконечности и учитывая, что распределение каждой линии по положению ее центра и по интенсивности одинаково, получим

$$\ln \chi(t) = \int \frac{d\omega}{\delta} [1 - e^{-itu_i(\omega - \omega_i, S)}] p(S) dS.$$

При этом в данном интервале  $\Delta\omega$  находится  $N$  линий, так что  $\delta = \Delta\omega/N$  — средняя разность частот для соседних линий. Далее,  $u_i$  — оптическая толщина, создаваемая отдельной линией, интенсивность которой равна  $S$  и центр которой расположен в точке  $\omega_i$ . Отсюда на основании вышеприведенных формул определим искомую

функцию распределения:

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp \left\{ itu - \int \frac{d\omega_i}{\delta} p(S) dS [1 - e^{-itu_i(\omega - \omega_i, S)}] \right\}. \quad (5.22)$$

Определим на основании полученной формулы среднее значение функции поглощения на данной частоте. По определению этой функции она равна

$$\bar{A} = \int_0^{\infty} (1 - e^{-u}) f(u) du = 1 - \int_0^{\infty} e^{-u} f(u) du.$$

Используя выражение для  $f(u)$  и вычисляя интеграл по  $du$ , получим

$$\bar{A} = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1-it)} \exp \left\{ - \int \frac{d\omega_i}{\delta} p(S) dS [1 - e^{-itu_i}] \right\}.$$

Подынтегральная функция имеет полюс в точке  $t = -i$ . Выражая интеграл через вычет подынтегральной функции в полюсе, найдем окончательно

$$\bar{A} = 1 - \exp \left\{ - \int \frac{d\omega_i}{\delta} p(S) dS (1 - e^{-u_i}) \right\}.$$

Эта формула совпадает с результатом задачи 5.23.

**Задача 5.27.** Считая, что интенсивность спектральной линии однозначно определяется частотным интервалом, в котором она находится, получить формулу для ширины зоны испускания плоского слоя молекулярного газа в рамках случайной модели.

По определению ширины зоны испускания имеем

$$\Delta\omega = 2 \int d\omega \int \cos\theta d\cos\theta \left[ 1 - \exp \left( - \frac{u(\omega)}{\cos\theta} \right) \right].$$

При заданной частоте усредним подынтегральное выражение по возможным значениям оптической толщины. Имеем

$$\overline{1 - \exp \left( - \frac{u}{\cos\theta} \right)} = \int_0^{\infty} f(u) du \left[ 1 - \exp \left( - \frac{u}{\cos\theta} \right) \right].$$

Воспользуемся выражением для функции распределения по оптическим толщинам, найденным в предыдущей задаче при одно-

значной связи между интенсивностью линии и частотой. Получим

$$\overline{1 - \exp\left(-\frac{u}{\cos \theta}\right)} = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{\infty} du \exp\left[-\frac{u}{\cos \theta} + itu - \int \frac{d\omega_i}{\delta} (1 - e^{-itu_i})\right],$$

где  $u_i$  — оптическая толщина, создаваемая отдельной линией.

Проинтегрируем полученное выражение по  $du$ , а интеграл по  $dt$ , как и в предыдущей задаче, определим через вычет в полюсе подынтегрального выражения. Это дает

$$\overline{1 - \exp\left(-\frac{u}{\cos \theta}\right)} = 1 - \exp\left\{-\int \frac{d\omega_i}{\delta} \left[1 - \exp\left(-\frac{u_i}{\cos \theta}\right)\right]\right\}.$$

Отсюда для ширины зоны испускания, полученной на основании случайной модели, находим

$$\Delta\omega = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \left\{1 - \exp\left[-\int \frac{d\omega_i}{\delta} \left(1 - \exp\left(-\frac{u_i}{\cos \theta}\right)\right)\right]\right\}.$$

Здесь  $u_i$  — оптическая плотность, создаваемая отдельной линией,  $\delta$  — средняя разность частот между соседними линиями. Интеграл по  $d\omega_i$ , определяемый формой линии, зависит от интенсивности линии как от параметра; сама же интенсивность спектральной линии зависит от частоты  $\omega$  спектрального участка, где расположена данная линия.

Если интенсивность линии при данной частоте распределена по определенному закону, то эту формулу следует переписать в виде

$$\Delta\omega = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \times \left\{1 - \exp\left[-\int p(S) dS \frac{d\omega_i}{\delta} \left(1 - \exp\left(-\frac{u_i}{\cos \theta}\right)\right)\right]\right\}.$$

**Задача 5.28.** Для лоренцевской формы спектральной линии в рамках случайной модели вычислить ширину зоны испускания для плоского слоя молекулярного газа. Считать, что в области частот, определяющих ширину зоны испускания, интенсивность спектральной линии резко убывает по мере удаления от центра полосы.

Оптическая толщина слоя при частоте, которая создается отдельной линией, в случае лоренцевской формы спектральной линии равна

$$u = u_{\max} \frac{v^2}{(\omega - \omega_i)^2 + v^2} = \frac{u_{\max}}{1 + s^2},$$

где  $\omega_i$  отвечает центру линии,  $u_{\max}$  — оптическая толщина слоя для центра линии,  $v$  — ширина спектральной линии,  $s = (\omega - \omega_i)/v$ . Подставляя это выражение в формулу для ширины зоны испускания, полученной при использовании случайной модели, имеем

$$\Delta\omega = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \times \\ \times \left\{ 1 - \exp \left( - \frac{v}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \left[ 1 - \exp \left\{ - \frac{u_{\max}(\omega)}{(1+s^2) \cos \theta} \right\} \right] \right) \right\}.$$

При этом  $u_{\max}(\omega)$  — оптическая толщина слоя молекулярного газа в центре линии, которая пропорциональна интенсивности линии, а та, в свою очередь, зависит от частоты перехода.

Вычислим далее ширину зоны испускания, считая, что в области частот, определяющих эту величину,  $u_{\max}$  резко убывает по мере удаления от центра полосы. При этом заметим, что основной вклад в искомый интеграл вносят частоты, для которых

$$\frac{v}{\delta} \int ds \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{u_{\max}}{(1+s^2) \cos \theta} \right] \right\} \sim 1.$$

Рассмотрим сначала случай, когда ширина спектральной линии  $v$  мала по сравнению с разностью частот соседних линий. Тогда основной вклад в интеграл вносят частоты, которые отстоят от центра перехода на расстоянии, значительно превышающем ширину линии, так что

$$\frac{v}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \left[ 1 - \exp \left( - \frac{u_{\max}}{s^2 \cos \theta} \right) \right] = 2 \frac{v}{\delta} \sqrt{\frac{\pi u_{\max}}{\cos \theta}}$$

и ширина зоны испускания равна

$$\Delta\omega = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{2v}{\delta} \sqrt{\frac{\pi u_{\max}(\omega)}{\cos \theta}} \right] \right\}.$$

При вычислении этого интеграла учтем, что  $u_{\max}$  резко зависит от частоты. Основной вклад в интеграл вносят частоты, для которых показатель экспоненты порядка единицы. Но в силу резкой зависимости  $u_{\max}(\omega)$  в процессе изменения частоты выражение в фигурных скобках практически изменяется от единицы до нуля в малом интервале частот. Учитывая указанные обстоятельства, выберем частоту  $\omega'$ , которая близка к частоте центра полосы переходов  $\omega_0$ , но для частоты  $\omega'$  показатель экспоненты много больше единицы. В окрестности  $\omega'$  зависимость оптической толщины слоя в центре отдельной линии от частоты зададим в виде  $u_{\max}(\omega) = u_{\max}(\omega') e^{-\alpha(\omega - \omega')}$ , где  $\alpha$  представляет собой логарифмическую производную от величины  $u_{\max}$  при частоте  $\omega'$ .

В результате получим

$$\Delta\omega = 2(\omega' - \omega_0) + 4 \int_{\omega'}^{\infty} d\omega \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{2\nu}{\delta} \sqrt{\frac{\pi u_{\max}(\omega')}{\cos \theta}} e^{-\frac{\alpha}{2}(\omega - \omega')} \right] \right\}.$$

Заменой переменных приведем это выражение к виду

$$\Delta\omega = 2(\omega' - \omega_0) + \frac{8}{\alpha} \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \int_0^{A/\sqrt{\cos \theta}} (1 - e^{-z}) \frac{dz}{z},$$

где

$$z = \frac{A}{\sqrt{\cos \theta}} e^{-\frac{\alpha}{2}(\omega - \omega')} \quad \text{и} \quad A = \frac{2\nu}{\delta} \sqrt{\pi u_{\max}(\omega')} \gg 1.$$

Используя асимптотическое выражение для последнего интеграла с учетом того, что его верхний предел значительно превышает единицу, получим

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 2(\omega' - \omega_0) + \frac{8}{\alpha} \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \ln \frac{Ae^C}{\sqrt{\cos \theta}} = \\ &= 2(\omega' - \omega_0) + \frac{4}{\alpha} \ln (Ae^{C+1/2}) \equiv 2(\omega_1 - \omega_0), \end{aligned}$$

где  $C = 0,577$  — постоянная Эйлера. При этом, учитывая зависимость оптической толщины слоя от частоты в рассматриваемой области частот  $u_{\max}(\omega) = u_{\max}(\omega') e^{-\alpha(\omega - \omega')}$ , мы вводим частоту  $\omega_1$  на основании соотношения

$$\frac{4\pi\nu^2}{\delta^2} u_{\max}(\omega_1) e^{2C+1/2} = 1,$$

или

$$\frac{\nu^2}{\delta^2} u_{\max}(\omega_1) = (4\pi e^{2C+1/2})^{-1}.$$

Рассмотрим другой предельный случай, когда ширина спектральной линии  $\nu$  значительно превышает среднюю разность частот для соседних переходов  $\delta$ . Тогда, учитывая, что основной вклад в выражение для ширины зоны испускания вносят частоты,

для которых  $\frac{\nu}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{u_{\max}(\omega)}{(1+s^2) \cos \theta} \right] \right\} ds \sim 1$ , получим для

этого интеграла, разлагая показатель экспоненты:

$$\frac{\nu}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{u_{\max}(\omega)}{(1+s^2) \cos \theta} \right] \right\} = \frac{\pi\nu u_{\max}(\omega)}{\delta \cos \theta}.$$



Это приводит к следующему выражению для ширины зоны испускания:

$$\Delta\omega = 2 \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{\pi u_{\max}(\omega)}{\delta \cos \theta} \right] \right\}.$$

Введем, как и ранее, некоторую частоту  $\omega'$ , при которой показатель экспоненты еще велик. В то же время она близка к частоте, при которой показатель экспоненты порядка единицы. В силу резкой зависимости  $u_{\max}(\omega)$ , аппроксимируя в этой области частот величину  $u_{\max}(\omega) = u_{\max}(\omega') e^{-\alpha(\omega - \omega')}$ , получим

$$\Delta\omega = 2(\omega' - \omega_0) + \frac{4}{\alpha} \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \int_0^{A/\cos \theta} \frac{dz}{z} (1 - e^{-z}).$$

Здесь  $\omega_0$  — центр полосы рассматриваемых переходов,

$$z = \frac{A}{\cos \theta} \exp[-\alpha(\omega - \omega')], \quad A = \frac{\pi\nu}{\delta} u_{\max}(\omega') \gg 1.$$

Определяя, как и раньше, асимптотическое выражение последнего интеграла при  $A \gg 1$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 2(\omega' - \omega_0) + \frac{4}{\alpha} \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \ln \frac{Ae^C}{\cos \theta} = \\ &= 2(\omega' - \omega_0) + \frac{2}{\alpha} \ln(Ae^{C+1/2}) \equiv 2(\omega_1 - \omega_0), \end{aligned}$$

где частота  $\omega_1$  определяется соотношением

$$\frac{\nu}{\delta} u_{\max}(\omega_1) = (\pi e^{C+1/2})^{-1}.$$

**Задача 5.29.** Определить коэффициент поглощения в молекулярном газе, если переход осуществляется в результате колебательно-вращательного перехода линейной молекулы. При этом имеет место лоренцевское уширение спектральной линии и ширина спектральной линии мала по сравнению с разностью частот для центров линий соседних переходов.

Будем считать, что поддерживается термодинамическое равновесие между колебательно-вращательными состояниями. Тогда плотность молекул на колебательном уровне  $\nu$  и вращательном  $j$  равна

$$N_{\nu j} = N_0 e^{-\hbar\omega_\nu/T} \frac{B}{T} (2j+1) e^{-Bj(j+1)/T},$$

где  $N_0$  — полная плотность молекул в основном колебательном состоянии,  $\hbar\omega_0$  — энергия возбуждения колебательного уровня,  $B$  — вращательная постоянная молекулы,  $T$  — выраженная в энергетических единицах температура газа, причем  $B \ll T$ .

Пользуясь соотношением (5.6) для коэффициента поглощения и формулой (П4.2) для формы спектральной линии, получим значение коэффициента поглощения в рассматриваемом случае за счет возбуждения молекул из основного колебательного состояния:

$$k_{\omega} = \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2} \sum_j \omega N_0 (1 - e^{-\hbar\omega_0/T}) \frac{B}{T} (2j+1) e^{-Bj(j+1)/T} \frac{v}{\pi [(\omega - \omega_j)^2 + v^2]},$$

где  $\omega$  — частота спонтанного высвечивания для рассматриваемого перехода,  $v$  — ширина линии излучения,  $\hbar\omega_j$  — энергия перехода, причем  $\hbar\omega_j = \hbar\omega_0 + 2B(j+1)$  для перехода с увеличением вращательного момента на единицу ( $P$ -ветвь) и  $\hbar\omega_j = \hbar\omega_0 - 2Bj$  для перехода с уменьшением вращательного квантового числа на единицу ( $R$ -ветвь).

Введем  $\tau$  — время жизни относительно высвечивания для колебательного возбужденного состояния молекулы. Поскольку  $\frac{1}{\tau} = \omega(j \rightarrow j-1) + \omega(j \rightarrow j+1)$  и для больших значений вращательных моментов ( $j \gg 1$ )  $\omega(j \rightarrow j-1) = \omega(j \rightarrow j+1)$ , то  $\omega(j \rightarrow j-1) = \omega(j \rightarrow j+1) = \frac{1}{2\tau}$ . Учитывая это и считая вращательную постоянную  $B$  малой по сравнению с энергией колебательного возбуждения  $\hbar\omega_0$  и тепловой энергией  $T$ , представим формулу для коэффициента поглощения в виде

$$k_{\omega} = \frac{\pi c^2 v}{\omega^2 \tau} \frac{B}{T} N_0 \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega_0}{T}}\right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(j+1/2) e^{-Bj(j+1)/T}}{\left[\omega - \omega_0 - \frac{2B}{\hbar}(j+1/2)\right]^2 + v^2}.$$

Используя далее, что  $B \ll T$ , на основе формулы для суммы:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2 + y^2} = \frac{\pi \operatorname{sh} 2\pi y}{y (\operatorname{ch} 2\pi y - \cos 2\pi x)}$$

преобразуем выражение для коэффициента поглощения к виду

$$k_{\omega} = \frac{\pi^2 c^2}{4\omega^2} \frac{\hbar^2 |\omega - \omega_0|}{\tau T B} N_0 (1 - e^{-\hbar\omega_0/T}) \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \hbar v}{B} \exp \left[ -\frac{\hbar^2 (\omega - \omega_0)^2}{4BT} \right]}{\left[ \operatorname{ch} \frac{\pi \hbar v}{B} - \cos \frac{\pi \hbar |\omega - \omega_0|}{B} \right]}.$$

Коэффициент поглощения, как функция частоты, является почти периодической функцией с периодом, равным  $2B/\hbar$  ( $2B$  — разность энергий для соседних колебательно-вращательных переходов). Такая зависимость для коэффициента поглощения носит название функции Эльзассера. Эта функция имеет вид гребенки. Отношение значений коэффициентов поглощения в соседних

максимуме и минимуме равно  $\left(1 + \operatorname{ch} \frac{\pi \hbar \nu}{B}\right) / \left(\operatorname{ch} \frac{\pi \hbar \nu}{B} - 1\right)$ . В частности, если  $\hbar \nu \ll B$ , то это отношение велико и равно  $(2B/\pi \hbar \nu)^2$ . Максимальное значение коэффициента поглощения обусловлено возбуждением вращательного состояния, где находится максимальное количество молекул. Ему соответствует частота перехода  $|\omega - \omega_0| = \sqrt{2BT}/\hbar$ , а максимальное значение коэффициента поглощения

$$k_{\max} = \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2} \frac{\hbar \sqrt{2}}{\tau \sqrt{eBT}} N_0 (1 - e^{-\hbar \omega_0/T}) \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \hbar \nu}{B}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi \hbar \nu}{B} - 1\right)}.$$

**Задача 5.30.** Определить ширину зоны испускания для квазиврегулярной модели и лоренцевской формы спектральной линии. Считать, что интенсивность спектральной линии, которая мало изменяется для соседних линий, резко изменяется с частотой в масштабах частот, сравнимых с шириной зоны испускания.

В рассматриваемом случае, согласно результату предыдущей задачи, оптическая толщина слоя равна

$$u_\omega = u_m(\omega) \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi \nu}{\delta} - 1}{\operatorname{ch} \frac{2\pi \nu}{\delta} - \cos \frac{2\pi(\omega - \omega_0)}{\delta}}.$$

Здесь  $u_m(\omega)$  — оптическая толщина слоя в центре соответствующего перехода,  $\nu$  — ширина линии,  $\delta = 2B/\hbar$  — разность частот соседних линий,  $\omega_0$  — частота, отвечающая центру полосы рассматриваемых переходов. При этом, как и ранее, считаем, что полоса расположена симметрично относительно своего центра. Кроме того, согласно условию применимости модели значение  $u_m(\omega)$  мало изменяется при смещении частоты на величину порядка  $\delta$ , однако на краю полосы  $u_m(\omega)$  заметно изменяется при смещении частоты на величину, малую по сравнению с шириной зоны излучения.

В соответствии с общей формулой (5.17) ширина зоны излучения р вна

$$\Delta\omega = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \times \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{u_m(\omega)}{\cos \theta} \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi \nu}{\delta} - 1}{\operatorname{ch} \frac{2\pi \nu}{\delta} - \cos \frac{2\pi(\omega - \omega_0)}{\delta}} \right] \right\}.$$

Рассмотрим отдельно различные предельные соотношения между шириной отдельной линии  $\nu$  и разностью частот соседних линий  $\delta$ . Если ширина линии  $\nu$  велика по сравнению с  $\delta$ , то

$$\Delta\omega = 2 \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{u_m(\omega)}{\cos \theta} \right] \right\}.$$

Учитывая резкую зависимость  $u_m(\omega)$  от частоты, используем обычный прием для вычисления искомого интеграла. Введем  $\omega'$  так, что  $u_m(\omega') \gg 1$ , но  $\omega'$  близка к величине  $\omega_1$ , для которой  $u_m(\omega_1) \sim 1$ . Далее, в рассматриваемой области частот  $u_m(\omega) = u_m(\omega') e^{-\alpha(\omega-\omega')}$ , где  $\alpha$  — логарифмическая производная для оптической толщины  $u_m(\omega)$  слоя в точке  $\omega'$ . Разбивая искомым интеграл на части с использованием указанных обстоятельств, получим

$$\Delta\omega = 2(\omega' - \omega_0) + \frac{4}{\alpha} \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \int_0^{u_m(\omega')/\cos \theta} (1 - e^{-z}) \frac{dz}{z},$$

где  $z = u_m(\omega)/\cos \theta$ .

Используя асимптотическое выражение последнего интеграла и учитывая, что  $u_m(\omega') \gg 1$ , находим

$$\Delta\omega = 2(\omega' - \omega_0) + \frac{2}{\alpha} \ln [u(\omega') e^{C+1/2}] \equiv 2(\omega_1 - \omega_0),$$

здесь  $u_m(\omega_1) = \exp(-C - 1/2)$  и  $C = 0,577$  — постоянная Эйлера.

В случае, когда ширина отдельной линии  $\nu$  мала по сравнению с разностью частот соседних линий, имеем, разбивая интеграл для  $\Delta\omega$  на сумму отдельных интегралов между соседними линиями:

$$\Delta\omega = \frac{\delta}{\pi} \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \sum_n \int_0^{2\pi} d\varphi \times \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{u_m(\omega)}{\cos \theta} \frac{\left( \operatorname{ch} \frac{2\pi\nu}{\delta} - 1 \right)}{\left( \operatorname{ch} \frac{2\pi\nu}{\delta} - \cos \varphi \right)} \right] \right\},$$

где новые переменные введены из соотношения  $\frac{2\pi(\omega - \omega_0)}{\delta} = \varphi + 2\pi n$ .

Считая, что основной вклад в ширину зоны испускания вносят переходы на многих линиях, заменим суммирование по  $n$  интегрированием по частоте:

$$\Delta\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \times \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{u_m(\omega)}{\cos \theta} \frac{\left( \operatorname{ch} \frac{2\pi\nu}{\delta} - 1 \right)}{\left( \operatorname{ch} \frac{2\pi\nu}{\delta} - \cos \varphi \right)} \right] \right\}.$$

В данном представлении интеграла мы отделили осциллирующую часть от части, которая медленно меняется за период.

Разложим теперь подынтегральное выражение по малому параметру  $\nu/\delta$ . Основной вклад в искомый интеграл вносит область переменных интегрирования, где  $\varphi \sim 1$ , так что гиперболический косинус в знаменателе заменим единицей. Получим

$$\Delta\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos\theta d \cos\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{2\pi^2\nu^2 u_m(\omega)}{\delta^2 \cos\theta (1 - \cos\varphi)} \right] \right\}.$$

Введем, как и ранее, частоту  $\omega'$ , для которой  $u_m(\omega') \gg 1$ , но она близка к частоте  $\omega_1$ , которая удовлетворяет соотношению  $u_m(\omega_1) \sim 1$ . Аппроксимируя в области этих частот  $u_m(\omega) = u_m(\omega') e^{-\alpha(\omega - \omega')}$  и разбивая искомый интеграл по  $d\omega$  на две части, получим

$$\Delta\omega = 2(\omega' - \omega_0) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos\theta d \cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{A}{\cos\theta(1-\cos\varphi)}} \frac{dz}{z} (1 - e^{-z}),$$

где

$$z = \frac{A \exp[-\alpha(\omega - \omega')]}{\cos\theta(1 - \cos\varphi)} \quad \text{и} \quad A = \frac{2\pi^2\nu^2}{\delta^2} u_m(\omega') \gg 1.$$

Используя асимптотическое выражение для последнего интеграла, получим

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 2(\omega' - \omega_0) + \frac{2}{\pi\alpha} \int_0^1 \cos\theta d \cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \ln \frac{Ae^C}{\cos\theta(1 - \cos\varphi)} = \\ &= 2(\omega' - \omega_0) + \frac{2}{\alpha} \ln(2Ae^{C+1/2}) \equiv 2(\omega_1 - \omega_0), \end{aligned}$$

где  $C$  — постоянная Эйлера и частота  $\omega_1$  определяется соотношением

$$\frac{\nu^2}{\delta^2} u_m(\omega_1) = (4\pi^2 e^{C+1/2})^{-1}.$$

Свяжем используемый здесь параметр — оптическую толщину слоя в центре соответствующего перехода с оптической толщиной слоя, создаваемой отдельной линией в центре этой линии  $u_{\max}(\omega)$ . При  $\nu \ll \delta$  имеем  $u_m(\omega) = u_{\max}(\omega)$ , т. е. оптическая толщина в максимуме создается одной линией. При  $\nu \gg \delta$ , когда оптическая толщина в каждом максимуме создается многими переходами, имеем  $u_m(\omega) = u_{\max}(\omega) \frac{\nu\pi}{\delta}$ . Учитывая это, перепишем результат для ширины зоны испускания:

$$\Delta\omega = 2(\omega_1 - \omega_0),$$

причем в случае  $v \gg \delta$  частота  $\omega_1$  определяется соотношением

$$\frac{v}{\delta} u_{\max}(\omega_1) = (\pi e^{C+1/2})^{-1},$$

а в случае  $v \ll \delta$  эта частота дается соотношением

$$\frac{v^2}{\delta^2} u_{\max}(\omega_1) = (4\pi^2 e^{C+1/2})^{-1}.$$

**Задача 5.31.** Для модели одиночных линий при лоренцевской форме спектральной линии определить среднюю функцию поглощения на данной частоте, а также эффективную ширину зоны излучения для плоского слоя.

Оптическая толщина слоя, создаваемая одной линией, при лоренцевской форме линии равна

$$u = u_{\max} \frac{v^2}{(\omega - \omega_i)^2 + v^2} = \frac{u_{\max}}{1 + s^2}.$$

Здесь  $u_{\max}$  — оптическая толщина слоя для центра линии,  $v$  — ширина линии,  $\omega - \omega_i$  — разность исследуемой частоты и частоты перехода для центра линии,  $s = (\omega - \omega_i)/v$ .

В рассматриваемом случае  $u_{\max} \gg 1$ , но минимальное значение оптической толщины слоя в промежутке между двумя линиями мало по сравнению с единицей. Поэтому интеграл (5.15) для функции поглощения разобьется на сумму интегралов вблизи центра каждой линии, где действием соседних линий можно пренебречь. В результате получим

$$A = \frac{v}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{u_{\max}}{1+s^2}\right) \right] ds,$$

где  $\delta$  — средняя разность частот для соседних линий.

Учитывая, что основной вклад в интеграл вносят  $s \gg 1$  ( $u_{\max} \gg 1$ ), имеем

$$A = \frac{v}{\delta} \int_{\infty}^{+\infty} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{u_{\max}}{s^2}\right) \right] ds = \frac{2v}{\delta} \sqrt{\pi u_{\max}},$$

так что  $\bar{A} = \frac{2v}{\delta} \sqrt{\pi} \overline{(u_{\max})^{1/2}}$ , где  $\overline{(u_{\max}(\omega))^{1/2}}$  — среднее значение для корня из оптической толщины, создаваемой линией, центр которой соответствует данной частоте.

Ширина зоны испускания согласно формуле (5.18) равна

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= v \sum_i \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \int_{-\infty}^{+\infty} ds \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{u_{\max}^{(i)}}{s^2 \cos \theta}\right] \right\} = \\ &= \sum_i \int_0^1 \cos \theta d \cos \theta \cdot 2v \sqrt{\pi u_{\max}^{(i)} \cos \theta} = \frac{4\sqrt{\pi} v}{5} \sum_i \sqrt{u_{\max}^{(i)}}, \end{aligned}$$

где  $u_{\max}^{(i)}$  — оптическая толщина в центре  $i$ -й линии. Будем считать, что зона испускания создается большим числом отдельных линий. По определению  $u_{\max}^{(i)} = \frac{1}{2\pi\nu} \int S_i dx$ , где  $S_i$  — интенсивность данной линии, интеграл берется по толщине  $dx$  слоя молекулярного газа. Предполагая, что закон распределения интенсивностей при каждой частоте задан, имеем

$$\Delta\omega = \frac{2\sqrt{2\nu}}{5} \int \sqrt{\int S(\omega) dx} p[S(\omega)] dS \frac{d\omega}{\delta}.$$

Если интенсивность линии однозначно определяется ее частотой, то эта формула принимает вид

$$\Delta\omega = \frac{2\sqrt{2\nu}}{5\delta} \int d\omega \sqrt{\int S(\omega) dx}.$$

**Задача 5.32.** Определить коэффициент поглощения молекулярного газа для регулярной модели при лоренцевской форме линии.

Пользуясь формулой (5.18) для коэффициента поглощения и учитывая лоренцевскую форму линии, при одинаковой интенсивности линий получим

$$k_{\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S\nu}{\pi} [(\omega - \omega_0 - n\delta)^2 + \nu^2]^{-1},$$

где  $\nu$  — ширина линии,  $\omega_0$  — центр линии, принятой за середину полосы,  $\delta$  — среднее расстояние между линиями. Производя суммирование по  $n$ , на основании теоремы Лефлера—Миттага

$$\left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(x-n)^2 + y^2]^{-1} = \frac{\pi \operatorname{sh} 2\pi y}{y (\operatorname{ch} 2\pi y - \cos 2\pi x)} \right],$$

получим:

$$k_{\omega} = \frac{S}{\delta} \operatorname{sh} \frac{2\pi\nu}{\delta} \left[ \operatorname{ch} \frac{2\pi\nu}{\delta} - \cos \frac{2\pi(\omega - \omega_0)}{\delta} \right]^{-1}.$$

Отношение коэффициента поглощения в максимуме к коэффициенту поглощения в минимуме равно  $(\operatorname{ch} \frac{2\pi\nu}{\delta} + 1) / (\operatorname{ch} \frac{2\pi\nu}{\delta} - 1)$ . В случае малой ширины отдельной линии по сравнению с расстоянием между соседними линиями это отношение составляет  $(\delta/\pi\nu)^2$ .

**Задача 5.33.** При условиях применимости регулярной модели и лоренцевской форме линии сравнить функцию распределения по оптическим толщинам, вытекающую из случайной модели, с ее точным выражением.

В рамках регулярной модели оптическая толщина слоя равна

$$u = u_{\min} \frac{\operatorname{ch}(2\pi\nu/\delta) + 1}{\operatorname{ch}(2\pi\nu/\delta) - \cos\varphi},$$

где  $u_{\min}$  — оптическая толщина слоя, если рассматриваемая частота  $\omega$  оказывается посередине между двумя соседними линиями,  $\nu$  — ширина отдельной линии,  $\delta$  — разность частот для соседних линий,  $\varphi = (2\pi/\delta)(\omega - \omega_i)$  ( $\omega_i$  — частота, отвечающая центру ближайшей линии).

Вероятность того, что случайно выбранная частота  $\omega$  отстоит от центра ближайшей линии на расстоянии в интервале от  $\omega - \omega_i$  до  $\omega + d\omega - \omega_i$ , пропорциональна  $d\omega$  или  $d\varphi$ . Отсюда находим, что

$$f(u) du = \frac{1}{\pi} d\varphi,$$

$\varphi$  изменяется в интервале от 0 до  $\pi$ . Это дает для функции распределения по оптическим толщинам

$$f(u) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^{-1}.$$

Рассмотрим случай, когда ширина отдельной линии  $\nu$  мала по сравнению с разностью частот для соседних линий  $\delta$ . Тогда в области, не слишком близкой к центру линии ( $|\omega - \omega_i| \gg \nu$ ) получим

$$f(u) du = \frac{\sqrt{u_{\min}} du}{\pi u \sqrt{u - u_{\min}}}.$$

В случае случайной модели полосы имеем для функции распределения по оптическим частотам (см. задачу 5.25):

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp \left\{ itu - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\delta} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{itu_{\max}}{1+s^2} \right) \right] \right\}.$$

Здесь  $u_{\max}$  — оптическая толщина в центре одного из переходов,  $s = \frac{\omega - \omega_i}{\delta}$  ( $\omega$  — рассматриваемая частота,  $\omega_i$  — частота центра отдельной линии). Вводя  $u_{\min} = u_{\max} (\pi\nu/\delta)^2$  и рассматривая, как и ранее, область не очень больших оптических толщин, получим

$$\left[ y = \frac{\pi\nu}{\delta} s = \frac{\pi}{\delta} (\omega - \omega_i) \right]:$$

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp \left\{ itu - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[ 1 - \exp \left( -\frac{itu_{\min}}{y^2} \right) \right] \right\}.$$

Вычисляя интеграл по  $dy$ , получим

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp \left( itu - \sqrt{\frac{2}{\pi} tu_{\min}} - i \sqrt{\frac{2}{\pi} tu_{\min}} \right).$$



При  $u \gg u_{\min}$  находим, что

$$f(u) = \frac{1}{\pi} \frac{u_{\min}^{1/2}}{u^{3/2}},$$

т. е. функция распределения совпадает с точной.

При  $u \sim u_{\min}$  функция распределения по оптическим толщинам, полученная на основании случайной модели, отличается от точной.

**Задача 5.34.** В случае резкого изменения функции распределения испускаемых фотонов по частотам на крыле линии в рамках модели одиночных линий вычислить функцию поглощения и ширину зоны испускания для плоского слоя молекулярного газа. Считать форму отдельной спектральной линии доплеровской.

Функция поглощения в модели одиночных линий имеет вид

$$A = \int \frac{d\omega}{\delta} (1 - e^{-u}).$$

Будем считать для простоты, что линия симметрична относительно центра, и обозначим положение центра линии через  $\omega_0$ . Величина искомого интеграла приблизительно равна

$$A \approx \frac{2 |\omega_0 - \omega_1|}{\delta},$$

где в силу вида интеграла  $u(\omega_1) \sim 1$ . Для более точного определения интеграла введем частоту  $\omega'$ , так что  $u(\omega') \gg 1$ , но  $\omega'$  близка к  $\omega_1$ . В области частот вблизи  $\omega'$  из-за резкой зависимости оптической толщины от частоты будем аппроксимировать оптическую толщину зависимостью  $u(\omega) = u(\omega') e^{-\alpha(\omega - \omega')}$ , где  $\alpha = \left. \frac{d \ln u}{d\omega} \right|_{\omega'}$ .

С учетом указанных обстоятельств получим

$$A = \frac{2(\omega' - \omega_0)}{\delta} + \frac{2}{\delta} \int_{\omega'}^{\infty} d\omega \{1 - \exp[-u(\omega') e^{-\alpha(\omega - \omega')}] \}.$$

Вводя новую переменную,  $z = u(\omega') e^{-\alpha(\omega - \omega')}$ , получим

$$A = \frac{2(\omega' - \omega_0)}{\delta} + \frac{2}{\delta \alpha} \int_0^{u(\omega')} \frac{dz}{z} (1 - e^{-z}).$$

Учтем, что  $u(\omega') \gg 1$  и определим асимптотическое значение интеграла, которое равно

$$\int_0^{u(\omega')} \frac{dz}{z} (1 - e^{-z}) = \ln u(\omega') + C,$$

где  $C = 0,577$  — постоянная Эйлера. Это дает для функции поглощения

$$A = \frac{2(\omega' - \omega_0)}{\delta} + \frac{2}{\delta\alpha} [\ln u(\omega') + C] \equiv \frac{2(\omega_1 - \omega_0)}{\delta},$$

здесь  $u(\omega_1) = e^{-C}$ .

Подобным образом поступим при вычислении ширины зоны испускания плоского слоя. Зона испускания является суммой отдельных полос вблизи центра каждой линии, и нашей задачей здесь является определение ширины отдельной полосы в окрестности заданной линии. Имеем

$$\Delta\omega = 2 \int_0^1 \cos\theta \, d \cos\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left[ 1 - \exp\left(-\frac{u(\omega)}{\cos\theta}\right) \right],$$

где  $u(\omega)$  — монотонно и резко убывающая функция по мере удаления от центра линии  $\omega_0$  и симметричная относительно центра. Возьмем интеграл по  $d \cos\theta$  по частям. Получим

$$\Delta\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (1 - e^{-u}) + \int_{-\infty}^{+\infty} u \, d\omega \int_0^1 d \cos\theta \exp\left(-\frac{u}{\cos\theta}\right).$$

Первый интеграл вычислен выше и составляет

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (1 - e^{-u}) = 2(\omega_1 - \omega_0), \quad \text{где } u(\omega_1) = e^{-C}.$$

Используя введенную аппроксимацию  $u(\omega) = u(\omega') e^{-\alpha(\omega - \omega')}$ , получим для второго интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^1 d \cos\theta \, u e^{-\frac{u}{\cos\theta}} = 2 \int_0^{u_{\max}} \frac{du}{\alpha u} \int_0^1 d \cos\theta \exp\left(-\frac{u}{\cos\theta}\right) = \frac{1}{\alpha}.$$

В результате находим

$$\Delta\omega = 2(\omega_1 - \omega_0) + \frac{1}{\alpha} \equiv 2(\omega_2 - \omega_0), \quad \text{где } u(\omega_2) = e^{-C-1/2}.$$

Используем полученные результаты для доплеровской формы линии, когда

$$u = u_{\max} \exp\left[-\frac{Mc^2(\omega - \omega_0)^2}{2T\omega_0^2}\right].$$

Здесь  $u_{\max}$  — оптическая толщина для центра линии ( $u_{\max} \gg 1$ ),  $M$  — масса молекулы,  $T$  — температура газа,  $c$  — скорость света. На основе полученных результатов для функции поглощения имеем

$$A \approx \frac{2\omega_0}{\delta} \sqrt{\frac{T}{Mc^2}} \sqrt{(\ln u_{\max} + C)}.$$

А для ширины зоны испускания за счет отдельной линии получим

$$\Delta\omega = 2\omega_0 \sqrt{\frac{T}{Mc^2}} \sqrt{\left(\ln u_{\max} + C + \frac{1}{2}\right)}.$$

**Задача 5.35.** Оптическая толщина слоя молекулярного газа, обусловленная одной линией, убывает по мере удаления от центра линии по закону  $(\omega - \omega_l)^{-n}$  ( $n < 2$ ,  $\omega_l$  — положение центра линии,  $|\omega - \omega_l|$  значительно превышает ширину отдельной линии). Считая, что ширина отдельной линии значительно меньше средней разности частот  $\delta$  между соседними линиями, определить ширину зоны испускания  $\Delta\omega$  в рамках случайной и регулярной моделей. Считать, что полоса симметрична относительно центра полосы  $\omega_0$ , что в области максимальных оптических толщин слой является оптически толстым и посередине между центрами соседних линий, а на краю полосы интенсивность спектральной линии падает резко с удалением от центра полосы.

Согласно условию задачи аппроксимируем оптическую толщину слоя за счет отдельной линии при частотах  $\omega$ , не очень близких к частоте центра линии  $\omega_l$ , зависимостью

$$u = u_{\max} s^{-n},$$

где  $u_{\max}$  — оптическая толщина в центре линии,  $s = \frac{|\omega - \omega_l|}{\nu}$ , величина  $\nu$  порядка ширины линии (но не совпадает с последней). Будем для простоты считать, что линия симметрична относительно своего центра. Тогда на основании случайной модели получим

$$\Delta\omega = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^1 \cos\theta d\cos\theta \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{\nu}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \left( 1 - \exp \left( -\frac{u_{\max}}{s^n \cos\theta} \right) \right) \right] \right\}$$

При этом основной вклад в интеграл вносят не очень малые значения  $s$ , где использованное разложение законно. Вычисляя интеграл по  $ds$ , получим

$$\Delta\omega = 4 \int_0^1 \cos\theta d\cos\theta \int_0^{\infty} d\omega \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{2\nu}{\delta} \left( \frac{u_{\max}}{\cos\theta} \right)^{1/n} \Gamma \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right] \right\}.$$

При этом, как и ранее, мы считаем, что оптическая плотность  $u_{\max}(\omega)$  симметрична относительно центра полосы.

Учитывая сильную зависимость  $u_{\max}(\omega)$  в области частот  $\omega$ , определяющих величину данного интеграла, в этом диапазоне частот будем аппроксимировать  $u(\omega) = u(\omega') e^{-\alpha(\omega - \omega')}$ , где  $\omega'$  — частота, для которой показатель экспоненты еще велик,  $-\alpha$  — логарифмическая производная от оптической толщины слоя в этой

точке. Вводя новые переменные,

$$z = Ae^{-\alpha(\omega - \omega')}, \quad A = -\frac{\nu}{\delta} [u_{\max}(\omega')]^{1/n} \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \gg 1,$$

и разбивая искомый интеграл на две части, получим

$$\Delta\omega = 2(\omega' - \omega) + \frac{4}{\alpha} \int_0^1 \cos\theta \, d\cos\theta \int_0^{A(\cos\theta)^{-1/n}} \frac{dz}{z} (1 - e^{-z}).$$

Используя асимптотическое выражение искомого интеграла, будем иметь

$$\Delta\omega = 2(\omega' - \omega) + \frac{2}{\alpha} \ln Ae^C + \frac{1}{\alpha n} \equiv 2(\omega_1 - \omega_0),$$

где  $\omega_1$  дается соотношением

$$\left(\frac{\nu}{\delta}\right)^n u_{\max}(\omega_1) = e^{-1/2} \left[2e^C \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^{-1/n}.$$

В случае регулярной модели имеем для ширины зоны испускания в рассматриваемом случае

$$\Delta\omega = 2 \int_0^1 \cos\theta \, d\cos\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{u_{\max}(\omega)}{\cos\theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\nu^n}{|\omega - \omega_0 - \delta k|^n}\right] \right\}.$$

Разобьем интеграл на части внутри отдельной зоны, вводя новые переменные  $(\omega - \omega_0)/\delta = t + m$ , где  $m$  — целое число, а непрерывно изменяющаяся переменная находится в пределах  $-1/2 \leq t \leq 1/2$ . Заменяя далее сумму по  $m$  на интеграл по  $d\omega$ , получим

$$\Delta\omega = 2 \int_0^1 \cos\theta \, d\cos\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-1/2}^{1/2} dt \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{u_{\max}(\omega)}{\cos\theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\nu^n}{\delta^n |t - k|^n}\right] \right\}.$$

Используя обычный прием, вычислим интеграл по частоте с учетом резкой зависимости  $u_{\max}(\omega)$ . Введем  $u_{\max}(\omega) = u_{\max}(\omega') e^{-\alpha(\omega - \omega')}$  и новые переменные,  $z = Ae^{-\alpha(\omega - \omega')}$ ,  $A = u_{\max}(\omega') \nu^n / \delta^n$ , получим

$$\Delta\omega = 2(\omega' - \omega_0) + \frac{4}{\alpha} \int_{-1/2}^{1/2} dt \int_0^B \frac{dz}{z} (1 - e^{-z}),$$

$$\text{здесь } B = \frac{A}{\cos\theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t - k|^n}.$$

Используя асимптотическое выражение интеграла по  $dz$ , находим

$$\Delta\omega = 2(\omega' - \omega_0) + \frac{2}{\alpha} \ln Ae^{C+1/2} + \frac{2}{\alpha} \int_{-1/2}^{1/2} dt \ln \sum_{k=-\infty}^{\infty} |t - k|^{-n} \equiv 2(\omega_1 - \omega_0),$$

где

$$\frac{\nu^n}{\delta^n} u_{\max}(\omega_1) = \exp \left[ -C - \frac{1}{2} - \int_{-1/2}^{1/2} dt \ln \sum_{k=-\infty}^{\infty} |t-k|^n \right].$$

**Задача 5.36.** Поверхность планеты поглощает коротковолновое излучение Солнца и преобразуют его в длинноволновое излучение, излучая как абсолютно черное тело. Атмосфера планеты свободно пропускает коротковолновое излучение. Выяснить влияние эффектов поглощения длинноволнового излучения на температуру поверхности планеты. Считать толщину атмосферы малой по сравнению с размерами планеты, а температуру атмосферы — равной температуре поверхности планеты.

Нас интересуют средние потоки излучения, так что будем считать, что излучение Солнца равномерно распределяется по поверхности планеты. Поверхность планеты перерабатывает солнечное излучение в длинноволновое излучение. Это излучение может быть поглощено атмосферой, которая далее испускает длинноволновое излучение, частично попадающее на поверхность планеты. В результате атмосфера увеличивает поток лучистой энергии, попадающей на поверхность планеты, и повышает ее температуру.

Так как размеры планеты велики по сравнению с толщиной атмосферы, то в данной постановке задачи все свойства атмосферы зависят от расстояния рассматриваемой точки до поверхности планеты. Введем на заданной высоте атмосферы поток длинноволновых фотонов  $j_{\omega}^{-}$  частоты  $\omega$ , движущихся по направлению к поверхности планеты, и поток длинноволновых фотонов  $j_{\omega}^{+}$ , движущихся в направлении от поверхности планеты. Пусть  $i_{\omega}$  — поток фотонов данной частоты, испускаемый поверхностью планеты. Тогда с учетом формулы (5.11) имеем для величины искомых потоков фотонов

$$j_{\omega}^{+}(x) = \int_0^1 d \cos \theta \int_0^u du_{\omega} \exp \left( -\frac{u-u_{\omega}}{\cos \theta} \right) j_{\omega}^{(0)} + i_{\omega} \int_0^1 d \cos \theta \exp \left( -\frac{u}{\cos \theta} \right),$$

$$j_{\omega}^{-}(x) = \int_0^1 d \cos \theta \int_0^u du_{\omega} \exp \left( -\frac{u_{\omega}}{\cos \theta} \right) j_{\omega}^{(0)}.$$

Здесь  $u_{\omega}(x) = \int_0^x k_{\omega} dx'$  — оптическая толщина слоя высотой  $x$ ;  $k_{\omega}$  — коэффициент поглощения фотона данной частоты;  $x$  — расстояние рассматриваемого слоя от поверхности планеты;  $u \equiv u_{\omega}(\infty) = \int_0^{\infty} k_{\omega} dx$  — полная оптическая толщина атмосферы для фотонов частоты  $\omega$ ,  $j_{\omega}^{(0)}(x)$  — поток фотонов с поверхности абсолютно черного тела,

температура которого равна температуре данного слоя атмосферы. Наряду с полученными соотношениями мы должны учесть тот факт, что полная энергия поглощенного поверхностью планеты коротковолнового излучения равна полной энергии длинноволнового излучения, уходящего за пределы атмосферы. Это дает

$$J_0 = \int \hbar\omega j_{\omega}^+(\infty) d\omega.$$

Полная энергия, испускаемая поверхностью планеты, равна

$$J_{\text{пов}} = J_0 + \int \hbar\omega j_{\omega}^-(0) d\omega.$$

Температура поверхности планеты, которая излучает, как абсолютно черное тело, согласно закону Стефана—Больцмана равна

$$T_{\text{пов}} = \left( \frac{J_{\text{пов}}}{\sigma} \right)^{1/4},$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана. В случае, если поверхность планеты свободно пропускает длинноволновое излучение, т. е.  $u \ll 1$ , то  $j_{\omega}^- \ll j_{\omega}^{(0)}$ . В этом случае по определению  $j_{\omega}^{(0)}$  имеем  $i_{\omega} = j_{\omega}^{(0)}$ , так что  $j_{\omega}^- \ll i_{\omega}$ . Отсюда  $J_{\text{пов}} = J_0$ , и температура поверхности планеты равна

$$T_{\text{пов}} = (J_0/\sigma)^{1/4}.$$

В другом предельном случае, когда оптическая толщина атмосферы  $u \gg 1$ , имеем  $j_{\omega}^+(\infty) = j_{\omega}^-(0) = j_{\omega}^{(0)}$ . Если это соотношение выполняется для всех частот, то  $J_0 = \int \hbar\omega j_{\omega}^{(0)} d\omega$  и  $J_{\text{пов}} = J_0 + \int \hbar\omega j_{\omega}^{(0)} d\omega = 2J_0$ . Отсюда находим температуру поверхности планеты

$$T_{\text{пов}} = (2J_0/\sigma)^{1/4}.$$

Таким образом, в случае, когда атмосфера планеты поглощает выходящее с ее поверхности излучение, температура планеты в  $2^{1/4}$  (или на 19%) больше, чем при отсутствии атмосферы. Атмосфера является своеобразным экраном, который возвращает часть излучения обратно на поверхность планеты и тем самым повышает температуру поверхности. Этот результат легко понять из приведенной на рис. 5.5 диаграммы, на которой представлен тепловой баланс планеты. Из баланса лучистой энергии, поглощаемой и испускаемой планетой (поверхностью и атмосферой в целом), получаем, что  $1/2 J_{\text{атм}} = J_0 + I_0$ , а из баланса энергии, поглощаемой и излучаемой атмосферой планеты, находим:  $J_{\text{атм}} = I_0 + J_{\text{пов}}$ . Исключая отсюда  $J_{\text{атм}}$ , для потока энергии, испускаемой поверхностью планеты, получаем

$$J_{\text{пов}} = 2J_0 + I_0.$$

В частности, если атмосфера планеты полностью пропускает коротковолновое излучение ( $I_0 = 0$ ), имеем  $J_{\text{пов}} = 2J_0$ , т. е. поверх-

ность планеты испускает вдвое больший поток энергии, чем получает от Солнца и чем испускает при отсутствии атмосферы. Отметим, что в реальных случаях температура поверхности планеты заметно больше температуры тех слоев атмосферы, из

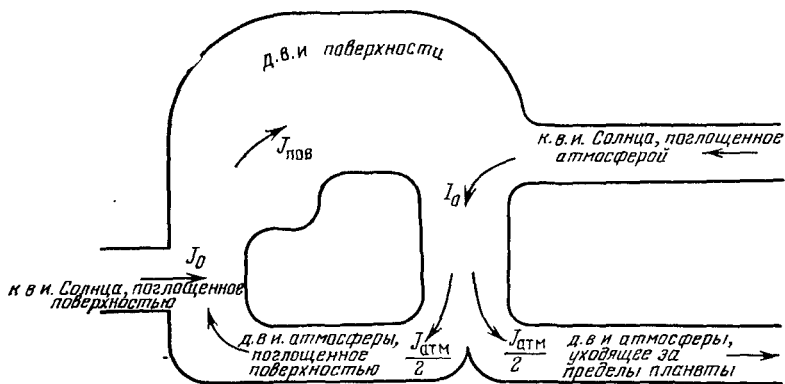


Рис. 5.5. Тепловой баланс планеты; к.в.и.— коротковолновое излучение, д.в.и.— длинноволновое излучение.

которых длинноволновое излучение уходит за пределы планеты. Поэтому поток энергии длинноволнового излучения, попадающего на поверхность Земли, может значительно превышать поглощаемый поверхностью Земли поток солнечного излучения.

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГАЗОВОГО РАЗРЯДА

Исследованные ранее процессы определяют параметры системы, содержащей слабоионизованный газ. В качестве примера такого типа в данной главе рассмотрены свойства газового разряда. При этом представленные далее задачи не претендуют на полноту и не дают физической картины явлений и свойств газового разряда. Их цель — продемонстрировать возможности использования информации об отдельных процессах в плазме при исследовании свойств сложной системы.

### § 1. Положительный столб разряда в диффузионном режиме

Положительный столб газового разряда является наиболее типичным примером слабоионизованной плазмы. Плотность электронов в положительном столбе тлеющего разряда и электрической дуги находится в пределах  $10^8$ — $10^{14}$  см<sup>-3</sup>, и так как средняя энергия электронов порядка электрон-вольта, то радиус Дебая—Гюккеля (2.7) для плазмы положительного столба разряда  $r_D = \sqrt{T/8\pi Ne^2}$  находится в пределах ( $10^{-5}$ — $10^{-2}$ ) см. Как следует из приведенной оценки, в обычных лабораторных условиях радиус Дебая—Гюккеля меньше поперечных размеров трубки, так что плазма положительного столба разряда квазинейтральна.

Поскольку положительный столб газового разряда содержит слабоионизованную плазму, то в ней происходят рассмотренные в предыдущих главах процессы. Исследование положительного столба разряда представляет физический интерес. С другой стороны, поскольку газовый разряд широко используется в прикладных целях, то изучение свойств положительного столба разряда имеет и практическое значение.

Считается, что положительный столб разряда находится в диффузионном режиме, если длина свободного пробега электронов мала по сравнению с поперечными размерами разрядной трубки. Следовательно уход заряженных частиц на стенки определяется амбиполярной диффузией. Кроме того, плотность газа в разряде этого типа не очень велика. Поэтому температура электронов значительно отличается от температуры газа.

**Задача 6.1.** Определить распределение заряженных частиц по сечению цилиндрической разрядной трубки, если образование заряженных частиц в положительном столбе определяется прямой ионизацией, а уничтожение заряженных частиц обусловлено их уходом на стенки.



Уравнение баланса для плотности электронов  $N_e$  при рассматриваемых условиях задачи имеет вид

$$\mathcal{D}_a \Delta N_e + k_{\text{ион}} N_a N_e = 0,$$

где  $\mathcal{D}_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии,  $k_{\text{ион}}$  — константа скорости ионизации атомов в основном состоянии,  $N_a$  — их плотность. Используя цилиндрическую симметрию задачи, приведем уравнение баланса к виду

$$\mathcal{D}_a \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dN_e}{d\rho} + k_{\text{ион}} N_a N_e = 0, \quad (6.1)$$

( $\rho$  — расстояние электрона от оси разрядной трубки). Решая это уравнение при граничном условии  $N_e(r_0) = 0$  ( $r_0$  — радиус трубки), находим

$$N_e = N_0 J_0(2,405\rho/r_0), \quad (6.2)$$

где  $N_0$  — плотность электронов на оси трубки,  $J_0(x)$  — функция Бесселя. При этом, как вытекает из уравнения баланса, параметры плазмы и размер трубки связывает следующее условие:

$$N_a k_{\text{ион}} r_0^2 / \mathcal{D}_a = 5,78. \quad (6.3)$$

Это ее условие дает уравнение для напряженности продольного электрического поля в области положительного столба, ибо частота ионизации определяется величиной напряженности поля. Согласно формуле (6.3) частота образования заряженной частицы равна частоте ухода ее на стенки разрядной трубки.

Отметим, что в области внутри трубки в формуле (6.2) удобно использовать разложение функции Бесселя при малых значениях аргумента:

$$J_0(2,405x) = 1 - 1,446x^2 + 0,523x^4 - 0,084x^6 + 0,008x^8,$$

где  $x = \rho/r_0$ . С этим выражением проще проводить аналитические операции. Более простое и более грубое по сравнению с формулой (6.2) выражение для плотности электронов, которое удовлетворяет граничным условиям, имеет вид

$$N_e = N_0 (1 - x^n).$$

При  $n = 1,52$  интеграл  $\int_0^1 N_e x dx$ , взятый с этой функцией, совпадает с величиной интеграла, если в качестве  $N_e(x)$  подставить точное выражение (6.2). Кроме того,

$$\frac{\int_0^1 [1 - x^{1,52} - J_0(2,405x)]^2 2x dx}{\left[ \int_0^1 J_0(2,405x) 2x dx \right]^2} = 2,7 \cdot 10^{-3},$$

т. е. приближенная функция близка к точной. Однако производная  $dN_e/dx$  на стенке ( $x=1$ ) для приближенной функции оказывается в 1,22 раза больше, чем для точной функции (6.2).

**Задача 6.2.** Определить распределение заряженных частиц по сечению цилиндрической разрядной трубки, если заряженные частицы образуются в малой области вблизи оси разрядной трубки ( $k_{\text{ион}} = k_0$ ,  $\rho \leq \rho_0$ ;  $k_{\text{ион}} = 0$ ,  $\rho > \rho_0$ ;  $\rho_0 \ll r_0$ ).

Такого типа распределение частоты ионизации по сечению трубки может возникнуть из-за разных температур газа на разных расстояниях от оси трубки. При не очень малых значениях разрядного тока газ в разрядной трубке нагревается в результате столкновения его молекул с заряженными частицами. Тепловой поток уходит на стенки трубки, так что температура газа в центре трубки выше, чем у стенок. Поскольку давление газа в каждой точке пространства постоянно, то плотность молекул у оси трубки ниже, чем у стенок. Поэтому столкновение заряженных частиц с молекулами газа у оси трубки происходит реже, чем у стенок, а средняя энергия электронов, находящихся у оси, выше, чем у стенок разрядной трубки. Поскольку ионизация молекул газа определяется быстрыми электронами, находящимися на хвосте функции распределения, то даже малый градиент температуры газа может привести к большой разнице между частотами ионизации у оси трубки и у стенок.

Решая уравнение баланса (6.1) для плотности электронов при условиях данной задачи, получим

$$N_e = \begin{cases} N_0 \left( 1 - \frac{k_{\text{ион}} N_a}{4\mathcal{D}_a} \rho^2 \right), & \rho \leq \rho_0, \\ N_1 \ln \frac{r_0}{\rho}, & \rho_0 \leq \rho \leq r_0. \end{cases}$$

В полученном решении мы использовали граничное условие  $N_e(r_0) = 0$ . Сошьем представленные выражения для плотности электронов в точке  $\rho = \rho_0$ , требуя в этой точке непрерывности плотности электронов и его производной (т. е. потока). Это дает

$$N_1 = N_0 \left( 1 - \frac{k_{\text{ион}} N_a}{4\mathcal{D}_a} \rho_0^2 \right),$$

$$\frac{2\mathcal{D}_a}{k_{\text{ион}} N_a \rho_0^2} = \frac{1}{2} + \ln \frac{r_0}{\rho_0}.$$

Последнее условие по своему физическому смыслу эквивалентно условию (6.3). Оно устанавливает соотношение между частотой образования заряженных частиц и частотой их ухода из объема, где они создаются. Отметим, что в это условие входит именно размер области, в которой образуются электроны, а не той, которую они занимают. При  $\rho_0 = r_0$  это условие переходит в (6.3) с заменой величины 5,78 в правой части этого соотношения на 4.

Такое расхождение связано с использованным предположением, которое нарушается в данном случае: размер занимаемой электронами области мал по сравнению с размером разрядной трубки

Для определения степени сжатия разряда введем величину

$$x = \frac{1}{N_e(0) \pi r_0^2} \int_0^{r_0} N_e 2\pi r dr.$$

Эта величина определяет, какую часть разрядной трубки занимают электроны. В случае, когда распределение электронов по сечению дается зависимостью (6.2), эта величина равна  $x = 0,44$ . Для полученного распределения она составляет

$$x = (1 - 0,5y)/(1 - \ln y), \quad y = \rho_0^2/r_0^2.$$

В частности, при  $y = 1$  величина  $x = 0,5$ . Значения этой функции даны ниже

$y$	0,001	0,003	0,01	0,03	0,1	0,3	1
$x$	0,126	0,147	0,178	0,218	0,288	0,386	0,5

Как видно в рассматриваемом примере, область, занимаемая заряженными частицами, значительно шире области, в которой они образуются. В данном примере уменьшение области образования электронов на три порядка изменило размер области, в которой они находятся, в четыре раза. Поэтому сжатие области, в которой образуются электроны, еще не вызывает сжатия разряда.

**Задача 6.3.** Метастабильные атомы равномерно образуются по сечению разрядной трубки, а гибнут только на стенках, причем длина пробега метастабильных атомов значительно меньше радиуса разрядной трубки. Считая, что вероятность гибели метастабильных атомов на стенках  $\gamma \sim 1$ , определить отношение плотности метастабильных атомов у стенок к их плотности в центре разрядной трубки.

Для нахождения распределения метастабильных атомов по сечению разрядной трубки необходимо решить уравнение баланса для плотности метастабильных атомов, которое имеет вид (6.1):

$$\mathcal{D} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dN}{d\rho} \right) + \nu N = 0.$$

Здесь  $N$  — плотность метастабильных атомов,  $\rho$  — расстояние от центра разрядной трубки,  $\mathcal{D}$  — коэффициент диффузии метастабильных атомов в газе,  $\nu$  — частота образования метастабильных атомов в объеме. Решение этого уравнения с учетом, что на оси трубки плотность метастабильных атомов конечна, дает

$$N = N_0 J_0(\sqrt{\nu/\mathcal{D}} \rho),$$

где  $N_0$  — плотность метастабильных атомов на оси трубки

В рассматриваемом линейном приближении частота образования метастабильных атомов  $\nu$  связана с другими параметрами задачи, причем эта связь вытекает из граничных условий. Действительно, число образуемых в объеме метастабильных атомов равно числу метастабильных атомов, гибнущих на стенках. Далее найдем граничные условия, а из них — связь между параметрами задачи.

Поток метастабильных атомов на стенки равен  $j = -\mathcal{D} \frac{dN}{d\rho} \Big|_{\rho_0}$ . С другой стороны, поток атомов на стенки из пристеночной области равен  $1/4 N(\rho_0) \bar{\nu}$ , где  $\bar{\nu}$  — средняя тепловая скорость метастабильных атомов. Вводя  $\gamma$  — вероятность гибели метастабильного атома при соударении со стенкой и приравнивая потоки метастабильных атомов, разрушающихся на стенках, получим граничное условие

$$-\mathcal{D} \frac{dN}{d\rho} \Big|_{\rho_0} = \gamma \frac{N(\rho_0) \bar{\nu}}{4},$$

которое дает связь между параметрами задачи.

Подставляя в это граничное условие выражение для плотности метастабильных атомов, перепишем его в виде

$$\frac{J_1 (V \sqrt{\nu \mathcal{D}} \rho_0)}{J_0 (V \sqrt{\nu \mathcal{D}} \rho_0)} = \frac{\gamma \bar{\nu}}{4 V \sqrt{\nu \mathcal{D}}}. \quad (6.4)$$

При заданных условиях задачи правая часть этого соотношения много больше единицы. Отсюда получаем в нулевом приближении  $J_0 (V \sqrt{\nu \mathcal{D}} \rho_0) \approx 0$ , что приводит нас к соотношению (6.3):

$$V \sqrt{\nu \mathcal{D}} \rho_0 = 2,405.$$

Действительно, при этих условиях правая часть соотношения (6.4) составляет по порядку величины

$$\frac{\gamma \bar{\nu}}{V \sqrt{\nu \mathcal{D}}} \sim \frac{\gamma \bar{\nu} \rho_0}{\mathcal{D}} \sim \gamma \frac{\rho_0}{\lambda} \gg 1,$$

причем было использовано, что  $\gamma \sim 1$ ,  $\mathcal{D} \sim \bar{\nu} \lambda$ , где  $\lambda$  — длина свободного пробега метастабильных атомов в газе.

Рассмотрим следующее приближение при разложении (6.4) по малому параметру. Представим связь между параметрами задачи:

$$V \sqrt{\nu \mathcal{D}} \rho_0 = 2,405 - \delta,$$

где  $\delta \ll 1$ . Подставляя это в соотношение (6.4), получим

$$\delta = \frac{4 V \sqrt{\nu \mathcal{D}}}{\gamma \bar{\nu}} = \frac{9,62 \mathcal{D}}{\gamma \bar{\nu} \rho_0}.$$

При этом плотность метастабильных атомов на стенках разрядной трубки равна

$$N(\rho_0) = N_0 J_0 (V \sqrt{\nu \mathcal{D}} \rho_0) = N_0 \delta J_1(2,405) = 0,519 N_0 \delta = N_0 \frac{4,99 \mathcal{D}}{\gamma \bar{\nu} \rho_0}.$$

Таким образом, плотность метастабильных атомов на стенках разрядной трубки составляет  $\frac{4,99\mathcal{D}}{\gamma^2\rho_0}$  часть от их плотности на оси разрядной трубки.

**Задача 6.4.** Разряд поддерживается между двумя плоскими бесконечными пластинами. Определить распределение электронов между ними и найти условие, накладываемое на напряженность электрического поля в положительном столбе, если вероятность рекомбинации заряженных частиц на стенках  $\gamma$  отлична от единицы. Считать, что частота ионизации атомов не меняется по сечению разряда.

Данная задача позволяет проследить на простой геометрии, как условие на стенках влияет на характер распределения заряженных частиц внутри разрядной трубки. Решим уравнения баланса для плотности электронов, которое в полной аналогии с (6.1) имеет вид

$$\mathcal{D}_a \frac{d^2 N_e}{dx^2} + k_{\text{ион}} N_e N_a = 0.$$

Здесь  $x$  — расстояние от плоскости симметрии, т. е. плоскости, которая параллельна стенкам и находится от них на равных расстояниях. Координаты стенок  $x = \pm l/2$ , где  $l$  — расстояние между стенками.

Решение представленного уравнения с учетом симметрии задачи ( $N_e(x) = N_e(-x)$ ) имеет вид

$$N_e = N_0 \cos \sqrt{k_{\text{ион}} N_a / \mathcal{D}_a} x,$$

где  $N_0$  — плотность электронов на плоскости симметрии. Наша задача — найти условие, накладываемое на аргумент в полученном выражении. В предельном случае, когда вероятность рекомбинации заряженных частиц на стенках равна единице, граничное условие  $N_e(l/2) = 0$  дает

$$\sqrt{\frac{k_{\text{ион}} N_a}{\mathcal{D}_a}} \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

По своему физическому смыслу это соотношение эквивалентно (6.3) и устанавливает связь между частотой образования заряженной частицы в объеме и частотой ухода ее на стенки. Получим подобное соотношение в общем случае.

Поток рекомбинирующих на стенках заряженных частиц равен  $\frac{1}{4} N_e \bar{v} \gamma$ . Здесь  $\bar{v}$  — средняя скорость ионов в пристеночном слое. Этот слой находится на расстоянии порядка длины свободного пробега от стенки, причем длина свободного пробега ионов предполагается значительно большей ширины ленгмюровского слоя, где происходит разделение заряда. С другой стороны, поскольку

ионизация в пристеночном слое несущественна, поток рекомбинирующих на стенках электронов равен  $-\mathcal{D} \frac{dN}{dx} (l/2)$ . Отсюда получаем граничное условие на стенках:

$$\frac{1}{4} N_e \bar{v} \gamma = -\mathcal{D}_a \frac{dN_e}{dx}.$$

Это дает с использованием ранее полученного выражения для плотности электронов:

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\frac{k_{\text{ион}} N_a}{\mathcal{D}_a} \frac{l}{2}} = \frac{4 \sqrt{k_{\text{ион}} N_a \mathcal{D}_a}}{\bar{v} \gamma}$$

Оценим величину правой части. Имеем  $\mathcal{D}_a \sim \bar{v}^2 / \nu_{\text{упр}}$ , где  $\nu_{\text{упр}}$  — частота столкновения иона с атомами газа. Отсюда получаем, что правая часть данного соотношения составляет по порядку величины  $(1/\gamma) \sqrt{\nu_{\text{ион}} / \nu_{\text{упр}}}$ , где  $\nu_{\text{ион}} = k_{\text{ион}} N_a$  — частота ионизации атомов газа электроном. Поскольку  $\nu_{\text{ион}} \ll \nu_{\text{упр}}$ , то при  $\gamma \sim 1$  правая часть представленного соотношения мала по сравнению с единицей. Считая ее малой величиной, получим

$$\sqrt{\frac{k_{\text{ион}} N_a}{\mathcal{D}_a} \frac{l}{2}} = \frac{\pi}{2} \frac{4 \sqrt{k_{\text{ион}} N_a \mathcal{D}_a}}{\bar{v} \gamma}.$$

Отсюда находим

$$\sqrt{\frac{k_{\text{ион}} N_a}{\mathcal{D}_a} \frac{l}{2}} = \frac{\pi/2}{1 + 8 \mathcal{D}_a / \bar{v} l \gamma}.$$

Оценим величину второго слагаемого в знаменателе правой части. Имеем  $\mathcal{D}_a \sim \bar{v} \lambda$ , где  $\lambda$  — длина свободного пробега ионов. Отсюда находим, что искомая величина порядка  $\lambda/l\gamma$ . Это означает, что при условии

$$\gamma \gg \lambda/l$$

граничное условие — такое же, как и в случае, когда плотность электронов на стенке считается равной нулю. Тем самым при выполнении последнего критерия распределение электронов внутри разрядной трубки и условие, связывающее частоту образования заряженных частиц с частотой их ухода на стенки, не зависят от вероятности рекомбинации заряженных частиц на стенках.

**Задача 6.5.** Определить среднее время нахождения заряженной частицы в цилиндрической разрядной трубке.

Гибель заряженных частиц происходит в результате их рекомбинации на стенках разрядной трубки, так что время нахождения их в разряде определяется временем ухода на стенки разрядной трубки и по порядку величины составляет  $\tau \sim r_0^2 / \mathcal{D}_a$ , где  $r_0$  — радиус трубки,  $\mathcal{D}_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии заряжен-

ных частиц. Для более точного определения этой величины воспользуемся законом распределения для плотности заряженных частиц по радиусу трубки:

$$N_e = N_0 J_0(2,4\rho/r_0),$$

где  $N_0$  — плотность заряженных частиц в центре трубки,  $\rho$  — расстояние от данной точки до центра. Отсюда находим поток заряженных частиц на стенки разрядной трубки:

$$j = -\mathcal{D}_a \frac{dN_e}{d\rho} \Big|_{r_0} = -\frac{2,4 \mathcal{D}_a N_0}{r_0} \frac{dJ_0}{dx} \Big|_{x=2,4} = \frac{1,25 \mathcal{D}_a N_0}{r_0}.$$

Полное число заряженных частиц в элементе разрядной трубки длиной  $dl$  равно

$$dl \int_0^{r_0} 2\pi\rho d\rho N_e(\rho) = 2\pi r_0^2 dl N_0 \int_0^1 x dx J_0(2,4x) = \frac{2\pi r_0^2 dl N_0 J_1(2,4)}{2,4}.$$

Число заряженных частиц, уходящих в единицу времени на стенки в этом элементе разрядной трубки, составляет  $2\pi r_0 dl j$ . Отсюда находим среднее время нахождения заряженной частицы внутри разрядной трубки  $\tau$  как отношение этих величин:

$$\tau = \frac{\int_0^{r_0} 2\pi\rho d\rho N_e dl}{2\pi r_0 dl j} = \frac{0,173 r_0^2}{\mathcal{D}_a}.$$

Как видно, зависимость искомой величины от параметров задачи — такая же, как и в первоначально проведенной оценке. Прделанные операции позволили определить численный коэффициент в этом выражении. Этот численный коэффициент — такой же, что и в формуле (6.3), которая устанавливает равенство между временем образования  $(k_{\text{ион}} N_a)^{-1}$  и временем гибели  $\tau$  для отдельной заряженной частицы.

**Задача 6.6.** Оценить область, занимаемую заряженными частицами в случае, когда ионизация происходит в узкой области вблизи оси трубки, а уничтожение заряженных частиц обусловлено их объемной рекомбинацией.

Как следует из результатов предыдущей задачи, ионизация в узкой области не приводит к сжатию разряда, если заряженные частицы погибают на стенках. При наличии объемной рекомбинации ситуация изменяется.

Оценим ширину области, занимаемой заряженными частицами, считая, что она шире области, в которой заряженные частицы образуются. Рекомбинация данной заряженной частицы с частицей противоположного заряда происходит за время порядка  $\tau \sim 1/\alpha N_e$ , где  $\alpha$  — коэффициент рекомбинации заряженных частиц. За это

время заряженная частица удалится от оси трубки на расстояние  $r \sim \sqrt{\mathcal{D}_a \tau} \sim \sqrt{\mathcal{D}_a / \alpha N_e}$ . Если эта величина значительно меньше радиуса трубки, она и характеризует ширину области, занимаемой разрядом.

Проведем численную оценку этой величины при условиях, отвечающих реальному случаю. Примем давление газа порядка 1 Тор, так что коэффициент амбиполярной диффузии  $\mathcal{D}_a \sim 10^3$  см<sup>2</sup>/с, коэффициент двухчастичной рекомбинации  $\alpha \sim 10^{-7}$  см<sup>3</sup>/с и плотность электронов  $N_e \sim 10^{12}$  см<sup>-3</sup>. Для ширины области горения разряда получим  $r \sim 0,1$  см, т. е. в лабораторных условиях в этом случае присходит контракция (сжатие) положительного столба разряда.

**Задача 6.7.** Определить распределение электронов по сечению в положительном столбе цилиндрической разрядной трубки после прекращения разряда.

Уравнение баланса для плотности электронов  $N_e$  имеет вид

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = \mathcal{D}_a \Delta N_e + \nu_{\text{ион}} N_e,$$

причем частота ионизации  $\nu_{\text{ион}}$  определяется видом функции распределения электронов по скоростям. Пусть  $\nu_{\text{эн}}$  — частота изменения энергии электрона, т. е.  $1/\nu_{\text{эн}}$  — характерное время, за которое из-за столкновений с атомами заметно изменяется энергия электрона. Если, например, потери энергии электрона определяются упругими соударениями электрона с атомами, то  $\nu_{\text{эн}} \sim m\nu_y/M$ , где  $\nu_y$  — частота упругих соударений электрона с атомом,  $m$  — масса электрона,  $M$  — масса атома. Мы рассмотрим два предельных случая:  $\nu_{\text{эн}} \tau \ll 1$  и  $\nu_{\text{эн}} \tau \gg 1$ , где  $\tau \sim r_0^2/\mathcal{D}_a$  — характерное время, за которое электрон попадает на стенки ( $r_0$  — радиус разрядной трубки).

В случае  $\nu_{\text{эн}} \tau \gg 1$  средняя энергия электрона изменяется быстро по сравнению с изменением плотности, т. е. за малые времена  $\nu_{\text{ион}}$  практически падает до нуля, и уравнение баланса принимает вид

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = \mathcal{D}_a \Delta N_e.$$

Решение этого уравнения:

$$N_e = N_0 e^{-t/\tau J_0} \left( 2,4 \frac{\rho}{r_0} \right), \quad \text{где } \tau = \frac{r_0^2}{5,76 \mathcal{D}_a}.$$

В случае  $\nu_{\text{эн}} \tau \ll 1$  решение уравнения будет иметь тот же вид, но

$$\tau(t) = \frac{r_0^2}{5,76 \mathcal{D}_a} - \frac{1}{\nu(t)}.$$



**Задача 6.8.** Определить разность потенциалов между осью и стенками разрядной трубки в положительном столбе газового разряда. Радиус трубки  $r_0$  значительно превышает длину свободного пробега электронов  $\lambda$ , плотность электронов достаточно велика, так что функция распределения электронов по скоростям максвелловская; температура электронов  $T_e$ .

Газоразрядная плазма в положительном столбе квазинейтральна, так что токи ионов и электронов в радиальном направлении совпадают. Ток электронов равен

$$j_e = -\mathcal{D}_e \nabla N_e + \omega N_e,$$

где  $N_e$  — плотность электронов,  $\mathcal{D}_e$  — коэффициент диффузии электронов,  $\omega$  — дрейфовая скорость электронов в радиальном направлении в данной точке пространства.

Поскольку ток электронов равен току ионов, то в масштабах электронных величин из-за различия масс электронов и ионов ток электронов равен нулю, т. е. плотность электронов удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{D}_e \nabla N_e = \omega N_e.$$

Его решение:

$$N_e = N_0 \exp\left(-\int_0^{\rho} \frac{\omega}{\mathcal{D}_e} d\rho'\right),$$

здесь  $N_0$  — плотность электронов на оси трубки,  $\rho$  — расстояние от рассматриваемой точки до оси разрядной трубки.

Будем считать, что дрейфовая скорость электронов  $\omega$  мала по сравнению с их тепловой скоростью. Тогда  $\omega = KE$ , где  $E$  — напряженность самосогласованного электрического поля электронов и ионов,  $K$  — подвижность электронов, причем, согласно соотношению Эйнштейна,  $K = e\mathcal{D}_e/T_e$ . Используя эти соотношения и связь между напряженностью поля и его потенциалом  $E = -\nabla U(\rho)$ , получим выражение для плотности электронов

$$N_e = N_0 \exp(eU/T_e),$$

где  $U$  — потенциал поля в рассматриваемой точке пространства, причем на оси трубки потенциал равен нулю ( $U(\rho) \leq 0$ ).

Таким образом, мы получили, что распределение электронов и ионов по сечению разрядной трубки при рассматриваемых условиях удовлетворяет закону Больцмана. Полученное распределение следует сравнить с найденным ранее распределением (6.2), выведенным в предположении, что частота ионизации не зависит от сечения разрядной трубки. Это позволяет определить потенциал в заданной точке пространства:

$$eU = T_e \ln J_0(2,4\rho/r_0).$$

Покажем справедливость использованного нами условия о малости дрейфовой скорости электронов по сравнению с их тепловой скоростью. Это выполняется, если набираемая электроном энергия на длине свободного пробега  $eE\lambda$  мала по сравнению с его тепловой энергией  $T_e$ . Оценим величину параметра  $eE\lambda/T_e$ . Имеем

$$\frac{eE}{T_e} = \frac{e|\nabla U|}{T_e} = \frac{|\nabla N_e|}{N_e} \sim \frac{1}{r_0},$$

если электрон находится не очень близко к стенке, так что  $eE\lambda/T_e \sim \lambda/r_0 \ll 1$ , т. е. использованное условие выполняется.

Выражения для тока электронов и полученные соотношения для плотности электронов справедливы, если расстояние от рассматриваемой точки пространства до стенки разрядной трубки значительно превышает длину свободного пробега электронов. Учитывая это, находим, что разность потенциалов между стенками и осью разрядной трубки согласно предыдущей формуле равна

$$eU = -T_e \ln(r_0/\lambda).$$

Эта формула справедлива с точностью до постоянного множителя порядка единицы под логарифмом и характеризует собой энергию, которую теряет электрон или приобретает ион при движении от оси трубки к стенкам.

**Задача 6.9.** Выяснить, при какой степени ионизации газоразрядной плазмы в положительном столбе разряда уход возбужденных атомов на стенки не влияет на величину коэффициента ступенчатой ионизации атомов. Температура электронов  $T_e$  велика по сравнению с температурой газа  $T$ , но мала по сравнению с потенциалом возбуждения атома; плотность электронов достаточно велика, так что излучением возбужденных атомов можно пренебречь.

Ступенчатый механизм ионизации атомов осуществляется при выполнении условия (4.40). Однако уход возбужденных атомов на стенки разрядной трубки не влияет на величину коэффициента ступенчатой ионизации при выполнении более жесткого условия, а именно, если возбужденные атомы ионизируются скорее, чем уходят на стенки. Запишем это условие:

$$k_{\text{ион}}^* N_e \gg \frac{1}{4} \mathcal{D}_B / r_0^2.$$

Здесь  $k_{\text{ион}}^*$  — константа скорости ступенчатой ионизации возбужденных атомов, определяемая формулой (4.43),  $N_e$  — плотность электронов,  $\mathcal{D}_B$  — коэффициент диффузии возбужденных атомов в собственном газе,  $r_0$  — радиус разрядной трубки, т. е.  $\mathcal{D}_B / r_0^2$  — частота ухода возбужденных атомов на стенки.

Используем связь между параметрами плазмы положительного столба разрядной трубки. Частота образования свободных элект-

ронов равна частоте ухода их на стенки трубки, так что

$$k_{\text{ион}} N_a \sim \mathcal{D}_a / r_0^2.$$

Здесь  $N_a$  — плотность атомов в основном состоянии,  $k_{\text{ион}}$  — константа скорости ступенчатой ионизации атомов в основном состоянии,  $\mathcal{D}_a / r_0^2$  — частота ухода электронов на стенки. Коэффициент амби-полярной диффузии равен  $\mathcal{D}_a = \frac{T_e}{T} \mathcal{D}_i$ , где  $\mathcal{D}_i$  — коэффициент диффузии ионов,  $T_e$  — температура электронов,  $T$  — температура ионов, которую мы считаем равной температуре газа.

Коэффициенты диффузии  $\mathcal{D}_в$  атомов, находящихся в низших возбужденных состояниях, и коэффициент диффузии ионов  $\mathcal{D}_i$  одного порядка, ибо величинами одного порядка являются сечения рассеяния этих частиц на собственных атомах. На основе этого с помощью полученных выше соотношений находим

$$\frac{N_e}{N_a} \gg \frac{T}{T_e} \frac{k_{\text{ион}}}{k_{\text{ион}}^*}.$$

Поскольку ступенчатый механизм ионизации проходит через возбуждение атомов в нижнем состоянии, то  $N_a k_{\text{ион}} = N_в k_{\text{ион}}^*$ , где  $N_в$  — плотность атомов в нижнем возбужденном состоянии. Это дает

$$N_e \gg \frac{T}{T_e} N_в,$$

т. е. для осуществления ступенчатого механизма образования свободных электронов необходимо, чтобы плотность электронов превышала плотность возбужденных атомов. В этом случае уход возбужденных атомов на стенки не отражается на величине константы ступенчатой ионизации. Считая, что распределение атомов по нижним возбужденным состояниям определяется законом Больцмана, представим это соотношение в виде

$$\frac{N_e}{N_a} \gg \frac{T}{T_e} \frac{g_в}{g_0} \exp\left(-\frac{\Delta E}{T_e}\right),$$

где  $\Delta E$  — энергия возбуждения атомов,  $g_в$  — статистический вес атома в нижнем возбужденном состоянии. Это условие можно вывести непосредственно из первого условия для степени ионизации плазмы, если константы ионизации атомов в основном и возбужденном состояниях определить на основе формулы (4.43).

**Задача 6.10.** Установить закон распределения заряженных частиц по сечению в положительном столбе газового разряда, создаваемого в цилиндрической трубке. Ионизация носит ступенчатый характер и происходит в основном через возбуждение резонансного состояния атома, которое разрушается в результате излучения.

Уравнения баланса для плотности электронов  $N_e$  и плотности возбужденных атомов  $N_B$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dN_e}{dt} = 0 &= \mathcal{D}_a \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dN_e}{d\rho} + k_{\text{ион}} N_e N_B = 0, \\ \frac{dN_B}{dt} = 0 &= N_e N_0 k_B - \frac{N_B}{\tau}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где  $\rho$  — расстояние от оси разрядной трубки,  $\mathcal{D}_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии,  $k_{\text{ион}}$  — константа ионизации возбужденного атома,  $k_B$  — константа возбуждения атома из основного в резонансно-возбужденное состояние,  $N_0$  — плотность газа,  $1/\tau$  — вероятность излучения возбужденного атома в единицу времени. Эту систему уравнений следует решить совместно с граничными условиями ( $r_p$  — радиус трубки):

$$N_e(r_0) = N_B(r_0) = 0, \quad \left. \frac{dN_e}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \left. \frac{dN_B}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0.$$

Для решения данной системы уравнений используем следующий приближенный метод. Ищем плотность электронов и возбужденных атомов в виде

$$N_e = C_1 (e^{-\delta\rho^2} - e^{-\delta r_0^2}), \quad N_B = C_2 (e^{-\gamma\rho^2} - e^{-\gamma r_0^2}).$$

Величины четырех параметров  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  найдем, используя уравнения баланса для плотности электронов и возбужденных атомов при  $\rho=0$ , а также проинтегрированные по  $\rho d\rho$  уравнения баланса по сечению трубки.

В целях проверки метода, решим с его помощью уравнение (6.1). В этом случае решение дается формулой (6.2), а связь между параметрами уравнения — соотношением (6.3). На основе используемого метода получим  $\delta r_0^2 = 0,842$  и вместо соотношения (6.3):

$$\frac{\nu r_0^2}{\mathcal{D}_a} = \frac{4\delta r_0^2}{1 - e^{-\delta r_0^2}} = 5,9.$$

Чтобы выяснить степень совпадения полученного решения для функции распределения электронов по сечению трубки и зависимости (6.2), вычислим интеграл

$$I = \int_0^{r_0} \left[ C_1 (e^{-\delta\rho^2} - e^{-\delta r_0^2}) - J_0 \left( 2,405 \frac{\rho}{r_0} \right) \right]^2 \rho d\rho,$$

причем

$$C_1 \int_0^{r_0} (e^{-\delta\rho^2} - e^{-\delta r_0^2}) \rho d\rho = \int_0^{r_0} J_0 \left( 2,405 \frac{\rho}{r_0} \right) \rho d\rho.$$

Имеем:  $I = 2,26 \cdot 10^{-7}$ , т. е. полученное решение практически совпадает с формулой (6.2).

При решении уравнений баланса (6.5) в рассматриваемом случае получаем  $N_n = N_e N_0 k_n \tau$ , т. е.  $\gamma = \delta$ . Кроме того,  $\delta r_0^2 = 1,5$ , так что условие, связывающее параметры разрядной плазмы, принимает вид

$$\frac{N_e(0) k_{\text{ион}} N_0 k_n \tau r_0^2}{\mathcal{D}_a} = \frac{4\delta r_0^2}{1 - e^{-\delta r_0^2}} = 7,73. \quad (6.6)$$

Это условие, как и условие (6.2), дает уравнение для напряженности электрического поля в разряде. Так как плотность возбужденных атомов  $N_n \sim N_e N_0 k_n \tau$ , то, согласно этому условию, как и условию (6.2), частота образования заряженных частиц  $\sim N_n k_{\text{ион}}$  равна частоте ухода их на стенки разрядной трубки  $\sim \mathcal{D}_a / r_0^2$ .

**Задача 6.11.** Условие то же, что и в предыдущей задаче, но ступенчатая ионизация происходит через возбуждение метастабильного состояния, причем метастабильные атомы разрушаются в результате ухода на стенки разрядной трубки.

Уравнения баланса для плотности электронов  $N_e$  и метастабильных атомов  $N_m$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dN_e}{d\rho} + k_{\text{ион}} N_m N_e &= 0, \\ \mathcal{D}_m \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dN_m}{d\rho} + k_n N_0 N_e &= 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

причем

$$N_e(r_0) = N_m(r_0) = 0, \quad \left. \frac{dN_e}{d\rho} \right|_{\rho=0} = \left. \frac{dN_m}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0.$$

Здесь  $k_{\text{ион}}$  — константа ионизации метастабильных атомов,  $k_n N_0$  — частота образования метастабильных атомов,  $\mathcal{D}_m$  — коэффициент диффузии метастабильных атомов. Используя тот же метод, что и в предыдущей задаче, получим для плотности электронов и метастабильных атомов

$$N_e = C_1 (e^{-\delta \rho^2} - e^{-\delta r_0^2}), \quad N_m = C_2 (e^{-\gamma \rho^2} - e^{-\gamma r_0^2}),$$

где  $\delta r_0^2 = 1,435$ ,  $\gamma r_0^2 = 0,988$ ,

$$\frac{r_0^2 k_{\text{ион}} N_m(0)}{\mathcal{D}_a} = 7,55, \quad \frac{r_0^2 k_n N_0 N_e(0)}{N_m(0) \mathcal{D}_m} = 6,28. \quad (6.8)$$

Согласно первому из приведенных соотношений частота образования заряженных частиц равна частоте ухода их на стенки. Второе условие устанавливает связь между плотностью электронов и метастабильных атомов.

**Задача 6.12.** Рассмотреть свойства подобия положительного столба газового разряда, создаваемого в цилиндрической трубке.

В случае механизма прямой ионизации атомов связь между параметрами разряда дается соотношением (6.3). Как следует из кинетического уравнения для функции распределения электронов, частота ионизации связана с плотностью атомов  $N_a$  соотношением  $\nu_{\text{ион}} = N_a f(E/N_a)$ , где функция  $f(x)$  зависит только от свойств газа. Так как коэффициент амбиполярной диффузии  $\mathcal{D}_a \sim 1/N_a$ , то из соотношения (6.3) вытекает, что у подобных разрядов

$$N_a r_0 = \text{const}, \quad E r_0 = \text{const}, \quad (6.9)$$

где  $r_0$  — радиус разрядной трубки,  $E$  — напряженность электрического поля. Поскольку уравнение (6.2) линейно, то в этом случае закон подобия сохраняется при любой плотности электронов, т. е. при любых плотностях токов.

При ступенчатой ионизации плотность электронов не может быть произвольной, ибо уравнения баланса для плотности электронов перестают быть линейными. Как следует из уравнений (6.5), (6.7), законы подобия в этом случае имеют вид

$$N_a r_0 = \text{const}, \quad E r_0 = \text{const}, \quad N_e r_0 = \text{const}. \quad (6.10)$$

**Задача 6.13.** К газу добавлена легкоионизируемая присадка, плотность которой  $N_{\text{пр}}$ . Заряженные частицы в положительном столбе разряда образуются только в результате ионизации атомов присадки. Определить распределение электронов и атомов присадки по сечению разрядной трубки, если коэффициент диффузии атомов равен  $\mathcal{D}$ , коэффициент амбиполярной диффузии  $\mathcal{D}_a$ , константа ионизации атомов присадки электронным ударом при заданных условиях разряда  $k_{\text{ион}}$ .

Уравнения баланса для плотности атомов присадки  $N_a$  и электронов  $N_e$  и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dN_a}{d\rho} - N_e N_a k_{\text{ион}} &= 0, \\ \frac{\mathcal{D}_a}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dN_e}{d\rho} + N_e N_a k_{\text{ион}} &= 0, \\ N_e(R_0) &= 0, \quad \int_0^{R_0} [N_e(\rho) + N_a(\rho)] \rho d\rho = N_{\text{пр}} \frac{R_0^2}{2}, \\ \left. \frac{dN_e}{d\rho} \right|_{\rho=0} &= \left. \frac{dN_a}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Перепишем систему уравнений баланса в безразмерных переменных  $x = \frac{\rho^2}{R_0^2}$ ,  $n_e = \frac{N_e}{N_{пр}}$ ,  $n_a = \frac{N_a}{N_{пр}}$ ,  $a = \frac{4\mathcal{D}}{R_0^2 k_{ион} N_{пр}}$ ,  $b = \frac{4\mathcal{D}_a}{R_0^2 k_{ион} N_{пр}}$ :

$$\left. \begin{aligned} a \frac{d}{dx} x \frac{dn_a}{dx} - n_e n_a &= 0, \\ b \frac{d}{dx} x \frac{dn_e}{dx} + n_e n_a &= 0, \end{aligned} \right\} \int_0^1 (n_e + n_a) dx = 1.$$

Сложив оба уравнения и учитывая, что на стенках трубки частицы только рекомбинируют, но не поглощаются, получим

$$a \frac{dn_a}{dx} + b \frac{dn_e}{dx} = 0.$$

Учитывая это соотношение и условие на стенках трубки, зададим плотность атомов и электронов в виде

$$n_a = C_1 - C_2 e^{-\delta x}, \quad n_e = C_3 (e^{-\delta x} - e^{-\delta}),$$

причем  $C_3 = \frac{a}{b} C_2$  и из условия  $\int_0^1 (n_e + n_a) dx = 1$  имеем

$$C_2 \left[ \left( \frac{a}{b} - 1 \right) \left( \frac{1 - e^{-\delta}}{\delta} \right) - \frac{a}{b} e^{-\delta} \right] + C_1 = 1.$$

Уравнение баланса для плотности электронов на оси трубки дает

$$C_1 - C_2 = b \frac{\delta}{1 - e^{-\delta}}.$$

Наконец, проинтегрировав уравнение баланса для электронов по сечению разрядной трубки, получим

$$\delta e^{-\delta} = C_1 \left( \frac{1 - e^{-\delta}}{\delta} - e^{-\delta} \right) - \frac{C_2}{2\delta} (1 - e^{-\delta})^2.$$

Эти три соотношения позволяют однозначно определить величины, необходимые для нахождения параметров  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\delta$ , через которые выражаются плотности электронов и атомов. Кроме того, отсюда можно получить возможную область значений параметров  $a$  и  $b$ .

**Задача 6.14.** К основному газу, находящемуся в положительном столбе газового разряда, добавлена присадка, плотность атомов которой  $N_{пр}$  мала по сравнению с плотностью атомов газа, так что столкновение заряженных частиц с атомами газа не влияет на свойства положительного столба. Считая, что масса атомов присадки  $M$  велика по сравнению с массой атомов газа  $m$  и что образующиеся в разряде ионы связаны с ядрами присадки, определить распределение атомов присадки по длине столба.

Каждая заряженная частица приобретает под действием электрического поля в единицу времени импульс  $eE$ , причем направление этого импульса определяется знаком заряда. Этот импульс передается газу, так что в силу квазинейтральности плазмы полный импульс, передаваемый газу, равен нулю. Если мы имеем смесь газов, то импульс, передаваемый заряженными частицами данной компоненте газа, может быть отличен от нуля, так что под действием разрядного тока возникает разделение смеси.

Пусть под действием заряженных частиц каждой частице данной компоненты смеси в единицу времени передается импульс  $f$ . Под действием этой силы, согласно закону Больцмана, возникает следующее распределение атомов данной компоненты по длине положительного столба:

$$N = N_0 e^{-fx/T},$$

где  $T$  — температура,  $N_0$  — максимальная плотность атомов данной компоненты газа,  $x$  — координата вдоль разрядной трубки.

Определим силу, действующую на атом присадки под действием тока заряженных частиц. Импульс, передаваемый атомам газа одной заряженной частицей, дается правой частью соотношения (1.22). В частности, импульс, отдаваемый электроном атомам присадки, согласно формуле (1.22), равен

$$m_e \int f_e(\mathbf{v}) v_x v_{e \text{ пр}} d\mathbf{v},$$

где ось  $x$  направлена по полю,  $v_{e \text{ пр}}$  — частота столкновения электрона с атомами присадки. Если для функции распределения электрона, движущегося в газе в постоянном электрическом поле, воспользоваться формулами (2.20), (2.24), то получим, что сила, которая действует со стороны одного электрона на атомы присадки, равна

$$\frac{eE}{3} \left\langle \frac{1}{v^2} \frac{d}{dv} \left( \frac{v^3 v_{e \text{ пр}}}{v_{ea}} \right) \right\rangle.$$

Здесь  $v_{ea}$  — частота упругого соударения электрона с атомом основного газа,  $\langle \rangle$  обозначает усреднение по сферически симметричной функции распределения электронов.

Импульс, передаваемый от отдельного иона атомам присадки, согласно формуле (1.22), равен  $\frac{M}{2} \omega v_{i \text{ пр}}$ . При этом мы считали, что ионы связаны с ядрами примеси и дрейфовая скорость ионов  $\omega$  велика по сравнению с их тепловой скоростью. Частота столкновения иона с атомом примеси  $v_{i \text{ пр}}$  берется при относительной скорости их столкновения, равной дрейфовой скорости иона  $\omega$ . Используя явное выражение для дрейфовой скорости тяжелого иона, даваемое формулой (4.16), имеем

$$\omega = \frac{3 \sqrt{\pi} e E}{8 v_{ia}},$$



где  $\nu_{ia} = N_a \bar{\sigma} \sqrt{2T/m}$  — частота столкновения иона с атомом основного газа. Отсюда находим для силы, действующей со стороны отдельного иона на атомы примеси:

$$\frac{3 \sqrt{\pi}}{16} eE \frac{\nu_{i \text{ пр}}}{\nu_{ia}}.$$

Суммируя полученные результаты, находим силу, действующую на отдельный атом примеси в положительном столбе разряда:

$$f = \frac{N_e}{N_{\text{пр}}} eE \left[ \frac{1}{3} \left\langle \frac{1}{v^2} \frac{d}{dv} \left( \frac{v^3 \nu_e \text{ пр}}{\nu_{ea}} \right) \right\rangle - \frac{3 \sqrt{\pi}}{16} \frac{\nu_{i \text{ пр}}}{\nu_{ia}} \right].$$

Здесь за положительное направление системы координат, в которой представлено выражение для силы, выбрано направление от катода к аноду. Как следует из полученного результата, величина силы не зависит от плотности атомов присадки и пропорциональна степени ионизации плазмы  $N_e/N_a$ . В рассматриваемом случае более вероятно, что бóльшая сила на атомы примеси действует со стороны ионов, так что максимум атомов примеси возникает у катода. Если параметры разряда менять подобным образом, согласно соотношению (6.10), оставляя постоянным состав газа ( $N_{\text{пр}}/N_a = \text{const}$ ), то при этом продольный размер, на котором заметно меняется плотность атомов примеси, будет изменяться пропорционально радиусу разрядной трубки  $r_0$ .

## § 2. Положительный столб разряда низкого давления

По определению положительного столба разряда низкого давления длина свободного пробега ионов в нем велика по сравнению с характерными размерами разряда. Это соотношение отражается на характеристиках такого разряда, которые будут исследованы в данном параграфе.

**Задача 6.15.** Определить плотность тока заряженных частиц и изменение потенциала в области положительного столба разряда низкого давления, создаваемого между двумя бесконечными параллельными пластинами. Считать, что плазма положительного столба квазинейтральна, электроны находятся в термодинамическом равновесии, причем температура электронов много больше температуры атомов.

Поскольку поперечные размеры данной системы велики, то характеристики плазмы зависят только от продольной координаты, т. е. нам предстоит решить одномерную задачу. Электроны находятся в термодинамическом равновесии, поэтому их плотность в данной точке пространства определяется законом Больцмана и имеет вид

$$N_e = N_0 \exp(eU/T_e),$$

где  $T_e$  — температура электронов,  $U$  — потенциал поля в данной точке пространства. Потенциал электрического поля  $U(x)$  в рассматриваемом случае разряда между двумя плоскими электродами

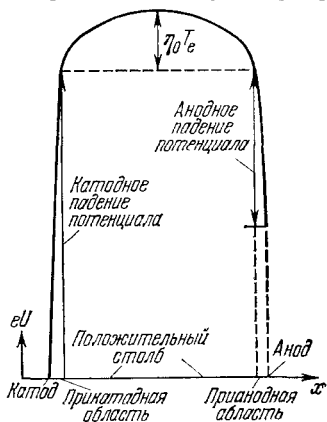


Рис. 6.1. Распределение потенциала в положительном столбе электрической дуги низкого давления.

в области положительного столба симметричен относительно точки  $x = 0$ , как это следует из симметрии задачи. Далее, величина  $U(x) > 0$ , в противном случае образованные в положительном столбе медленные ионы не могли бы выйти за пределы, а электроны свободно покидали бы эту область пространства. Это нарушило бы квазинейтральность плазмы. Вид потенциала в области положительного столба дан на рис. 6.1.

Так как температура электронов значительно превышает температуру газа, то при ионизации образуется медленный ион. При этом скорость иона в точке  $x$  определяется энергией, взятой от внешнего поля, и если он образуется в точке  $\xi$ , то она

равна  $\sqrt{2e[U(\xi) - U(x)]/M}$ , где  $M$  — масса иона.

Учитывая это, получим для плотности ионов выражение

$$N_i = \int_0^x \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\sqrt{2e[U(\xi) - U(x)]/M}},$$

где  $\varphi(\xi)$  — число ионов, образующихся в окрестности точки  $\xi$  в единице объема в единицу времени, точка  $x = 0$  соответствует минимуму потенциала самосогласованного поля плазмы, так что через точку  $x$  проходят ионы, которые образуются в области между  $x$  и 0 и уходят на соответствующий электрод.

Из условия квазинейтральности плазмы получаем уравнение для потенциала самосогласованного поля

$$N_0 \exp\left(\frac{eU(x)}{T_e}\right) = \int_0^x \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\sqrt{2e[U(\xi) - U(x)]/M}}. \quad (6.12)$$

Здесь  $N_0$  — плотность электронов в точке  $x = 0$ ; потенциал самосогласованного поля вводим таким образом, что  $U(0) = 0$ . Решение уравнения (6.12) позволяет определить распределение потенциала самосогласованного поля и величину плотности тока заряженных частиц.

Представим уравнение (6.12) в безразмерном виде. Введем новые переменные

$$\eta(x) = -\frac{eU(x)}{T_e}, \quad j = N_0 \sqrt{\frac{2T_e}{M}},$$

с помощью которых уравнение (6.12) приводится к виду ( $\eta > 0$ )

$$je^{-\eta} = \int_0^x \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\sqrt{\eta(x) - \eta(\xi)}}.$$

Умножим обе части этого уравнения на величину  $\frac{d\eta}{dx} / \sqrt{\eta(y) - \eta(x)}$  и проинтегрируем по  $dx$  в пределах от  $\xi$  до  $y$ . Так как

$$\int_{\xi}^y \frac{\frac{d\eta(x)}{dx} dx}{\sqrt{[\eta(y) - \eta(x)] [\eta(x) - \eta(\xi)]}} = \int_{\eta(\xi)}^{\eta(y)} \frac{d\eta}{\sqrt{[\eta(y) - \eta] [\eta - \eta(\xi)]}} = \pi,$$

то получим в правой части уравнения

$$\begin{aligned} \int_0^{\eta(y)} \frac{d\eta(x)}{\sqrt{\eta(y) - \eta(x)}} \int_0^{\eta(x)} \frac{\varphi(\xi) d\eta(\xi)}{\sqrt{\eta(x) - \eta(\xi)} (d\eta(\xi)/d\xi)} &= \\ &= \int_0^{\eta(y)} \frac{\varphi(\xi) d\eta(\xi)}{d\eta/d\xi} \int_{\eta(\xi)}^{\eta(y)} \frac{d\eta(x)}{\sqrt{[\eta(y) - \eta(x)] [\eta(x) - \eta(\xi)]}} = \pi \int_0^y \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

В результате найдем

$$I \equiv \int_0^y \varphi(\xi) d\xi = \frac{j}{\pi} \int_0^{\eta(y)} e^{-\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(y) - \eta}}. \quad (6.13)$$

Соотношение (6.13) выражает поток заряженных частиц в данной точке пространства через потенциал самосогласованного поля.

Поток  $I$  заряженных частиц, движущихся к электродам, монотонно возрастает по мере удаления от точки  $x=0$  к одному из электродов. Поэтому условие  $dI/d\eta=0$  отвечает условию

$$\frac{d\eta}{dx} = \infty \left( \frac{dI}{d\eta} = \frac{dI}{dx} \frac{dx}{d\eta} \right),$$

т. е. определяет точку, где квазинейтральность плазмы нарушается. Таким образом, условие  $dI/d\eta=0$  выполняется на электроде.

Определим величину  $\eta = \eta_0$  в точке, где  $dI/d\eta=0$ . Эта величина характеризует изменение потенциала самосогласованного поля от середины положительного столба до электрода. Из соотношения (6.13) получаем, что  $\eta_0$  является решением уравнения

$$\sqrt{\eta_0} \int_0^{\eta_0} \frac{e^{-\eta} d\eta}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} = 1$$

и равно  $\eta_0 = 0,855$ . Величина плотности тока в этой точке

$$I_0 = \frac{j}{\pi \sqrt{\eta_0}} = 0,344 j = 0,344 N_0 \sqrt{\frac{2T_e}{M}}. \quad (6.14)$$

**Задача 6.16.** Выяснить критерий применимости результатов предыдущей задачи, связанный с квазинейтральностью плазмы и наличием термодинамического равновесия между электронами.

Как следует из уравнения Пуассона, плазма положительного столба рассматриваемого разряда квазинейтральна, если

$$|N_i - N_e| = \left| \frac{1}{4\pi e} \frac{d^2 U}{dx^2} \right| \ll N_0,$$

или

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} \ll \frac{1}{r_D^2}, \quad (6.15)$$

где  $r_D$  — радиус Дебая — Гюккеля (2.7). Величина  $\eta$  в области положительного столба изменяется на величину порядка единицы. Поэтому полученный результат справедлив, если размеры положительного столба  $l$  много больше радиуса Дебая — Гюккеля  $r_D$ , что практически всегда выполняется.

Электроны находятся в термодинамическом равновесии при выполнении условия, согласно которому частота ухода электронов на электроды  $\nu_{yx}$  много меньше частоты столкновения между электронами. В силу квазинейтральности плазмы скорость ухода электронов совпадает со скоростью ухода ионов на электроды  $v_i \sim \sqrt{T_e/M}$ . Поэтому частота ухода электронов на электроды оказывается порядка  $\nu_{yx} \sim (1/L) \sqrt{T_e/M}$ , где  $L$  — расстояние между электродами.

Частота столкновения электронов

$$\nu_{ee} \sim \sqrt{\frac{T_e}{m}} N_e \frac{e^4}{T_e^2} \ln \Lambda,$$

где  $\ln \Lambda$  — кулоновский логарифм (см. формулу (2.36a)). Следовательно, полученный результат справедлив при не очень малых значениях плотности электронов:

$$N_e \gg \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{T_e^2}{e^4 L \ln \Lambda}. \quad (6.16)$$

**Задача 6.17.** Определить величину анодного падения для рассматриваемого в задаче 6.15 разряда низкого давления между двумя параллельными электродами.

Токи ионов, образованных в положительном столбе и попадающих на анод и катод, равны. Полная плотность потока ионов

$$j_i = 2I_0 = 0,69 \sqrt{2T_e/M} N_0.$$

Она равна плотности потока электронов, так что

$$j_e = \int_{v_0}^{\infty} f(v_x) v_x dv_x = 0,69 \sqrt{2T_e/M} N_0,$$

где  $f(v_x)$  — функция распределения электронов по скоростям,  $v_0$  — определяется величиной анодного падения  $U_a$ ,  $mv_0^2/2 = eU_a$ . Будем считать функцию распределения электронов по скоростям максвелловской:

$$f(v_x) = N_0 \left( \frac{m}{2\pi T_e} \right)^{1/2} \exp \left( - \frac{mv_x^2}{2T_e} \right).$$

Тогда получим

$$j_e = N_0 \sqrt{\frac{T_e}{2\pi m}} \exp \left( - \frac{eU_a}{T_e} \right) = 0,69 \sqrt{\frac{2T_e}{M}} N_0,$$

откуда

$$eU_a = T_e \ln 0,41 \sqrt{M/m}.$$

Решение этого уравнения дает, что в зависимости от величины массы иона величина анодного падения  $U_a$  в три — пять раз больше температуры электронов.

**Задача 6.18.** При условиях задачи 6.15 определить изменение плотности тока заряженных частиц на стенке из-за резонансной перезарядки ионов на атомах. Считать, что длина пробега ионов относительно резонансной перезарядки велика по сравнению с расстоянием между электродами, а плотность атомов постоянна по сечению.

Наш способ решения задачи при рассматриваемых условиях полностью аналогичен способу задачи 6.15. Следуя той же последовательности, выведем сначала уравнение квазинейтральности плазмы, аналогичное уравнению (6.12). При этом будем учитывать, что медленные ионы возникают не только в результате ионизации атомов, но и при резонансной перезарядке иона на атоме. Этот процесс приводит к остановке иона, ибо после перезарядки ион приобретает первоначальную скорость атома, отдавшего свой электрон, а характерная скорость атомов значительно меньше характерной скорости иона. Кроме того, вероятность иону не перезарядиться после прохождения расстояния  $x$  равна  $\exp(-x/\lambda)$ , где  $\lambda = (N_a \sigma_{\text{рез}})^{-1}$  — длина пробега иона относительно резонансной перезарядки ( $N_a$  — плотность атомов,  $\sigma_{\text{рез}}$  — сечение резонансной перезарядки иона на атоме). На основе этого представляем уравнение (6.12) в виде

$$N_0 \exp \left[ \frac{eU(x)}{T_e} \right] = \int_0^x \frac{[\varphi_{\text{ион}}(\xi) + \varphi_{\text{рез}}(\xi)] \exp [(\xi - x)/\lambda]}{\sqrt{2e[U(\xi) - U(x)]/M}} d\xi,$$

где  $\Phi_{\text{ион}}(\xi)$ ,  $\Phi_{\text{рез}}(\xi)$  — число медленных ионов, образующихся в точке  $\xi$  в единицу объема в единицу времени в результате ионизации и резонансной перезарядки соответственно. Введя те же обозначения, что и в задаче 6.15:

$$\eta(\xi) = -\frac{eU(\xi)}{T_e}, \quad \bar{\gamma} j = N_0 \sqrt{\frac{2T_e}{M}},$$

приведем уравнение к виду

$$j e^{-\eta} = \int_0^x \frac{[\Phi_{\text{ион}}(\xi) + \Phi_{\text{рез}}(\xi)] \exp\{[(\xi-x)/\lambda]\} d\xi}{\sqrt{\eta(x) - \eta(\xi)}}.$$

Величины  $\Phi_{\text{ион}}(\xi)$  и  $\Phi_{\text{рез}}(\xi)$  связаны между собой. Изменение числа перезарядившихся ионов на расстоянии  $dx$  пропорционально числу образовавшихся ионов, именно

$$d\Phi_{\text{рез}} = \Phi_{\text{ион}}(x) \frac{dx}{\lambda}.$$

Это дает  $\Phi_{\text{рез}}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\xi} \Phi_{\text{ион}}(\xi') d\xi'$ . С помощью этого соотношения преобразуем уравнение к виду

$$j e^{-\eta} = e^{-\frac{x}{\lambda}} \int_0^x \frac{\frac{d}{d\xi} \left[ \exp\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \int_0^{\xi} \Phi_{\text{ион}}(\xi') d\xi' \right]}{\sqrt{\eta(x) - \eta(\xi)}} d\xi.$$

Решая это уравнение (уравнение Абеля) таким же способом, как и в задаче 6.15, получим

$$\frac{j}{\pi} \int_0^{\eta} \frac{d\eta'}{\sqrt{\eta - \eta'}} \exp \left[ -\eta' + \frac{x(\eta')}{\lambda} \right] = e^{x/\lambda} \int_0^x \Phi_{\text{ион}}(\xi) d\xi.$$

Отсюда для плотности тока в точке  $x$  находим

$$I = \int_0^x \Phi_{\text{ион}}(\xi) d\xi = \frac{j}{\pi} \int_0^{\eta} \frac{d\eta'}{\sqrt{\eta - \eta'}} \exp \left[ -\eta' + \frac{x(\eta')}{\lambda} - \frac{x(\eta)}{\lambda} \right].$$

Поскольку на электроде плотность тока максимальна, то здесь выполняется условие  $dI/d\eta = 0$ . Это дает следующее уравнение для величины  $\eta_0 = \eta(l)$ :

$$\frac{1}{\sqrt{\eta_0}} = \int_0^{\eta_0} \frac{\left(1 - \frac{1}{\lambda} \frac{dx'}{d\eta'}\right) \exp \left[ -\eta' + \frac{x(\eta')}{\lambda} \right]}{\sqrt{\eta_0 - \eta'}} d\eta'.$$

Отсюда \*) для плотности тока на электродах получаем

$$I_{\max} = \int_0^l \varphi_{\text{ион}}(x) dx = \frac{j}{\pi} \frac{\exp\left(-\frac{l}{\lambda}\right)}{\sqrt{\eta_0}} + \frac{j}{\pi} \int_0^l \frac{dx}{\lambda} \frac{\exp\left(-\eta - \frac{l}{\lambda} + \frac{x}{\lambda}\right)}{\sqrt{\eta_0 - \eta}}.$$

В пределе  $\lambda \rightarrow \infty$  все полученные результаты совпадают с данными задачи 6.15.

Определим плотность тока на электродах с учетом первого члена разложения по малому параметру  $l/\lambda$ . Имеем

$$I_{\max} = \frac{j}{\pi \sqrt{\eta_0}} \left[ 1 - \frac{l}{\lambda} \left( 1 - \sqrt{\eta_0} \int_0^l \frac{dx}{l} \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} \right) \right],$$

где  $j/\pi \sqrt{\eta_0}$  — плотность тока при отсутствии резонансной перезарядки,  $\eta_0 = 0,855$ . Для вычисления последнего интеграла необходимо найти зависимость  $\eta(x)$ . Используем простейшее выражение для этой величины, дающее правильный ход для этой зависимости. Именно, учтем, что при  $x=0$  имеем  $\eta=0$  и  $\frac{d\eta}{dx}=0$ , а при  $x=l$   $\eta=\eta_0$  и  $\frac{d\eta}{dx}=\infty$ . Эти условия выполняются, если связь между искомыми величинами задать в виде

$$\left(\frac{\eta - \eta_0}{\eta_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^2 = 1.$$

В этом случае имеем для безразмерного потенциала на электродах  $\eta_0 = 0,855$  и для плотности тока на электродах

$$I_{\max} = \frac{j}{\pi \sqrt{\eta_0}} \left[ 1 - \frac{l}{\lambda} \left( 1 - \eta_0 \int_0^1 \frac{e^{-t\eta_0} \sqrt{1-t} dt}{\sqrt{t(2-t)}} \right) \right].$$

Вычисляя искомый интеграл, получим

$$I_{\max} = 0,344 j (1 - l/\lambda).$$

Как видно, наличие резонансной перезарядки приводит к уменьшению плотности тока на электродах.

**Задача 6.19.** Определить поток заряженных частиц на стенки цилиндрической разрядной трубки и изменение потенциала от оси трубки до ее стенок в положительном столбе разряда низкого давления.

\*) При этом мы используем выражение для производной:

$$\frac{d}{d\eta} \int_0^{\eta} \frac{f(\eta') d\eta'}{\sqrt{\eta - \eta'}} = \int_0^{\eta} \frac{df}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\sqrt{\eta - \eta'}} + \frac{f(0)}{\sqrt{\eta}}.$$

Будем считать, что частота столкновения электронов друг с другом значительно превышает частоту ухода заряженных частиц на стенки. Поэтому электроны находятся в термодинамическом равновесии и их плотность на расстоянии  $\rho$  от оси трубки определяется законом Больцмана

$$N_e(\rho) = N_0 \exp \left\{ \frac{-e [U_0 - U(\rho)]}{T_e} \right\},$$

где  $U_0$  — потенциал на оси трубки,  $T_e$  — температура электронов,  $N_0$  — плотность электронов на оси трубки.

Плотность ионов удовлетворяет соотношению (температура электронов много больше температуры атомов)

$$N_i(\rho) 2\pi\rho = \int_0^\rho \frac{\varphi(r) 2\pi r dr}{\sqrt{2e [U(r) - U(\rho)]/M}},$$

где  $\varphi(r)$  — частота образования ионов, приходящихся на единицу объема. Приравнявая плотности электронов и ионов (плазма положительного столба квазинейтральна), получаем

$$2\pi\rho N_0 \exp \left\{ \frac{-e [U_0 - U(\rho)]}{T_e} \right\} = \int_0^\rho \frac{\varphi(r) 2\pi r dr}{\sqrt{2e [U(r) - U(\rho)]/M}}.$$

Введем новые переменные:  $\eta(\rho) = -e [U(\rho) - U_0]/T_e$ ,  $\omega = N_0 \sqrt{2T_e/M}$ . В этих переменных уравнение для потенциала самосогласованного поля принимает вид

$$\omega \rho e^{-\eta(\rho)} = \int_0^\rho \frac{\varphi(r) r dr}{\sqrt{\eta(\rho) - \eta(r)}}. \quad (6.17)$$

Нас интересует ток электронов на стенки трубки, который приходится на единицу длины трубки:

$$I = \int_0^{r_0} \varphi(r) 2\pi r dr,$$

где  $r_0$  — радиус трубки. При этом плотность тока на стенки разрядной трубки равна

$$j = \frac{I}{2\pi r_0} = \int_0^{r_0} \varphi(r) r \frac{dr}{r_0}. \quad (6.18)$$

Умножим обе части уравнения (6.18) на величину  $[\eta(R) - \eta(\rho)]^{-1/2} d\eta/d\rho$  и проинтегрируем по  $d\rho$  в пределах от 0 до  $R$ . Так как

$$\int_{\eta_r}^{\eta_R} \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta_R - \eta)(\eta - \eta_r)}} = \pi,$$



то получим

$$\omega \int_0^{\eta_R} \frac{\rho d\eta}{\sqrt{\eta_R - \eta}} e^{-\eta} = \pi \int_0^R \varphi(r) r dr.$$

Это соотношение позволяет определить плотность тока на стенке, которая, согласно формуле (6.18), равна

$$j = \int_0^{r_0} \varphi(r) \frac{r dr}{r_0} = \frac{\omega}{\pi r_0} \int_0^{\eta_0} \frac{\rho d\eta e^{-\eta}}{\sqrt{\eta_0 - \eta}},$$

где  $\eta_0 = \eta(r_0)$ .

У стенок разрядной трубки потенциал самосогласованного поля изменяется на величину порядка температуры. Такое изменение необходимо для равенства токов ионов и электронов. Оно происходит на расстояниях порядка радиуса Дебая—Гюккеля, где заряды разделяются и плазма перестает быть квазинейтральной.

Поскольку  $\frac{dj}{dr} = \frac{dj}{d\eta} \frac{d\eta}{dr}$  и величина  $\frac{dj}{dr}$  конечна, а в масштабах величин порядка  $T_e, r_0$  на стенке разрядной трубки производная  $d\eta/dr \rightarrow \infty$ , то на стенке  $dj/d\eta = 0$ . Это условие для величины  $\eta_0$  на стенке трубки дает

$$\left. \frac{d}{d\eta} \int_0^{\eta} \frac{\rho d\xi e^{-\xi}}{\sqrt{\eta - \xi}} \right|_{\eta=\eta_0} = 0, \quad (6.19)$$

причем при  $\eta = \eta_0$   $\rho = r_0$  и  $d\rho/d\eta = 0$ . Кроме того, вблизи оси напряженность электрического поля  $E \sim \rho$ , т. е. при  $\rho \rightarrow 0$   $\eta \sim \rho^2$ . Наряду с этим  $\eta$  — монотонная функция  $\rho$ , т. е.  $d\eta/d\rho > 0$ . Наиболее простая функция, удовлетворяющая этим условиям, имеет вид

$$\frac{\rho}{r_0} = \frac{\sqrt{\eta(2\eta_0 - \eta)}}{\eta_0}, \quad \frac{\eta}{\eta_0} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^2}. \quad (6.20)$$

Считая, что данная зависимость близка к точной при любой зависимости  $\varphi(r)$ , на основании соотношения (6.19) получим уравнение для  $\eta_0$ :

$$\int_0^{\eta_0} \left[ \sqrt{\frac{\eta(2\eta_0 - \eta)}{\eta_0 - \eta}} - \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta}{\eta(2\eta_0 - \eta)}} \right] e^{-\eta} d\eta = 0.$$

Решение этого уравнения дает  $\eta_0 = 1,145$  и

$$j = \frac{\omega}{\pi} \sqrt{\eta_0} \int_0^1 \sqrt{\frac{t(2-t)}{1-t}} e^{-t\eta_0} dt = 0,854 \frac{\omega}{\pi} = 0,272 N_0 \sqrt{\frac{2T_e}{M}}. \quad (6.21)$$

**Задача 6.20.** Найти функцию распределения ионов по скоростям в цилиндрической разрядной трубке в продольном направлении. Считать, что напряженность электрического поля вдоль оси трубки  $E$  не зависит от сечения и частота образования заряженных частиц в каждой точке пропорциональна плотности электронов в этой точке.

Скорость иона в продольном направлении равна  $eEt/M$ , где  $t$  — время с момента образования иона. Время, за которое ион, образовавшийся в точке  $r$ , доходит до точки  $r_1$ , равно

$$t = \int_r^{r_1} \frac{d\rho}{v_\rho} = \left(\frac{M}{2T_e}\right)^{1/2} \int_r^{r_1} \frac{d\rho}{\sqrt{\eta(\rho) - \eta(r)}} =$$

$$= \left(\frac{M}{2T_e}\right)^{1/2} r_0 \int_\eta^{\eta_1} \frac{\eta_0 - \eta'}{\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta'(\eta - \eta')(2\eta_0 - \eta')}}.$$

Время, за которое ион, образовавшийся в точке  $r$ , доходит до

стенки, равно  $t_{\max} = \left(\frac{M}{2T_e}\right)^{1/2} r_0 \int_\eta^{\eta_0} \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta}{\eta(2\eta_0 - \eta)}} \frac{d\eta}{\eta_0}$ . В частности,

$$t_{\max}(0) = \left(\frac{M}{2T_e}\right)^{1/2} r_0 \frac{1}{\sqrt{\eta_0}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x(2-x)}} dx = 1,12 \left(\frac{M}{2T_e}\right)^{1/2} r_0.]$$

Как видно, те ионы в разряде, которые появляются в точке  $\rho$ , имеют в продольном направлении скорости, лежащие в интервале  $0 \leq v_z \leq (eE/M) t_{\max}$ . При этом число ионов, образующихся в точке  $\rho$  и имеющих скорости в интервале от  $v_z$  до  $v_z + dv_z$ , пропорционально  $dv_z$  и не зависит от  $v_z$ . Это связано с непрерывным способом образования ионов. Отсюда следует, что число ионов в разряде со скоростью  $v_z$  пропорционально

$$\int_0^r \varphi(r') r' dr' = C[(\eta_0 - 1)(1 - e^{-\eta}) + \eta e^{-\eta}],$$

где  $v_z$  и  $\eta$  связаны соотношением

$$v_z = \frac{eE}{m} t_{\max}(r) = v_0 \int_0^{\eta_0} \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta'}{\eta'(2\eta_0 - \eta')}} \frac{d\eta'}{\sqrt{\eta_0}}, \quad v_0 = \frac{eEr_0}{\sqrt{2T_e M \eta_0}}.$$

Отсюда  $dv_z = v_0 \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta}{\eta(2\eta_0 - \eta)}} d\eta$  и

$$f(v_z) dv_z = C[(\eta_0 - 1)(1 - e^{-\eta}) + \eta e^{-\eta}] \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta}{\eta(2\eta_0 - \eta)}} d\eta,$$

где  $C$  — константа, определяемая условием нормировки функции распределения. Средняя скорость ионов в направлении  $z$  оси разрядной трубки равна

$$\begin{aligned} \bar{v}_z = & \int_0^{\eta_0} [(\eta_0 - 1)(1 - e^{-\eta}) + \eta e^{-\eta}] \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta}{(2\eta_0 - \eta)\eta_0}} d\eta \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{d\eta'}{\sqrt{\eta_0}} \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta'}{\eta'(2\eta_0 - \eta')}} \times \\ & \times \left( \int_0^{\eta_0} [(\eta_0 - 1)(1 - e^{-\eta}) + \eta e^{-\eta}] \sqrt{\frac{\eta_0 - \eta}{(2\eta_0 - \eta)\eta_0}} d\eta \right)^{-1} = \\ & = \frac{0,08707}{0,2539} v_0 = 0,343v_0. \end{aligned}$$

**Задача 6.21.** Найти функцию распределения ионов по скоростям в цилиндрической разрядной трубке в поперечном направлении. Считать, что частота образования заряженных частиц в каждой точке пропорциональна плотности свободных электронов.

Плотность ионов в точке  $\rho$  с энергией, лежащей в промежутке от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ , равна

$$f(\rho, \varepsilon) d\varepsilon = \frac{\varphi(r') r' dr'}{\sqrt{\eta(\rho) - \eta(r')}}.$$

При этом  $\varepsilon/T_e = \eta(\rho) - \eta(r')$ . Это соотношение определяет точку  $r'$ , из которой приходят ионы, обладающие в точке  $\rho$  энергией  $\varepsilon$  и, следовательно, радиальной скоростью  $v_\rho = \sqrt{2\varepsilon/M}$ . Подставляя  $\varphi(r') = Ce^{-\eta'}$ ,  $\frac{\rho}{r_0} = \sqrt{\frac{\eta(2\eta_0 - \eta)}{\eta_0}}$ , получим

$$f(\rho, \varepsilon) d\varepsilon = C \frac{\exp[\varepsilon/T_e - \eta] (\eta_0 + \varepsilon/T_e - \eta)}{\sqrt{\varepsilon/T_e}} d\varepsilon.$$

Константу  $C$  можно найти из условия нормировки функции распределения  $f$  на границе трубки

$$\int_0^{\eta_0 T_e} f(r_0, \varepsilon) d\varepsilon = N_0 e^{-\eta_0}.$$

**Задача 6.22.** Определить скачок потенциала вблизи стенки в цилиндрической разрядной трубке для электрической дуги малого давления.

Скачок потенциала возникает в малой области вблизи стенок, размер этой области порядка радиуса Дебая—Гюккеля. В этой области положительный и отрицательный заряды разделяются, причем возникающая в результате этого разность потенциалов уравновешивает ток ионов и электронов на стенку,

сохраняя квазинейтральность плазмы внутри трубки. Для плотности тока электронов на стенку имеем:

$$j_e = N_0 e^{-\eta_0} \int_{v_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2T_e}\right) v_x dv_x \sqrt{\frac{m}{2\pi T_e}} = \\ = N_0 \exp\left(-\eta_0 - \frac{e\Delta U}{T_e}\right) \sqrt{\frac{T_e}{2\pi m}},$$

где  $\Delta U = mv_0^2/2e$  — скачок потенциала в пристеночной области, ось  $x$  направлена перпендикулярно поверхности стенки. Приравняв плотность тока электронов плотности тока ионов, которая равна  $j_i = 0,272N_0 \sqrt{2T_e/M}$ , получим уравнение для скачка потенциала

$$\exp\left[-\eta_0 - \frac{e\Delta U}{T_e}\right] = 0,54 \sqrt{\frac{\pi m}{M}}, \quad \frac{e\Delta U}{T_e} = \ln \frac{1}{3} \sqrt{\frac{M}{m}} = c. \quad (6.22)$$

Например, в случае гелия  $c = 3,35$ , в случае аргона  $c = 4,5$ , в случае ксенона  $c = 5,1$ .

**Задача 6.23.** Определить температуру и ток электронов в цилиндрической разрядной трубке, если напряженность продольного поля постоянна по сечению.

За время пребывания внутри разрядной трубки каждый электрон создает в среднем пару заряженных частиц. Поскольку сечение неупругого столкновения электрона с атомом значительно меньше сечения упругого столкновения, то за время пребывания внутри трубки электрон испытает много упругих столкновений с атомом. Поэтому импульс, получаемый электронами от поля, отдается атомам. Уравнение баланса для изменения импульса электрона в единицу времени имеет вид

$$\frac{dP}{dt} = eE - m \langle v v_{ea} \rangle = 0,$$

где усреднение  $\langle \rangle$  проводится по максвелловой функции распределения электронов, частота столкновения электрона с атомом равна  $v_{ea} = N_a v_e \sigma_{ea}^*$ ;  $N_a$  — плотность атомов,  $\sigma_{ea}^*$  — диффузионное сечение рассеяния иона на атоме. Считая, что дрейфовая скорость электронов  $\omega$  много меньше их тепловой скорости, получим  $\langle v v_{ea} \rangle = \omega \langle v_{ea} \rangle$ . Отсюда

$$\omega = \frac{eE}{m \langle v_{ea} \rangle} = \frac{eE \lambda_{ea}}{\sqrt{2T_e m}},$$

где длина свободного пробега электрона  $\lambda_{ea} = \frac{\sqrt{2T_e}}{\langle v_{ea} \rangle \sqrt{m}}$ .

Напишем уравнение баланса для энергии, приобретаемой и теряемой электроном в единицу времени. Энергия, которая

тратится на каждый электрон, равна

$$\tilde{\varepsilon} = \bar{\eta}T_e + \bar{\varepsilon} + I + \bar{\eta}T_e + e\Delta U,$$

здесь  $\bar{\eta}T_e$  — средняя энергия, которую затрачивает электрон, чтобы подойти к стенке,  $I$  — потенциал ионизации — энергия, идущая на образование пары заряженных частиц,  $\bar{\varepsilon}$  — средняя энергия, уносимая одним электроном на стенки. Последние два члена характеризуют кинетическую энергию ионов, которую они приобретают в результате взаимодействия с полем:  $\bar{\eta}T_e$  — средняя кинетическая энергия, приобретаемая ионами при подходе к стенкам,  $\Delta U$  — скачок потенциала у стенок. Имеем

$$\bar{\eta} = \frac{\int_0^{r_0} e^{-\eta\rho} d\rho}{\int_0^{r_0} e^{-\eta\rho} d\rho} = \frac{\int_0^{\eta_0} e^{-\eta}(\eta_0 - \eta) d\eta}{\int_0^{\eta_0} e^{-\eta}(\eta_0 - \eta) d\eta} = \frac{\eta_0 - 1 + e^{-\eta_0}(1 - \eta_0^2/2)}{\eta_0 - 1 + e^{-\eta_0}} = 0,575,$$

$$\bar{\varepsilon} = T_e + \frac{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2T_e}\right) \frac{mv_x^2}{2} dx}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2T_e}\right) dv_x} \approx T_e + e\Delta U + T_e = e\Delta U + 2T_e,$$

$$\tilde{\varepsilon} = 2\bar{\eta}T_e + e\Delta U + \bar{\varepsilon} + I \approx 3,1T_e + 2e\Delta U + I.$$

Уравнение баланса для энергии, приобретаемой и теряемой всеми электронами в единицу времени, имеет вид

$$eE\omega \int_0^{r_0} N_e 2\pi\rho d\rho L = 2\pi r_0 L j \tilde{\varepsilon},$$

где  $L$  — длина трубки. Отсюда

$$eE\omega = \frac{0,76\tilde{\varepsilon}}{r_0} \sqrt{\frac{2T_e}{M}}.$$

Используя оба уравнения баланса, получим

$$\omega = \left(\frac{0,76\tilde{\varepsilon}}{\sqrt{Mm}} \frac{\lambda_{ea}}{r_0}\right)^{1/2}, \quad \frac{eE\sqrt{r_0\lambda_{ea}}}{T_e} = \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} \left(\frac{1,52\tilde{\varepsilon}}{T_e}\right)^{1/2}.$$

Сравним дрейфовую скорость электронов с их тепловой скоростью. Учитывая, что  $\tilde{\varepsilon} \sim T_e$ , получим

$$\omega \sqrt{\frac{m}{T_e}} \sim \sqrt{\frac{\lambda_{ea}}{r_0}} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}.$$

Поскольку  $r_0\sqrt{M/m}$  — расстояние, которое проходит электрон за время жизни, то  $\omega \ll \sqrt{T_e/m}$ .

Средняя скорость ионов в продольном направлении равна  $\bar{v}_i = \frac{0,34eEr_0}{\sqrt{2TM\eta_0}}$ . Сравним ее с дрейфовой скоростью электронов:

$$\frac{\bar{v}_i}{w} \sim \frac{eEr_0}{T_e} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} \left(\frac{r_0}{\lambda_{ea}}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{r_0}{\lambda_{ea}} \ll 1$$

(каждый из множителей меньше единицы). Полный ток в трубке в продольном направлении равен

$$I = \int N_e 2\pi r dr \omega = \omega N_0 \cdot 0,71\pi r_0^2.$$

**Задача 6.24.** Найти связь между плотностью атомов и температурой электронов в цилиндрической разрядной трубке.

Из уравнения баланса для плотности электронов имеем

$$\frac{d}{dt} \int_0^{r_0} N_e 2\pi r dr = 0 = k_{\text{ион}} N_a \int_0^{r_0} 2\pi r dr N_e - 2\pi r_0 0,27 N_0 \sqrt{\frac{2T_e}{M}},$$

$$k_{\text{ион}} N_a = \frac{0,76}{r_0} \sqrt{\frac{2T_e}{M}}.$$

Отсюда плотность атомов равна

$$N_a = \frac{0,76}{r_0 k_{\text{ион}}(T_e)} \sqrt{\frac{2T_e}{M}}. \quad (6.23)$$

Это соотношение определяет температуру электронов, необходимую для поддержания разряда в случае слабоионизованной плазмы. Как видно, при изменении плотности газа и радиуса трубки температура электронов сохраняется, если  $N_a r_0 = \text{const}$ . При этих условиях, согласно результатам предыдущей задачи,  $eEr_0 \sim \sqrt{1/N_a r_0} \sim \text{const}$ , т. е. напряженность электрического поля  $\sim 1/r_0$  (частота столкновения электронов с атомами много больше частоты ухода электронов на стенки).

Плотность электронов в разрядной трубке определяется внешними параметрами, а именно, характеристиками внешнего источника, который создает разряд. Поскольку температура электронов однозначно определяется плотностью газа и радиусом трубки, то эти параметры системы однозначно определяют и напряженность электрического поля. Таким образом, задание радиуса трубки и плотности газа требует вполне определенной разности потенциалов между анодом и катодом. При этих условиях величина тока в разрядной трубке связана с характеристиками внешнего источника, причем проводимость разрядного промежутка пропорциональна  $N_e r_0^2$ .

**Задача 6.25.** Определить продольный градиент плотности газа в запаянной цилиндрической разрядной трубке.

Перепад давления газа в трубке возникает под действием тока заряженных частиц. В результате столкновения заряженных частиц с атомами газа создается направленный поток атомов газа. Пусть средняя скорость атомов газа в продольном направлении равна  $w_a$ . Поскольку направленный поток компенсируется диффузионным, уравнение для плотности атомов  $N_a$  имеет вид

$$\mathcal{D}\nabla N_a - w_a N_a = 0,$$

где  $\mathcal{D}$  — коэффициент диффузии атомов. Если перепад давления мал, отсюда следует

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{w_a L}{\mathcal{D}},$$

где  $\Delta N$  — разность плотностей газа у электродов,  $L$  — расстояние между электродами.

Определим направленную скорость атомов. Она возникает в результате столкновения атомов с электронами и ионами. При этом время ухода ионов на стенки меньше времени соударения с атомами, так что весь импульс, который ионы получают от поля, они уносят на стенки разрядной трубки. Поскольку частота упругого столкновения электрона с атомами значительно больше частоты ухода электронов на стенки, каждый электрон передает атомам в единицу времени импульс  $eE$ , который он получает от поля. Атомы уносят этот импульс на стенки, причем будем считать, что средний продольный импульс отраженных от стенок атомов равен нулю. Получим уравнение баланса для импульса атомов, приходящихся на единицу длины разрядной трубки:

$$\frac{dP_x}{dt} = 0 = eE \int N_e(\rho) 2\pi\rho d\rho - M w_a 2\pi r_0 N_a \sqrt{\frac{T_a}{2\pi M}}.$$

Отсюда

$$w_a = \frac{0,71\pi r_0^2 N_e eE \sqrt{2\pi M}}{M \cdot 2\pi r_0 N_a \sqrt{T_a}} = 0,88 \frac{N_0}{N_a} \frac{eEr_0}{\sqrt{T_a M}},$$

где  $N_0$  — плотность электронов на оси трубки. Используя связь между напряженностью продольного поля и температурой электронов (задача 6.22)

$$\frac{eEr_0}{T_e} = \left(\frac{r_0}{\lambda_{ea}}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} \left(\frac{1,5\tilde{\varepsilon}}{T_e}\right)^{1/2},$$

получим

$$w_a = 1,1 \frac{N_0}{N_a} \frac{T_e}{\sqrt{T_a M}} \left(\frac{r_0}{\lambda_{ea}}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{T_e}\right)^{1/2}.$$

Отсюда находим для относительного перепада давлений

$$\frac{\Delta N_a}{N_a} \sim \frac{w_a L}{D} \sim \frac{N_0}{N_a} \left[ \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{r_0}{\lambda_{ea}} \right]^{1/2} \frac{\tilde{\varepsilon}}{T_a} \frac{L}{\lambda_{aa}},$$

где  $\lambda_{aa}$  — длина свободного пробега атомов. Первые два множителя много меньше единицы, последние два множителя больше единицы. Поэтому в зависимости от параметров системы перепад давления может быть как малым, так и большим.

**Задача 6.26.** Определить перепад давления газа между осью и стенкой трубки.

Разность между плотностями газа на оси и стенках связана с тем, что атомы внутри трубки ионизируются, т. е. их плотность уменьшается. На стенках ионы нейтрализуются, что приводит к увеличению плотности атомов в области вблизи стенок. При изотропном распределении атомов по скоростям их ток в каждую точку разряда и из нее равен  $j = N_a \bar{v}_a / 4$ , где  $\bar{v}_a = \sqrt{8T_a / \pi M}$  — средняя скорость атомов. Уравнение баланса для плотности атомов, которые находятся на расстоянии  $\rho$  от оси, имеет вид

$$\frac{dN_a}{dt} = 0 = -\frac{dj}{d\rho} - N_e N_a k_{\text{ион}}.$$

Отсюда

$$\frac{dN_a}{N_a d\rho} = -\frac{4N_e k_{\text{ион}}}{\bar{v}}, \quad N_a = N_a^{(0)} \exp \left[ \int_{\rho}^{r_0} \frac{4N_e k_{\text{ион}}}{\bar{v}} d\rho \right],$$

и относительный перепад давления равен

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N_a}{N_a^{(0)}} &= \int_0^{r_0} \frac{4N_e k_{\text{ион}}}{\bar{v}} d\rho = \sqrt{\frac{8\pi M}{T_a}} N_0 \int_0^{r_0} e^{-n} \frac{0,76}{N_a r_0} \sqrt{\frac{2T_e}{M}} d\rho - \\ &= 4,35 \frac{N_0}{N_a} \sqrt{\frac{T_e}{T_a}}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

где  $N_0$  — плотность электронов на оси трубки. При получении данного соотношения, наряду с соотношением (6.20), были использованы результаты задачи 6.24. Как видно, перепад давления мал и атомы распределены равномерно по сечению только для слабоионизованной плазмы.

**Задача 6.27.** Сравнить размер ленгмюровского слоя в области около стенки трубки, где положительный и отрицательный заряды разделены, с радиусом Дебая—Гюккеля.

В области около стенки, где плазма перестает быть квазинейтральной, сосредоточены в основном положительные ионы. Слой вблизи стенки, где происходит разделение зарядов, носит название ленгмюровского слоя. Наша цель — оценить толщину ленгмюровского слоя  $l$  и сравнить ее с радиусом Дебая—Гюккеля.

В ленгмюровском слое возникают поля, которые тормозят электроны и ускоряют ионы. В результате действия этих полей становятся равными токи электронов и ионов на стенку, т. е.



плазма остается квазинейтральной. При этом величина потока электронов и ионов на стенку определяется внутренней областью разряда и в соответствии с результатами задачи 6.4 составляет

$$j = 1,25 \mathcal{D}_a N_0 / r_0.$$

Здесь  $N_0$  — плотность заряженных частиц в центральной области разряда,  $r_0$  — радиус разрядной трубки,  $\mathcal{D}_a$  — коэффициент амби-полярной диффузии, который в соответствии с формулой (2.11) составляет

$$\mathcal{D}_a \sim \mathcal{D}_i \frac{T_e}{T_i} \sim \frac{T_e \lambda}{\sqrt{T_i M}},$$

где  $\mathcal{D}_i$  — коэффициент диффузии ионов в газе,  $\lambda$  — длина их свободного пробега,  $M$  — масса иона,  $T_e$ ,  $T_i$  — температура электронов и ионов соответственно, причем  $T_e \geq T_i$ . Это дает

$$j \sim T_e \lambda N_0 / r_0 \sqrt{T_i M}.$$

При нахождении толщины ленгмюровского слоя мы будем исходить из уравнения Пуассона для потенциала поля  $\varphi$  в пристеночном слое:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 4\pi e (N_i - N_e),$$

где  $N_e$ ,  $N_i$  — плотность электронов и ионов соответственно. Поскольку в пристеночном слое  $N_i > N_e$ , то при проведении оценки мы можем положить плотность электронов равной нулю. Учитывая, что заряженные частицы в пристеночной области не образуются, имеем для потока ионов  $j = N_i v_i = \text{const}$  в пристеночной области, где  $v_i$  — скорость ионов вблизи стенки. Подставляя это соотношение в уравнение Пуассона и используя приведенную оценку для плотности потока ионов на стенку, получаем следующую оценку:

$$\frac{\Delta \varphi}{l^2} \sim 4\pi e \frac{T_e \lambda N_0}{r_0 \sqrt{T_i M} v_i} \sim \frac{\lambda}{r_0} \frac{T_e}{e r_D^2} \frac{T_e}{v_i \sqrt{T_i M}}. \quad (6.25)$$

Здесь  $l$  — толщина ленгмюровского слоя,  $\Delta \varphi$  — пристеночное падение потенциала, причем в соответствии с результатами задачи 6.27  $\Delta \varphi \sim T_e / e$ ,  $r_D$  — радиус Дебая — Гюккеля, определенный по формуле (2.11). Далее рассмотрим два предельных случая в зависимости от соотношения между длиной свободного пробега ионов и толщиной ленгмюровского слоя.

Если толщина ленгмюровского слоя  $l$  много меньше длины свободного пробега ионов  $\lambda$ , то скорость ионов в пристеночной области определяется формулой  $v_i \sim \sqrt{e \Delta \varphi / M} \sim \sqrt{T_e / M}$ .

Подставляя это в формулу (6.25), получим

$$\frac{l}{r_D} \sim \left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{1/4}, \quad l \ll \lambda \ll r_0. \quad (6.25a)$$

В другом предельном случае,  $l \gg \lambda$ , направленная скорость ионов в пристеночной области определяется подвижностью ионов в газе и равна  $v_i = KE$ , где подвижность ионов в газе в соответствии с формулой (4.10) составляет по порядку величины  $K \sim e\lambda/\sqrt{T_i M}$ , а напряженность поля в пристеночной области  $E \sim \Delta\phi/l \sim T_e'el$ . Подставляя эти соотношения в формулу (6.25), получим из нее

$$\frac{l}{r_D} \sim \left(\frac{r_0}{r_D}\right)^{1/3}, \quad \lambda \ll l \ll r_0. \quad (6.25б)$$

Как видно, в обоих случаях толщина ленгмюровского слоя в пристеночной области значительно превышает величину радиуса Дебая—Гюккеля, введенную для центральной области разряда.

### § 3. Условия зажигания слаботочного разряда

В данном параграфе мы исследуем условия зажигания темного разряда, плотность тока в котором предельно мала. Это соответствует малой величине пространственного заряда, так что поле пространственного заряда не влияет на движение заряженных частиц.

**Задача 6.28.** Написать условие самоподдержания разряда между двумя плоскими пластинами с большими поперечными размерами. Заряженные частицы образуются как в объеме, так и на поверхности катода под действием ударов ионов.

Будем характеризовать скорость образования заряженных частиц в объеме газа первым коэффициентом Таунсенда  $\alpha$ —числом пар заряженных частиц, образованных электроном на единице длины пробега. Ионы, достигающие поверхности катода, образуют свободный электрон у поверхности катода в результате так называемого потенциального вырывания. Согласно этому механизму ион вырывает электрон с поверхности катода с энергией связи порядка потенциала ионизации атома.

Если потенциал ионизации атома превышает удвоенную работу выхода металла, из которого сделан катод, то внутри металла появляется незанятое состояние, энергия которого расположена ниже энергии Ферми на величину, превышающую работу выхода металла. В результате взаимодействия двух электронов, находящихся у поверхности Ферми, это состояние может быть занято одним из двух взаимодействующих электронов с вылетом другого из них.

Образование электронов у поверхности катода под действием ионов будем характеризовать вторым коэффициентом Таунсенда  $\gamma$ —

отношением числа свободных электронов, возникающих у поверхности катода, к числу ионов, попадающих на катод. Второй коэффициент Таунсенда  $\gamma$  зависит от сорта ионов и от металла, из которого сделан катод. В случае потенциального вырывания электронов ионами с поверхности катода эта величина, как следует из физики данного процесса, слабо зависит от скорости ионов, а следовательно, от напряженности электрического поля у поверхности катода.

В табл. 6.1 приводятся значения второго коэффициента Таунсенда при двух энергиях иона, что подтверждает высказанные соображения.

С помощью введенных коэффициентов  $\alpha$ ,  $\gamma$  напишем условие самоподдержания газового разряда в случае плоской геометрии разрядного промежутка, когда электроды—плоские пластины, и напряженность электрического поля, а следовательно, и величина  $\alpha$  не зависят от точки пространства. Тогда уравнение непрерывности для плотности электронов  $N_e$  принимает вид

$$\frac{d\omega N_e}{dz} = \alpha \omega N_e.$$

Здесь  $z$ —координата разряда, отсчитанная от катода,  $\omega$ —дрейфовая скорость электрона, так что  $\omega N_e$ —поток электронов,  $\alpha \omega$ —частота образования заряженных пар под действием одного электрона.

Решение этого уравнения дается выражением  $N_e = N_e(0) e^{\alpha z}$ , и если расстояние между электродами равно  $L$ , то отсюда следует, что каждый образовавшийся у катода электрон приводит к появлению  $(e^{\alpha L} - 1)$  заряженных пар в газоразрядном промежутке. Каждый из образовавшихся ионов дрейфует на катод и с вероятностью  $\gamma$  приводит к появлению у катода свободного электрона. Для поддержания разряда необходимо, чтобы все ионы, возникшие от одного электрона у катода, создали у катода снова один электрон. Это дает

$$\gamma (e^{\alpha L} - 1) = 1,$$

или

$$\alpha L = \ln(1 + 1/\gamma). \quad (6.26)$$

**Задача 6.29.** Выяснить зависимость первого коэффициента Таунсенда от напряженности электрического поля при малых полях.

Таблица 6.1

Второй коэффициент Таунсенда  $\gamma$  для столкновения ионов с поверхностью обезгаженного вольфрама

Ион	$\gamma$ при энергии иона 1 эВ	$\gamma$ при энергии иона 10 эВ
He+	0,30	0,27
Ne+	0,21	0,25
Ar+	0,095	0,11
Kr+	0,048	0,06
Xe+	0,019	0,019

По определению первого коэффициента Таунсенда его величина равна  $\alpha = N_a \langle v \sigma_i \rangle / \omega$ , где  $N_a$  — плотность атомов газа,  $v$  — скорость электрона,  $\sigma_i(v)$  — сечение ионизации атома электронным ударом,  $\omega$  — дрейфовая скорость электрона, усреднение  $\langle \rangle$  проводится по функции распределения электронов. Поскольку напряженность электрического поля  $E$  входит в кинетическое уравнение для электронов при малой плотности электронов только в виде комбинации  $eE/N_a$ , то наиболее общая зависимость первого коэффициента Таунсенда от напряженности электрического поля имеет вид

$$\alpha = N_a \varphi \left( \frac{eE}{N_a} \right), \quad (6.27)$$

где  $\varphi(x)$  — некоторая функция. Эта зависимость справедлива и при больших плотностях электронов, когда электрон-электронные столкновения играют важную роль. В этом случае в основной области скоростей электронов функция распределения электронов по скоростям максвелловская, причем температура электронов зависит от напряженности поля через комбинацию  $eE/N_a$ .

При малых напряженностях поля функция распределения электронов по энергии зависит от напряженности поля по закону (2.27)  $f \sim \exp(-aE/N)$ , так что наиболее резкая зависимость  $\varphi(x)$  от аргумента  $x$  при малых  $x$  имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 e^{-C_2/x},$$

причем коэффициенты  $C_1, C_2$  зависят от сорта газа в разрядном промежутке.

Коэффициент Таунсенда  $\alpha$  принято выражать в виде зависимости от отношения  $E/p$  ( $p$  — давление газа), а не от  $E/N$ , что при одинаковых температурах газа в разрядном промежутке одно и то же. Первый коэффициент Таунсенда как функция этого параметра при малых полях может быть представлен в виде

$$\alpha = Ap \exp(-Bp/E). \quad (6.28)$$

В табл. 6.2 приведены величины коэффициентов  $A$  и  $B$ , заимствованные из книги Энгеля и Штенбека [1 к гл. 6]. Они получены в результате сравнения экспериментально измеренных значений  $\alpha$  с зависимостью (6.28).

**Задача 6.30.** Используя зависимость (6.26) для первого коэффициента Таунсенда, определить разность потенциалов между электродами, при которой зажигается заряд.

Пусть  $L$  — расстояние между плоскими электродами,  $E$  — напряженность электрического поля. Тогда, согласно формулам (6.26), (6.27), потенциал зажигания разряда  $U_{\text{зак}}$  определяется из соот-

ношения

$$N_a L \varphi \left( \frac{U_{\text{зж}}}{N_a L} \right) = \ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

Из этого соотношения вытекает закон подобия Пашена, согласно которому при одновременном изменении плотности газа и расстояния между электродами пробойное напряжение сохраняется, если  $N_a L = \text{const}$  (сорт газа и материал катода при этом, естественно,

Таблица 6.2

Константы  $A$  и  $B$  уравнения (6.28)

Газ	$A, \text{ см}^{-1} \cdot \text{Тор}^{-1}$	$B, \text{ В см}^{-1} \cdot \text{Тор}^{-1}$	Область применимости, $\text{В см}^{-1} \cdot \text{Тор}^{-1}$	Газ	$A, \text{ см}^{-1} \cdot \text{Тор}^{-1}$	$B, \text{ В см}^{-1} \cdot \text{Тор}^{-1}$	Область применимости, $\text{В см}^{-1} \cdot \text{Тор}^{-1}$
He	3	34	20—150	H <sub>2</sub>	5	130	150—600
Ne	4	100	100—400	N <sub>2</sub>	12	340	100—600
Ar	14	180	100—600	CO <sub>2</sub>	20	470	500—1000
Kr	17	240	100—1000	H <sub>2</sub> O	13	290	150—1000
Xe	26	350	200—800	Hg	20	370	200—600

сохраняются). Если температура газа при данных изменениях параметров газа остается постоянной, то закон Пашена можно сформулировать для величин давления  $p$  и расстояния  $L$  между электродами.

В частности, если коэффициент Таунсенда задать с помощью формулы (6.28), то потенциал зажигания окажется равным

$$U_{\text{зж}} = \frac{B(pL)}{\ln \left[ \frac{A}{\ln(1+1/\gamma)} \right] + \ln pL}. \quad (6.29)$$

Эта функция имеет минимум при

$$(pL)_{\text{min}} = \frac{e}{A} \ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right), \quad (6.30)$$

причем ее минимальное значение равно

$$U_{\text{min}} = B(pL)_{\text{min}}.$$

**Задача 6.31.** При развитии темного разряда плотность электронов экспоненциально растет при движении от катода к аноду. Такое распределение вызывает диффузионный поток электронов от анода к катоду. Учесть влияние этого эффекта на условие развития разряда.

Пренебрегая попаданием заряженных частиц на стенки, получим уравнение баланса для плотности электронов

$$\frac{dN_e}{dt} = 0 = -\frac{dj}{dz} + \alpha\omega N_e,$$

где  $\omega$  — дрейфовая скорость электрона. Поток электронов равен

$$j = \omega N_e - \mathcal{D} \frac{dN_e}{dz},$$

где  $\mathcal{D}$  — коэффициент диффузии электронов. Решением данного уравнения, записанного с учетом уравнения баланса плотности в виде

$$\mathcal{D} \frac{d^2 N_e}{dz^2} - \omega \frac{dN_e}{dz} + \alpha\omega N_e = 0,$$

является  $N_e = N_e(0) e^{kz}$ , где

$$k = \frac{\omega}{2\mathcal{D}} - \sqrt{\frac{\omega^2}{4\mathcal{D}^2} \left(1 - \frac{4\alpha\mathcal{D}}{\omega}\right)} \approx \alpha \left(1 - \frac{\alpha\mathcal{D}}{\omega}\right), \quad \frac{\alpha\mathcal{D}}{\omega} \ll 1,$$

и условие самостоятельности разряда, согласно формуле (6.26), имеет вид

$$kL = \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right).$$

Оценим величину параметра  $\alpha\mathcal{D}/\omega$ . Будем считать, что электроны теряют энергию только в результате возбуждения и ионизации атомов. Тогда  $\alpha = eE\kappa/I$ , где  $I$  — потенциал ионизации атома,  $E$  — напряженность электрического поля,  $\kappa$  — часть неупругой теряемой энергии электрона, которая идет на ионизацию. Воспользуемся далее соотношениями  $\omega = KE$ ,  $\mathcal{D} \sim K\bar{\varepsilon}/e$  ( $K$  — подвижность,  $\bar{\varepsilon}$  — средняя энергия электронов). Отсюда

$$\frac{\alpha\mathcal{D}}{\omega} \sim \frac{\bar{\varepsilon}}{I} \kappa \ll 1,$$

ибо каждый из сомножителей заметно меньше единицы.

С учетом рассмотренного эффекта условие самостоятельности разряда имеет вид

$$\alpha L \left(1 - \frac{\alpha\mathcal{D}}{\omega}\right) = \ln \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right).$$

При этом сомножитель, стоящий в скобках в левой части, мало отличается от единицы.

**Задача 6.32.** Самостоятельный разряд устанавливается в цилиндрической трубке длиной  $L$  и радиуса  $r_0$  ( $r_0 \ll L$ ). Получить условие самостоятельности разряда при учете диффузии электронов к стенкам.

Уравнение для плотности электронов  $N_e(\mathbf{r}, t)$  внутри трубки имеет вид

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j}_e + \nu N_e = 0,$$

причем поток электронов  $\mathbf{j}_e$  складывается из двух частей: диффузионного потока —  $\mathcal{D}_e \nabla N_e$  и гидродинамического потока  $\mathbf{w}_e N_e$ . Здесь  $\mathbf{w}_e$  — дрейфовая скорость электронов,  $\mathcal{D}_e$  — коэффициент диффузии электронов в газе,  $\nu$  — частота ионизации атомов, приводящей к образованию пары заряженных частиц.

Полученное уравнение следует решить с граничными условиями  $N_e(\rho = r_0) = 0$ . К этому уравнению следует добавить подобное уравнение для плотности ионов

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = 0 = -\operatorname{div} \mathbf{j}_i + \nu N_e, \quad \mathbf{j}_i = -\mathcal{D}_i \nabla N_i + \mathbf{w}_i N_i,$$

где  $\mathcal{D}_i$  — коэффициент диффузии для ионов,  $\mathbf{w}_i$  — дрейфовая скорость ионов. Граничное условие на стенках трубки имеет вид  $N_i(\rho = r_0) = 0$ , граничное условие на катоде дает  $\gamma w_i N_i = w_e N_e$ , граничное условие для плотности ионов на аноде  $N_i(z = L) = 0$ .

Используя результаты задачи 6.30, пренебрежем диффузионным потоком ионов и электронов вдоль поля (вдоль оси трубки) по сравнению с их направленным потоком. В стационарном случае для установившегося разряда получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_e \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dN_e}{d\rho} \right) - w_e \frac{dN_e}{dz} + \nu N_e &= 0, \\ \mathcal{D}_i \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dN_i}{d\rho} \right) + w_i \frac{dN_i}{dz} + \nu N_e &= 0, \\ N_e(\rho = r_0) = N_i(\rho = r_0) = 0, \quad N_i(z = L) &= 0; \\ \gamma w_i N_i(z = 0) = w_e N_e(z = 0). \end{aligned}$$

Здесь ось  $z$  направлена вдоль оси трубки ( $0 \leq z \leq L$ ),  $\rho$  — расстояние от данной точки до оси трубки; мы использовали, что дрейфовые скорости электронов и ионов имеют противоположное направление.

Переменные в полученной системе уравнений разделяются. Для сомножителя, зависящего от  $\rho$ , получаем уравнение

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dN_e}{d\rho} \right) + c N_e = 0.$$

Решением этого уравнения является  $N_e = J_0(\sqrt{c} \rho)$ , где  $J_0(x)$  — функция Бесселя. С помощью условия  $N_e(r_0) = 0$  мы находим бесконечное множество дискретных значений  $\sqrt{c}$ . Однако физическое требование  $N_e \geq 0$  при  $\rho \leq r_0$  отбирает единственное подходящее решение:  $N_e = J_0\left(2,405 \frac{\rho}{r_0}\right) f_e(z)$ . Учитывая это в уравнении баланса для плотности электронов, получаем уравнение

для  $f_e(z)$

$$-\omega_e \frac{df_e}{dz} + \left( \nu - \frac{2,405^2}{r_0^2} \mathcal{D}_e \right) f_e = 0.$$

Его решение имеет вид

$$f_e = N_0 e^{\alpha_1 z}, \quad \text{где } \alpha_1 = \alpha - \frac{\mathcal{D}_e}{\omega_e} \left( \frac{2,405}{r_0} \right)^2,$$

$\alpha = \nu/\omega_e$  — первый коэффициент Таунсенда. Как и в случае электронов, подставляя плотность ионов в виде

$$N_i = f_i(z) J_0 \left( 2,405 \frac{\rho}{r_0} \right),$$

получим уравнение для плотности ионов

$$\omega_i \frac{df_i}{dz} - \left( \frac{2,405}{r_0} \right)^2 \mathcal{D}_i f_i + \nu f_e = 0.$$

Используя граничное условие  $N_i(z=L) = 0$ , решаем это уравнение:

$$N_i = \frac{\omega_e \alpha}{\omega_i (\alpha_1 - \delta)} e^{\delta z} [e^{(\alpha_1 - \delta)L} - e^{(\alpha_1 - \delta)z}],$$

где

$$\delta = \frac{\mathcal{D}_i}{\omega_i} \left( \frac{2,405}{r_0} \right)^2.$$

С помощью граничного условия на катоде получаем отсюда соотношение между параметрами, необходимое для зажигания разряда:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} (e^{\alpha' L} - 1) = \frac{1}{\gamma},$$

здесь

$$\alpha' = \alpha - \left( \frac{\mathcal{D}_e}{\omega_e} + \frac{\mathcal{D}_i}{\omega_i} \right) \left( \frac{2,405}{r_0} \right)^2.$$

Рассмотрим предельные случаи. Если для ионов и электронов  $\mathcal{D} \ll \frac{\omega}{r_0^2} L$ , то  $L(\alpha - \alpha') \ll 1$ , и потерей заряженных частиц в связи с уходом их на стенки можно пренебречь. Так как  $L\alpha \sim 1$ , то при этом  $\alpha - \alpha' \ll \alpha$ , и условие самостоятельности разряда в данном случае совпадает с условием самоподдержания разряда (6.25):

$$e^{\alpha L} - 1 = \frac{1}{\gamma}.$$

В другом предельном случае потери заряженных частиц обусловлены их уходом на стенки. Тогда  $\alpha' \ll \alpha$ , т. е.

$$\alpha \approx \left( \frac{\mathcal{D}_e}{\omega_e} + \frac{\mathcal{D}_i}{\omega_i} \right) \left( \frac{2,405}{r_0} \right)^2,$$

что является условием поддержания плазмы в цилиндрической разрядной трубке. Кроме того, при  $\alpha' L \ll 1$  условие самоподдер-



жания разряда имеет вид

$$\alpha L \gamma = 1.$$

**Задача 6.33.** В газоразрядной трубке под действием внешнего излучения образуется  $1/\tau$  пар заряженных частиц в единицу времени, причем время, за которое загорается разряд или заряженные частицы рекомбинируют на электродах, мало по сравнению с  $\tau$ . Определить вероятность того, что разряд зажжется через время  $t$  после того, как к электродам подана разность потенциалов  $U$ , превышающая потенциал зажигания разряда  $U_{\text{зж}}$ .

Введем  $a \leq 1$  — вероятность того, что разряд зажжется после образования пары заряженных частиц. Тогда вероятность зажигания разряда в единицу времени равна  $a/\tau$ , а вероятность  $W(t)$  зажечься разряду к моменту времени  $t$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dW}{dt} = \frac{a}{\tau} (1 - W).$$

Отсюда

$$W(t) = 1 - e^{-at/\tau}.$$

Вычислим вероятность  $a$ . Для вероятности обрыва цепи имеем

$$1 - a = \omega'_0 + \omega'_1 \omega_0 + \omega'_1 \omega_1 \omega_0 + \omega'_1 \omega_1^2 \omega_0 + \dots = \omega'_0 + \frac{\omega'_1 \omega_0}{1 - \omega_1}.$$

Здесь  $\omega_0$  — вероятность обрыва цепи, если один электрон появляется у катода,  $\omega_1$  — вероятность того, что после данного акта размножения одного электрона у катода снова появляется один электрон,  $\omega'_0$ ,  $\omega'_1$  — те же вероятности, если один электрон появляется внутри разрядного промежутка. При написании уравнения для вероятности обрыва цепи мы считали, что образование двух и более электронов у катода приводит к зажиганию разряда, ибо в этом случае вероятность обрыва цепи весьма мала.

Вероятность обрыва цепи после образования  $N$  ионов в газоразрядном промежутке, т. е. вероятность того, что соударение каждого из этих ионов с катодом не приведет к появлению свободного электрона, равна  $\omega_0 = (1 - \gamma)^N \approx e^{-\gamma N}$ , ибо  $\gamma \ll 1$ . Вероятность образования при тех же условиях одного электрона у катода равна  $\omega_1 = \gamma N (1 - \gamma)^{N-1} \approx \gamma N e^{-\gamma N}$ . Эти выражения следует усреднить по числу образовавшихся ионов.

Так как  $\gamma \ll 1$ , то число образовавшихся ионов должно быть большим,  $N \gg 1$ . В этом случае усреднение с распределением Пуассона сводится к замене числа ионов  $N$  на среднее число ионов  $\bar{N}$ . Если начальный электрон образовался у катода, то  $\bar{N} = e^{\alpha L}$ , если на расстоянии  $z$  от катода, то  $\bar{N} = e^{\alpha z}$ . Усредняя

по  $z$ , получим

$$\langle w'_0 \rangle = \int_0^L \frac{dz}{L} e^{-\gamma e^{\alpha z}} = \frac{1}{\alpha L} [Ei(-\gamma \bar{N}) - Ei(-\gamma)],$$

$$\langle w'_1 \rangle = \int_0^L \frac{dz}{L} \gamma e^{\alpha z} e^{-\gamma e^{\alpha z}} = \frac{\gamma}{\alpha L} \int_0^{\bar{N}} dN e^{-\gamma N} = \frac{1 - e^{-\gamma \bar{N}}}{\alpha L},$$

где  $\bar{N} = e^{\alpha L}$ ,  $Ei(x)$  — интегральная показательная функция. Отсюда

$$1 - a = \frac{1}{\alpha L} [Ei(-\gamma \bar{N}) - Ei(-\gamma)] + \frac{(1 - e^{-\gamma \bar{N}}) e^{-\gamma \bar{N}}}{\alpha L (1 - \gamma \bar{N} e^{-\gamma \bar{N}})},$$

где  $\bar{N} = e^{\alpha L}$  и  $\alpha$  берется при напряженности поля  $U/L$ . В частности, если потенциал на электродах близок к потенциалу зажигания, то  $\bar{N} - 1 = 1/\gamma$ ,  $\gamma \bar{N} \approx 1$  и  $(1 - a)$  стремится к 1, так как  $(1 - a) = \frac{1}{\alpha L} \left( \ln \frac{1}{\gamma} + 0,7 \right) \approx 1$ , ибо  $\alpha L \approx \ln \frac{1}{\gamma}$  и  $\gamma \approx 1$ .

**Задача 6.34.** Разряд зажигается в цилиндрической системе, электродами которой являются два коаксиальных цилиндра. К основному газу добавлена малая примесь газа с малым потенциалом ионизации. Поэтому пара заряженных частиц образуется в результате эффекта Пеннинга после столкновения возбужденного атома с атомом примеси. Поскольку плотность атомов примеси мала, то возбужденный атом до столкновения с атомом примеси успевает пройти некоторое расстояние и пара заряженных частиц образуется на некотором расстоянии от той точки, где произошло возбуждение атома. Считая этот эффект малым, выяснить его влияние на условие самостоятельности разряда. Частота вступления в реакцию возбужденного атома с атомами примеси  $1/\tau$ , коэффициент диффузии возбужденных атомов в собственном газе  $\mathcal{D}$ .

Условие самостоятельности разряда в цилиндрической системе по аналогии с формулой (6.26) имеет вид

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \alpha dr = \ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

Здесь  $\rho_1$  — расстояние от оси симметрии до меньшего из электродов,  $\rho_2$  — расстояние до большего из них. Напряженность электрического поля в каждой точке разрядного промежутка равна

$$E = \frac{\Delta U}{\ln(\rho_2/\rho_1)} \frac{n}{\rho},$$

где  $\rho$  — расстояние от оси,  $n$  — единичный вектор вдоль направления, соединяющего данную точку с осью системы и перпенди-

кулярного ей. Направление вектора  $E$  зависит от знака разности потенциалов между электродами  $\Delta U$ , т. е. от того, является меньший из электродов анодом или катодом.

Поскольку электрическое поле направлено по  $\rho$ , нас интересуют смещения только вдоль этой компоненты. Пусть возбужденный атом образовался в точке  $\rho_0$ . Тогда через время  $t$  функция распределения атома по координатам вдоль этого направления, связанная с диффузией атома, имеет вид

$$f(\rho, t) = (2\pi \mathcal{D}t)^{-1/2} \exp \frac{(\rho - \rho_0)^2}{4\mathcal{D}t}.$$

Поскольку вероятность образования пары заряженных частиц в промежуток времени от  $t$  до  $t + dt$  равна  $e^{-t/\tau} \frac{dt}{\tau}$ , то вероятность того, что пара заряженных частиц образуется в точке  $\rho$ , равна

$$f(\rho) = \int_0^{\infty} (2\pi \mathcal{D}t)^{-1/2} \exp \frac{(\rho - \rho_0)^2}{4\mathcal{D}t} \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} dt.$$

Разность между энергией, которую электрон получает от поля в случае, если он возник в точке  $\rho$  или  $\rho_0$ , при этом оказывается равной

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon &= \int eE(\rho) (\rho - \rho_0) f(\rho) d\rho = e \left. \frac{dE}{d\rho} \right|_{\rho_0} \overline{(\rho - \rho_0)^2} = \\ &= e \left. \frac{dE}{d\rho} \right|_{\rho_0} \int_0^{\infty} 2\mathcal{D}te^{-t/\tau} \frac{dt}{\tau} = 2\mathcal{D}\tau e \left. \frac{dE}{d\rho} \right|_{\rho_0}. \end{aligned}$$

Поскольку энергия, затраченная на образование одной пары заряженных частиц, по определению коэффициента Таунсенда есть  $\varepsilon = eE/\alpha$ , то рассматриваемый эффект приводит к изменению коэффициента Таунсенда в системе с цилиндрической симметрией на величину  $\delta\alpha = \alpha \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\alpha^2 \Delta \varepsilon}{eE}$ . Так как  $\frac{dE}{d\rho} = \frac{E}{\rho}$ , то

$$\delta\alpha = \frac{\alpha^2}{eE} 2\mathcal{D}\tau \frac{eE}{\rho_0} = \frac{2\mathcal{D}\tau}{\rho_0} \alpha^2.$$

Такое различие возникает по сравнению с системой с плоской геометрией. При этом мы считаем, что энергия  $\varepsilon$ , затрачиваемая на образование одной пары, а следовательно, и коэффициент Таунсенда мало изменяются при смещении  $\rho$  на расстояние порядка  $\mathcal{D}\tau$ , т. е. при изменении напряженности поля на величину  $\frac{E}{\rho} d\rho$ . С учетом данного эффекта условие самостоятельности разряда примет вид

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \alpha \left( 1 \pm \frac{2\mathcal{D}\tau\alpha}{\rho} \right) d\rho = \ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right),$$

где коэффициент Таунсенда  $\alpha$  берется для системы с плоской геометрией. Знак плюс отвечает случаю, когда катодом является малый цилиндр. Тогда рассматриваемый эффект приводит к увеличению ионизации, ибо электроны, образовавшиеся ближе к катоду, забирают от поля большую энергию, чем потеряли те, которые сместились к аноду. Если катодом является большой цилиндр, в полученном выражении следует оставить знак минус.

**Задача 6.35.** Построить вольтамперную характеристику темного разряда, создаваемого между двумя плоскими электродами.

Для получения вольтамперной характеристики темного разряда мы должны учесть наличие пространственного заряда, под действием которого меняется напряженность поля в газовом промежутке. Таким способом величина тока заряженных частиц, которая определяет величину пространственного заряда, влияет на величину потенциала между электродами. При малых токах плотность заряда в разрядном промежутке мала, так что напряженность электрического поля в каждой точке пространства близка к  $U/L$ , где  $U$  — разность потенциалов между электродами,  $L$  — длина разрядной трубки. (Рассматриваем разрядную трубку с плоскими электродами.)

Представим первый коэффициент Таунсенда в виде

$$\alpha = \alpha \left( \frac{U}{L} \right) + \left( E - \frac{U}{L} \right) \alpha'.$$

При этом отличие напряженности поля от  $U/L$  связано с наличием пространственного заряда. Для нахождения этой величины воспользуемся уравнением Пуассона

$$\frac{dE}{dz} = 4\pi e (N_i - N_e),$$

где  $z$  — расстояние от катода,  $N_i$ ,  $N_e$  — плотность ионов и электронов.

Так как рассматриваемое состояние газового разряда стационарно, токи электронов и ионов на электроды равны,  $\omega_e N_e = \omega_i N_i$ . Здесь  $\omega_e$  — дрейфовая скорость электронов,  $\omega_i$  — дрейфовая скорость ионов, ток электронов берется на аноде, ток ионов — на катоде. Поскольку  $\omega_e/\omega_i \sim \sqrt{M/m} \gg 1$  ( $m$ ,  $M$  — масса электронов и ионов), то в разрядном промежутке  $N_i \gg N_e$ , т. е. плотность электронов мала по сравнению с плотностью ионов, и в уравнении Пуассона ею можно пренебречь. Таким образом, уравнение Пуассона примет вид

$$\frac{dE}{dz} = 4\pi e N_i,$$

причем плотности электронов и ионов удовлетворяют уравнениям баланса

$$\begin{aligned}\frac{dN_e}{dt} = 0 &= \frac{d}{dz} (\omega_e N_e) + \alpha \omega_e N_e, \\ \frac{dN_i}{dt} = 0 &= - \frac{d}{dz} (\omega_i N_i) + \alpha \omega_e N_e.\end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим

$$N_i = N_0 \frac{e^{\alpha L} - e^{\alpha z}}{e^{\alpha L} - 1},$$

где  $N_0$  — плотность ионов на катоде. На основании соотношения (6.26) плотность ионов можем представить в виде

$$N_i = N_0 \gamma (e^{\alpha L} - e^{\alpha z}) = N_0 [1 + \gamma (1 - e^{\alpha z})].$$

Подставляя это в уравнение Пуассона и решая его, получим

$$\begin{aligned}E(z) &= E(0) + 4\pi e N_0 \left[ z + \gamma z - \frac{\gamma (e^{\alpha z} - 1)}{\alpha} \right], \\ U(z) &= E(0) z + 4\pi e N_0 \left[ (1 + \gamma) \frac{z^2}{2} + \frac{\gamma}{\alpha} z - \frac{\gamma}{\alpha^2} (e^{\alpha z} - 1) \right],\end{aligned}$$

причем  $U(0) = 0$ . Отсюда найдем для разности потенциалов между электродами, используя  $\gamma \ll 1$ ,  $\alpha^2 L^2 \gg 1$ :

$$U(L) = E(0) L + 2\pi e N_0 L^2.$$

Используем условие самостоятельности разряда. Имеем

$$\int_0^L \alpha dz = \ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right).$$

Введем потенциал зажигания разряда  $U_{\text{зак}}$  в случае малых токов, равный  $U_{\text{зак}} = E(0) L$ . Как было получено при решении уравнения Пуассона,

$$E(z) = \frac{U(L)}{L} + 4\pi e N_0 \left( z - \frac{L}{2} \right).$$

Представим разность потенциалов между электродами в виде  $U(L) = U_{\text{зак}} + \Delta U$ . Обозначим при  $E = U_{\text{зак}}/L$ :  $\alpha_0 = \alpha$ ,  $\alpha'_0 = d\alpha/dE$ ,  $\alpha'' = d^2\alpha/dE^2$ . Получим из условия самостоятельности разряда

$$\begin{aligned}\int_0^L \alpha dz &= \alpha_0 L + \int_0^L \left[ 4\pi N_0 e \left( z - \frac{L}{2} \right) - \frac{\Delta U}{2} \right] \alpha'_0 dz + \\ &+ \int_0^L \left[ 4\pi N_0 e \left( z - \frac{L}{2} \right) - \frac{\Delta U}{2} \right]^2 \frac{\alpha''_0}{2} dz = \ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right).\end{aligned}$$

Так как при малых токах условие самостоятельности разряда имеет вид  $\alpha_0 L = \ln(1 + 1/\gamma)$ , находим отсюда

$$-\alpha_0' \Delta U + \frac{2}{3} \pi^2 N_0^2 e^2 L^3 \alpha_0'' + \frac{\alpha_0'' (\Delta U)^2}{2L} = 0.$$

Поскольку  $\alpha_0'' \sim \alpha_0'/E \sim \alpha_0' L/U_{\text{зак}}$ , то отношение последнего члена в этом выражении к первому оказывается порядка  $\Delta U/U_{\text{зак}} \ll 1$ . Пренебрегая последним слагаемым, получаем

$$\Delta U = \frac{2}{3} \frac{\alpha_0''}{\alpha_0'} \pi^2 N_0^2 e^2 L^3.$$

Свяжем понижение потенциала с разрядным током. Полный ток равен сумме ионного и электронного токов, которые в силу сохранения заряда в газовом промежутке равны. Поэтому плотность тока  $j = 2j_i = 2e\omega_i N_i$  при одинаковых размерах катода и анода. Отсюда  $N_0 = j/2e\omega_i$ , так что

$$\Delta U = U_{\text{зак}} - U = \frac{\pi^2 \alpha_0''}{6\alpha_0'} j^2 L^3. \quad [(6.31)]$$

Обычно  $\alpha_0' > 0$ ,  $\alpha_0'' > 0$  (например, для зависимости (6.28) при малых напряженностях поля). Поэтому с ростом тока разность потенциалов между электродами уменьшается.

**Задача 6.36.** Сравнить размер газового промежутка темного разряда с радиусом Дебая—Гюккеля.

Будем пренебрегать упругими потерями энергии электрона в атомном газе. Тогда электрон, движущийся в одноатомном газе в электрическом поле, набирает энергию до тех пор, пока эта энергия не окажется порядка энергии возбуждения атома. Затем электрон возбуждает или ионизует атом и теряет свою энергию. Как видно, при пренебрежении упругими потерями средняя энергия электрона оказывается порядка энергии возбуждения атома. Если упругие потери малы, то первый коэффициент Таунсенда определяется соотношением  $\alpha = eE\kappa/I$ , где  $I$  — потенциал ионизации атома,  $\kappa < 1$  — часть неупруго потерянной энергии электрона, затраченная на ионизацию атома; по определению  $1/\alpha$  — расстояние, при прохождении которого электрон создает одну пару заряженных частиц.

Поскольку  $\alpha L \geq 1$ , то напряженность поля связана с размером разрядного промежутка  $L$  соотношением

$$eEL \geq \frac{I}{\kappa} \geq \frac{T}{\kappa},$$

( $T$  — средняя энергия электронов). Согласно определению темного разряда в нем можно пренебречь пространственным зарядом, т. е. в уравнении Пуассона  $dE/dz = 4\pi eN_i$  правая часть мала по срав-

нению с величиной  $E/L$ . Это дает, что  $eE \gg 4\pi N_0 e^2 L$  или, если воспользоваться оценкой для напряженности поля  $eE \geq T/L$ , получим

$$L \ll r_D,$$

где  $r_D = \sqrt{T/8\pi N_0 e^2}$  — радиус Дебая — Гюккеля.

Таким образом, темный разряд реализуется в случае, когда радиус Дебая — Гюккеля для возникающей в газовом промежутке плазмы много больше размеров газоразрядного промежутка.

**Задача 6.37.** В пространстве между двумя плоскими электродами под действием внешнего источника излучения создаются заряженные частицы,  $dN/dt$  пар в единице объема в единицу времени. Длина пробега зарядов мала по сравнению с расстоянием  $L$  между электродами, к которым приложена разность потенциалов  $U$ . Найти распределение потенциала в пространстве между электродами, если подвижность электронов и ионов равна  $K_e$  и  $K_i$  соответственно ( $K_e \gg K_i$ ).

Так как система находится в стационарном состоянии, то из уравнения непрерывности для плотности электронов имеем

$$\frac{dN}{dt} - \frac{dj_e}{e dx} = 0, \quad j_e = \frac{e dN}{dt} x.$$

Здесь  $x$  — координата, отсчитанная от катода. При этом использовано, что на катоде заряженные частицы не образуются, так что  $j_e(0) = 0$ . Используя подобные соображения для ионов, получим для плотности тока ионов  $j_i = \frac{dN}{dt} e(L-x)$ . С другой стороны, ток электронов в точке  $x$  равен

$$j_e(x) = eK_e E(x) N_e(x),$$

где  $E$ ,  $N_e$  — напряженность электрического поля и плотность электронов в точке  $x$ . Используя полученное ранее выражение для  $j_e$ , получим соответственно для плотности электронов и плотности ионов в точке  $x$  следующие выражения:

$$N_e(x) = \frac{dN}{dt} x / (K_e E(x)), \quad N_i(x) = \frac{dN}{dt} (L-x) / (K_i E(x)).$$

Подставим это в уравнение Пуассона:

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi e (N_i - N_e) = \frac{4\pi e}{E} \frac{dN}{dt} \left( \frac{L-x}{K_i} - \frac{x}{K_e} \right).$$

Считая, что подвижность электронов и ионов не зависит от напряженности поля, получаем следующее соотношение для напряженности поля

$$E^2 = E_0^2 + 8\pi e \frac{dN}{dt} \left( -\frac{x^2}{2K_e} + \frac{2Lx - x^2}{2K_i} \right).$$

На основе этого соотношения найдем распределение потенциала между электродами, решая уравнение  $dU/dx = -E$  и используя граничные условия  $U=0$  при  $x=L$  и  $U=U_0$  при  $x=0$ . Это позволяет определить и константу интегрирования  $E_0$ , которая выражается через  $U_0$ , и другие параметры задачи.

**Задача 6.38.** Катод эмиттирует электроны, что создает электронный ток плотностью  $j$  между анодом и катодом. Разность потенциалов между анодом и катодом  $U_0$ . Определить распределение потенциала в промежутке между анодом и катодом в случаях, когда длина свободного пробега электрона много больше и много меньше длины промежутка  $L$ . Во втором случае подвижность электронов  $K$  считать не зависящей от напряженности поля.

Плотность тока электронов  $j$  постоянна по длине промежутка, ибо электроны не создаются и не уничтожаются внутри него, т. е.

$$j = eN(x)v(x) = \text{const},$$

где  $N(x)$  — плотность электронов,  $v(x)$  — скорость электронов в точке  $x$ . Если длина пробега электрона велика, так что столкновением электрона с частицами газа можно пренебречь, то  $v(x) = \sqrt{2Ue/m}$  ( $U$  — потенциал поля в точке  $x$ , причем у катода  $U(0) = 0$ ). Отсюда плотность электронов  $N(x) = \frac{j}{e\sqrt{2Ue/m}}$ . Умножая уравнение Пуассона  $dE/dx = -4\pi Ne$  на  $E = -dU/dx$ , получим

$$\frac{1}{2} \frac{dE^2}{dx^2} = \frac{4\pi j \sqrt{m}}{\sqrt{2eU}} \frac{dU}{dx} = \frac{8\pi j \sqrt{m}}{\sqrt{2e}} \frac{dU^{1/2}}{dx}; \quad E^2 = E_0^2 + \frac{8\pi j \sqrt{m}}{\sqrt{2eU}}.$$

Граничные условия этого уравнения могут быть двух типов, которые соответствуют двум разным физическим ситуациям. Данная задача описывает процессы, происходящие в электронной лампе — диоде. Граничные условия  $U=0$  при  $x=0$  и  $U=U_0$  при  $x=L$  отвечают случаю, когда внутреннее сопротивление источника, к которому подключен диод, много больше внутреннего сопротивления лампы. При этом все электроны, эмиттируемые катодом, попадают на анод, т. е. лампа работает в режиме насыщения. Другой режим осуществляется в случае, если лишь часть образующихся у катода электронов попадает на анод. При этом поле у катода недостаточно велико, так что часть электронов возвращается на катод и вблизи катода имеется облако электронов и ионов, т. е. создается область с высокой проводимостью. Тогда у катода электрическое поле равно нулю и уравнение нужно решать с граничным условием  $-E = dU/dx|_{x=0} = 0$ . Решение урав-



нения с указанными граничными условиями имеет вид

$$U = \left( \frac{9\pi \sqrt{m}}{\sqrt{2e}} j \right)^{2/3} x^{4/3},$$

т. е. в данном случае разность потенциалов между электродами  $U_0$  однозначно связана с плотностью тока

$$U_0 = \left[ \frac{9\pi \sqrt{m}}{\sqrt{2e}} j \right]^{2/3} L^{4/3}, \quad j = \frac{2}{9\pi} \left( \frac{e}{2m} \right)^{1/2} \frac{U_0^{2/3}}{L^2}.$$

Полученная зависимость носит название «закона трех вторых».

При малой длине свободного пробега электрона по сравнению с расстоянием между электродами имеем для плотности тока электронов  $j = eKN(x)E(x)$  и, решая уравнение Пуассона  $dE/dx = -4\pi eN(x)$ , получим

$$E^2(x) = E_0^2 + \frac{8\pi j}{K} x, \quad U = \frac{K}{12\pi j} \left[ \left( \frac{8\pi j x}{K} + E_0^2 \right)^{3/2} - E_0^3 \right],$$

причем использовано граничное условие  $U = 0$  при  $x = 0$ .

Если электронный ток значительно меньше тока насыщения, то другое граничное условие имеет вид  $E = 0$  при  $x = 0$ . При этом получаем решение уравнения в виде

$$U = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi j}{eK}} x^{3/2}, \quad j = \frac{9eK}{32\pi} \frac{U_0^2}{L^3}.$$

## 1. Сечение столкновения атомных частиц

Введем величины, которые характеризуют элементарный акт соударения двух частиц. Результатом соударения двух частиц является изменение направления движения сталкивающихся частиц. Если при этом внутреннее состояние частиц не изменяется, то рассеяние называется упругим, если внутреннее состояние одной или обеих сталкивающихся частиц изменяется, то мы имеем дело с неупругим рассеянием частиц. Введем сначала характеристику элементарного акта неупругого соударения частиц, причем нас будет интересовать только внутреннее состояние частиц, но не направление их движения.

Пусть рассматриваемая пробная частица пропускается через газ частиц другого сорта. В результате соударения пробной частицы с частицей газа происходит изменение внутреннего состояния пробной частицы с переходом ее из состояния 1 в состояние 2. Согласно характеру этого процесса вероятность нахождения пробной частицы в начальном состоянии 1  $W_1(t)$  в данный момент времени  $t$  с учетом перехода частицы в состояние 2 удовлетворяет такому же уравнению, что и уравнение радиоактивного распада:

$$\frac{dW_1}{dt} = -\nu_{12}W_1.$$

Здесь  $\nu_{12}$  — частота перехода пробной частицы из состояния 1 в состояние 2, которая служит характеристикой взаимодействия пробной частицы с газом частиц.

Неупругий переход происходит лишь после сильного взаимодействия пробной частицы с газом частиц. Поэтому частота перехода  $\nu_{12}$  пропорциональна отношению объема вблизи частицы газа, в котором осуществляется это сильное взаимодействие к объему, приходящемуся на одну частицу газа (естественно, это отношение много меньше единицы). Поскольку на одну частицу газа приходится объем  $1/N$ , где  $N$  — плотность частицы газа, то

$$\nu_{12} = Nk_{12}. \quad (\text{П}1.1)$$

Здесь  $k_{12}$  — константа скорости данного процесса, которая не зависит от плотности частиц газа и поэтому является характеристикой элементарного акта соударения двух частиц. В физике атомных столкновений чаще используют другую характеристику элементарного акта соударения двух частиц — сечение перехода  $\sigma_{12}$ , которое вводится на основе соотношения

$$\sigma_{12} = \frac{\nu_{12}}{Nv} = \frac{k_{12}}{v}, \quad (\text{П}1.2)$$

где  $v$  — относительная скорость соударения частиц. Так как  $Nv$  — поток частиц газа на пробную частицу, то сечение данного процесса определяется как отношение частоты перехода к потоку падающих частиц. Поскольку константа скорости процесса и сечение перехода зависят от относительной скорости сталкивающихся частиц, то обе эти величины в одинаковой степени могут служить характеристиками элементарного соударения двух частиц.

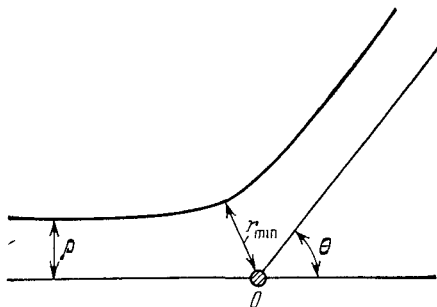
Сечению перехода можно дать следующую простую физическую интерпретацию. Давайте на плоскости расположим частицы газа, число которых  $n$  на единице площади. Если пробная частица пересекает эту плоскость, то вероятность перехода ее из состояния 1 в состояние 2 равна  $n\sigma_{12}$  ( $n\sigma_{12} \ll 1$ ). Отсюда видно, что характеристику  $\sigma_{12}$  можно действительно рассматривать

как эффективное сечение вблизи частицы газа, при попадании в которое пробной частицы происходит неупругий переход.

Расширим понятие сечения столкновения на случай, когда происходит изменение направления движения сталкивающихся частиц. При исследовании столкновения двух частиц удобно выделить движение центра инерции частиц, которое не изменяется в процессе столкновения, и рассеяние рассматривать в системе центра инерции сталкивающихся частиц. В этом случае проблема двух взаимодействующих частиц в отсутствие внешних полей сводится к задаче одной частицы с приведенной массой, движущейся в поле силового центра. Учитывая это, мы можем однозначно ввести понятие дифференциального сечения упругого или неупругого рассеяния в системе центра инерции. Дифференциальное сечение рассеяния частиц есть отношение числа актов рассеяния в единицу времени в элемент телесного угла к потоку падающих частиц.

Рассмотрим упругое рассеяние сталкивающихся частиц в классическом пределе, когда движение частиц описывается классическими законами. В системе центра инерции эта задача сводится к исследованию движения одной частицы с массой, равной приведенной массе сталкивающихся частиц. Потенциал взаи-

Рис. П1.1. Траектория относительного движения сталкивающихся частиц в системе центра инерции:  $O$  — центр инерции частиц, траектория — совокупность точек, представляющих собой вектор расстояния между сталкивающимися частицами;  $\rho$  — прицельный параметр соударения,  $\theta$  — угол рассеяния.



действия этой частицы с силовым центром равен потенциалу взаимодействия между сталкивающимися частицами. На рис. П1.1 представлены параметры столкновения при упругом рассеянии частиц.

При сферически симметричном потенциале взаимодействия частиц угол рассеяния  $\theta$  определяется прицельным параметром столкновения частиц  $\rho$ , причем при монотонной зависимости потенциала взаимодействия от расстояния между частицами зависимость угла рассеяния от прицельного параметра столкновения однозначная. Поэтому частицы, рассеиваемые в рассматриваемый элемент угла от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$  однозначно связаны с интервалом прицельного параметра соударения от  $\rho$  до  $\rho + d\rho$ .

Получим выражение для дифференциального сечения рассеяния частиц. Будем считать, что имеем поток частиц  $Nv$  ( $N$  — плотность частиц,  $v$  — их скорость), падающих на силовой центр. В рассматриваемый элемент телесного угла рассеиваются частицы с прицельным параметром, находящимся в интервале от  $\rho$  до  $\rho + d\rho$ . В этот интервал в единицу времени попадают частицы, находящиеся в объеме  $v \cdot 2\pi\rho d\rho$ , а число частиц, рассеиваемых в единицу времени в заданный элемент угла, равно  $Nv \cdot 2\pi\rho d\rho$ . Разделив эту величину на поток падающих частиц, для дифференциального сечения рассеяния получим

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho. \quad (\text{П1.3})$$

Это соотношение соответствует однозначной зависимости угла рассеяния от прицельного параметра соударения. В общем случае следует заменить соотношение (П1.3) суммой по отдельным ветвям зависимости  $\theta(\rho)$ .

Определим дифференциальное сечение рассеяния на малый угол. В этом случае движение частицы в поле силового центра происходит по прямолинейной траектории, так что ее расстояние от силового центра согласно закону свобод.

ного движения равно  $R = \sqrt{\rho^2 + v^2 t^2}$ . Сила, действующая на частицу со стороны силового центра в направлении, перпендикулярном траектории движения, равна  $\frac{\rho}{R} \left| \frac{\partial U}{\partial R} \right|$ , так что в конечном итоге частица приобретает в этом направлении импульс

$$\Delta p_{\perp} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{R} \left| \frac{\partial U}{\partial R} \right| dt = \frac{2\rho}{v} \int_0^{\infty} \left| \frac{\partial U}{\partial R} \right| \frac{dR}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}.$$

Отсюда находим угол рассеяния при прицельном параметре соударения  $\rho$ :

$$\theta \approx \frac{\Delta p_{\perp}}{p} = \frac{\rho}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \left| \frac{\partial U}{\partial R} \right| \frac{dR}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}. \quad (\text{П.1.4})$$

Здесь  $p = \mu v$  — импульс в системе центра инерций,  $v$  — приведенная масса сталкивающихся частиц,  $\varepsilon = \frac{\mu v^2}{2}$  — энергия частиц в системе центра инерций.

В частности, если  $U = C/R^n$ , то формула (П.1.4) дает  $\theta = A/\varepsilon \rho^n$ , и дифференциальное сечение рассеяния равно

$$d\sigma = 2\pi \rho d\rho = \frac{2\pi}{n} \left( \frac{A}{\varepsilon} \right)^{2/n} \frac{d\theta}{\theta^{1+2/n}}, \quad \text{где } A = \frac{C \sqrt{\pi} \Gamma(n/2 + 1/2)}{2\Gamma(n/2 + 1)}. \quad (\text{П.1.5})$$

В случае кулоновского взаимодействия частиц  $U = e^2/R$  отсюда получаем формулу Резерфорда:

$$d\sigma = \frac{2\pi A^2}{\varepsilon^2} \frac{d\theta}{\theta^3} = \frac{2\pi e^4}{\varepsilon^2} \frac{d\theta}{\theta^3} = \frac{\pi e^4 \Delta \varepsilon}{\varepsilon \Delta \varepsilon^2}, \quad (\text{П.1.6})$$

где  $\Delta \varepsilon = \Delta p_{\perp}^2 / 2\mu = \varepsilon \theta^2$  — энергия, которой обмениваются сталкивающиеся частицы в системе центра инерций.

Перейдем к определению интегральных сечений упругого рассеяния частиц. Они бывают двух типов. Один из них — сечение рассеяния на большие углы. Такого типа сечения входят в выражения для коэффициентов переноса — коэффициента диффузии, теплопроводности, вязкости, подвижности частиц, ибо сами процессы переноса при отсутствии неупругих процессов столкновения частиц определяются именно рассеянием частиц на большие углы. Сечения рассеяния на большие углы являются интегралами от дифференциального сечения рассеяния, причем малые углы рассеяния в эти выражения входят с малым весом. Например, наиболее распространенным сечением рассеяния на большие углы является диффузионное, или транспортное, сечение рассеяния, которое определяется следующим выражением:

$$\sigma^* = \int (1 - \cos \theta) d\sigma. \quad (\text{П.1.7})$$

Как видно, малые углы рассеяния входят в подынтегральное выражение с весом  $\theta^2/2$  и не вносят вклада в интеграл.

Получим оценку для сечения рассеяния на большие углы в классическом пределе. Основной вклад в сечение вносят углы рассеяния порядка единицы, а для этих углов рассеяния при расстояниях наибольшего сближения частиц взаимодействие достаточно сильное, т. е. потенциал взаимодействия частиц при этих расстояниях порядка их кинетической энергии. Поскольку величина расстояния наименьшего сближения частиц в этом случае порядка прицельного параметра столкновения, то сечение рассеяния на большие углы можно оценить на основе соотношения:

$$\sigma = \pi R_0^2, \quad \text{где } U(R_0) \sim \varepsilon. \quad (\text{П.1.8})$$

Здесь  $U(R)$  — потенциал взаимодействия сталкивающихся частиц при расстоянии  $R$  между ними,  $\varepsilon$  — энергия частиц в системе центра инерции.

Другим типом интегрального сечения столкновения частиц является полное сечение рассеяния

$$\sigma_n = \int d\sigma. \quad (\text{П1.9})$$

Полное сечение рассеяния частиц характеризует изменение фазы излучающего атома за счет соударения его с окружающими частицами газа и поэтому оно входит в выражение для ширины спектральной линии излучения или поглощения, если уширение спектральной линии обусловлено соударениями частиц.

Нетрудно убедиться, что в классическом пределе полное сечение рассеяния частиц обращается в бесконечность. Действительно, предполагая классический закон столкновения частиц, находим, что при любом прицельном параметре соударения имеет место рассеяние (пусть очень малое), т. е. интеграл (П1.9) равен бесконечности. Оценим полное сечение в случае, когда само движение частиц можно рассматривать как классическое движение частиц по траекториям. Классическое приближение нарушается при больших прицельных параметрах соударения там, где произведение момента соударения  $l$  на угол рассеяния  $\theta$  порядка единицы. Обрезав интеграл (П1.9) на этих прицельных параметрах, получим следующее соотношение для полного сечения рассеяния частиц:

$$\sigma_n = \pi \rho_n^2, \quad \text{где } l(\rho_n) \theta(\rho_n) \sim 1.$$

Раскроем полученное соотношение. Момент столкновения  $l(\rho) = \mu v \rho / \hbar$ . Здесь  $\mu$  — приведенная масса сталкивающихся частиц,  $v$  — относительная скорость,  $\rho$  — прицельный параметр соударения. Далее, согласно формуле (П1.4) угол рассеяния

$$\theta(\rho) \sim \frac{U(\rho)}{\varepsilon} \sim \frac{U(\rho)}{\mu v^2}.$$

Отсюда имеем следующую оценку для полного сечения рассеяния частиц:

$$\sigma_n = \pi \rho_n^2, \quad \text{где } \frac{\rho_n U(\rho_n)}{\hbar v} \sim 1. \quad (\text{П1.10})$$

Это соотношение справедливо, если сталкивающиеся частицы движутся по классическим законам, т. е. основной вклад в сечение вносят большие моменты столкновения частиц:

$$\frac{\mu v \rho_n}{\hbar} \gg 1. \quad (\text{П1.11})$$

Сравним сечение рассеяния частиц на большие углы и полное сечение рассеяния, считая, что движение частиц описывается классическими законами и что потенциал взаимодействия частиц монотонно убывает с увеличением расстояния между частицами. На основе соотношений (П1.9), (П1.10) и (П1.11) имеем

$$\frac{U(R_0)}{U(\rho_n)} \sim \frac{\mu v \rho_n}{\hbar} \gg 1,$$

т. е.  $\sigma_n \gg \sigma$  (полное сечение рассеяния заметно больше сечения рассеяния на большие углы).

В заключение рассмотрим рассеяние частиц на модельном потенциале, который имеет вид

$$U = \begin{cases} 0, & r > R_0, \\ \infty, & r \leq R_0. \end{cases} \quad (\text{П1.12})$$

Такая модель носит название модели твердых сфер и хорошо описывает столкновение атомов и молекул. Поэтому она получила широкое распространение в физической кинетике нейтральных газов. Рассеяние частиц в системе центра инерций в модели твердой сферы подобно упругому рассеянию точки от твердой сферической поверхности (рис. П1.2). Отсюда получаем соотношения для параметров столкновения: угол рассеяния  $\theta = \pi - 2\alpha$ , где  $\sin \alpha = \rho/R_0$ , т. е.  $\rho = R_0 \cos \theta/2$ . Это дает для дифференциального сечения рассеяния:

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = \frac{1}{2}\pi R_0^2 d\cos\theta. \quad (\text{П1.13})$$

Отсюда находим для диффузионного сечения рассеяния:

$$\sigma^* = \int (1 - \cos\theta) d\sigma = \pi R_0^2, \quad (\text{П1.14})$$

а также для сечения рассеяния на большие углы  $\sigma^{(2)}$ , определяемого по фор-

Рис П1.2. Рассеяние частиц в системе центра инерции для модели твердой сферы.

муле (1.34) и входящего в выражения для коэффициентов теплопроводности и вязкости (см. задачи 1.13, 1.18):

$$\sigma^{(2)} = \int (1 - \cos^2\theta) d\sigma = \frac{2}{3}\pi R_0^2. \quad (\text{П1.15})$$

Как видно, формулы (П1.14), (П1.15) находятся в соответствии с формулой (П1.8).

Если рассматриваемая пробная частица рассеивается в газе, то  $\nu \sim Nv\sigma$  — частота, с которой происходит рассеяние пробных частиц ( $N$  — плотность частиц газа,  $v$  — характерная скорость столкновения,  $\sigma$  — характерное сечение рассеяния на большой угол). Соответственно,  $\lambda \sim v/\nu \sim (N\sigma)^{-1}$  — длина пробега пробной частицы в газе, т. е. характерное расстояние, которое пробная частица проходит в газе без столкновений. Отметим, что таким способом мы определяем длину пробега лишь по порядку величины

## 2. Принцип детального равновесия

Принцип детального равновесия устанавливает соответствие между характеристиками элементарного процесса в прямом и обратном направлении протекания процесса. Это соответствие связано с симметрией системы относительно обращения знака времени. Выведем эту связь между характеристиками прямого и обратного процесса, исходя из микроскопического описания процесса.

Пусть переход системы из состояния 1 в состояние 2 или наоборот осуществляется в результате взаимодействия, описываемого оператором  $V$ . Вероятность перехода в единицу времени из одного состояния в другое равна

$$\omega_{12} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{12}|^2 \frac{dg_2}{d\varepsilon}, \quad (\text{П2.1})$$

где  $V_{12}$  — матричный элемент, взятый между рассматриваемыми состояниями,  $dg_2/d\varepsilon$  — статистический вес конечного состояния, приходящийся на единичный интервал энергии. Пусть каждое из состояний соответствует наличию двух частиц, столкновение которых приводит к рассматриваемым переходам. Поместим систему в пространстве объема  $\Omega$  и будем считать, что до и после столкновения в этом объеме имеется по одной частице каждого сорта. Тогда по определению сечений перехода между состояниями 1 и 2, обозначаемого как

$\sigma_{12}$ , и для сечения обратного перехода  $\sigma_{21}$  имеем

$$\begin{aligned}\omega_{12} &= \frac{2\pi}{\hbar} |V_{12}|^2 \frac{dg_2}{d\varepsilon} = \frac{v_1 \sigma_{12}}{\Omega}, \\ \omega_{21} &= \frac{2\pi}{\hbar} |V_{21}|^2 \frac{dg_1}{d\varepsilon} = \frac{v_2 \sigma_{21}}{\Omega},\end{aligned}\quad (\text{П2.2})$$

где  $v_1, v_2$  — относительные скорости столкновения в соответствующем канале реакции.

Принцип детального равновесия соответствует инвариантности гамильтониана относительно обращения знака времени, т. е. равенства матричных элементов  $|V_{12}| = |V_{21}|$ , которые отличаются заменой начального и конечного состояний. Учитывая это, получим следующее соотношение между сечениями прямого и обратного процессов:

$$v_1 \frac{dg_1}{d\varepsilon} \sigma_{12} = v_2 \frac{dg_2}{d\varepsilon} \sigma_{21}. \quad (\text{П2.3})$$

Рассмотрим частные случаи. При упругом столкновении двух частиц из формул (П2.3) имеем

$$\omega_{12} dg_1 = \omega_{21} dg_2. \quad (\text{П2.4})$$

Будем характеризовать состояние каждой частицы ее скоростью. Пусть  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  — скорости каждой частицы до столкновения,  $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$  — скорости сталкивающихся частиц после столкновения, так что состоянию 1 соответствуют скорости частиц  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , состоянию 2 — скорости частиц  $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ . Введем величину  $W(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)$ , которая является константой скорости процесса, отвечающего столкновению частиц со скоростями  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  и их рассеянию со скоростями  $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ . Эта величина пропорциональна вероятности перехода в единицу времени  $\omega_{12}$ , относящейся к одной частице того и другого сорта, и поскольку статистический вес состояний непрерывного спектра пропорционален интервалу скоростей рассматриваемых частиц, то соотношение (П2.4) может быть записано в виде

$$W(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = W(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2 \rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2, \quad (\text{П2.5})$$

Это соотношение включает в себе принцип детального равновесия при упругом соударении частиц. Если учесть, что  $d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}'_2$ , получим

$$W(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2) = W(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2 \rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \quad (\text{П2.6})$$

Для неупругого процесса столкновения частиц

$$A + B \rightleftharpoons A + B^* \quad (\text{П2.7})$$

статистический вес начального состояния процесса в формуле (П2.3) равен

$$dg_1 = g_A g_0 \frac{\Omega d\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Здесь  $g_A$  — статистический вес частицы  $A$ ,  $g_0$  — статистический вес частицы  $B$  в нижнем состоянии, третий множитель представляет собой статистический вес непрерывного спектра, отвечающий относительному движению частиц в первом канале. При этом  $\Omega$  — фиктивный объем, в который помещена система сталкивающихся частиц,  $\mathbf{p}_1$  — импульс относительного движения частиц в начальном канале столкновения. Движение центра масс исключено из рассмотрения. Используя подобное выражение для статистического веса системы после столкновения, приводим соотношение (П2.3) для процесса (П2.7) к следующему виду:

$$v_1 d\mathbf{p}_1 g_0 \sigma_{\text{возб}}(v_1) = v_2 d\mathbf{p}_2 g_B \sigma_{\text{г.ш}}(v_2).$$

Здесь  $g_B$  — статистический вес возбужденного состояния частицы  $B$ ,  $\sigma_{\text{возб}}$  — сечение возбуждения, совпадающее с величиной  $\sigma_{12}$  в формуле (П2.3),  $\sigma_{\text{туш}} \equiv \equiv \sigma_{21}$  — сечение тушения.

Используем закон сохранения энергии при рассматриваемом процессе (П2.7):

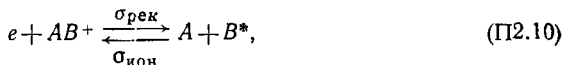
$$\frac{\mu v_1^2}{2} = \frac{\mu v_2^2}{2} + \Delta \varepsilon, \quad (\text{П2.8})$$

где  $\mu$  — приведенная масса сталкивающихся частиц,  $v_1, v_2$  — относительная скорость их движения до и после соударения,  $\Delta \varepsilon$  — энергия возбуждения. Отсюда следует  $v_1 dv_1 = v_2 dv_2$ , так что соотношение между сечениями возбуждения и тушения приводится к виду:

$$g_0 v_1^2 \sigma_{\text{возб}}(v_1) = g_B v_2^2 \sigma_{\text{туш}}(v_2), \quad (\text{П2.9})$$

причем относительные скорости частиц до и после столкновения связаны законом сохранения энергии (П2.8).

Исследуем процессы неупругого столкновения частиц, когда приведенная масса частиц изменяется в процессе перехода. Частным случаем таких процессов являются диссоциативная рекомбинация и обратный ему процесс — ассоциативная ионизация:



где  $\sigma_{\text{рек}}$  — сечение диссоциативной рекомбинации,  $\sigma_{\text{ион}}$  — сечение ассоциативной ионизации. Пользуясь принципом детального равновесия (П2.3), имеем следующее соотношение между этими сечениями:

$$v_e g_e g_{AB} + \frac{\Omega d p_e}{(2\pi \hbar)^3} \sigma_{\text{рек}} = v_{\text{отн}} g_A g_B \frac{\Omega d p_{\text{отн}}}{(2\pi \hbar)^3} \sigma_{\text{ион}}.$$

Здесь  $g_i$  — статистический вес соответствующей частицы,  $v_e, p_e$  — скорость и импульс электрона,  $v_{\text{отн}}$  — относительная скорость атомов,  $p_{\text{отн}}$  — импульс относительного движения атомов. Закон сохранения энергии для рассматриваемого процесса имеет следующий вид:

$$\frac{m v_e^2}{2} = \frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2} + \Delta \varepsilon,$$

где  $m$  — масса электрона,  $\mu$  — приведенная масса ядер,  $\Delta \varepsilon$  — изменение внутренней энергии для данного процесса. Из этих соотношений получаем ( $v_e dp_e = v_{\text{отн}} dp_{\text{отн}}$ ):

$$m^2 v_e^2 g_e g_{AB} + \sigma_{\text{рек}}(v_e) = \mu^2 v_{\text{отн}}^2 g_A g_B \sigma_{\text{ион}}(v_{\text{отн}}). \quad (\text{П2.11})$$

Другой процесс рассматриваемого типа, при котором приведенная масса сталкивающихся частиц меняется — излучательная рекомбинация двух частиц и обратный ему процесс — фотораспад связанного состояния. Типичный пример такого типа — процесс



здесь  $\sigma_{\text{рек}}$  — сечение фоторекомбинации,  $\sigma_{\text{ион}}$  — сечение фотоионизации. Для этих процессов соотношение (П2.3) и закон сохранения энергии имеют вид

$$v_e g_e g_A + \frac{\Omega d p_e}{(2\pi \hbar)^3} \sigma_{\text{рек}} = c g_A \frac{\Omega \cdot 2d k}{(2\pi)^3} \sigma_{\text{ион}}, \quad \frac{m v_e^2}{2} + J = \hbar \omega.$$



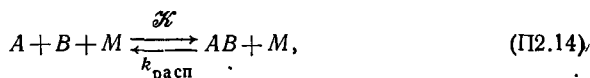
Здесь  $g_e$ ,  $g_{A^+}$ ,  $g_A$ , 2 — статистические веса электрона, иона, атома и фотона,  $c$  — скорость света,  $J$  — потенциал ионизации атома,  $\hbar\omega$  — энергия фотона,  $k$  — волновой вектор фотона, связанный с частотой  $\omega$  дисперсионным соотношением  $\omega = kc$ . Остальные обозначения те же, что и раньше. Отсюда получаем

$$\frac{m^2 v_e^2}{\hbar^2} g_e g_{A^+} \sigma_{\text{рек}} = 2 g_A k^2 \sigma_{\text{ион}}.$$

Или, вводя волновой вектор электрона  $q = mv_e/\hbar$ , приходим к соотношению ( $g_e = 2$ ):

$$\sigma_{\text{рек}} = \frac{g_A}{g_{A^+}} \frac{k^2}{q^2} \sigma_{\text{ион}}. \quad (\text{П}2.13)$$

В заключение рассмотрим принцип детального равновесия для процесса, при котором число частиц изменяется. Достаточно общим и важным процессом такого типа является процесс образования связанного состояния частиц при тройном столкновении и обратный ему — процесс распада связанных частиц на составляющие:



где частица  $M$  в прямом процессе уносит избыток энергии,  $\mathcal{K}$  — константа скорости тройного процесса,  $k_{\text{расп}}$  — константа скорости распада связанного состояния при парном соударении. Уравнение баланса для плотности частиц  $AB$  в рассматриваемом состоянии согласно уравнению реакции (П2.14) имеет вид

$$\frac{d[AB]}{dt} = \mathcal{K}[A][B][M] - k_{\text{расп}}[AB][M].$$

При наличии равновесия правая часть этого уравнения обращается в нуль, в частности, в случае термодинамического равновесия с температурой  $T$

$$\mathcal{K}(T)[A]_0[B]_0 = k_{\text{расп}}[AB]_0,$$

где индекс 0 означает термодинамически равновесные значения плотностей. Величина

$$K_{\text{равн}}(T) = \frac{[A]_0[B]_0}{[AB]_0}$$

носит название константы равновесия и зависит только от температуры газа \*). Как видно, из соотношения констант скорости прямого и обратного процессов, эти величины связаны через константу равновесия:

$$k_{\text{расп}}(T) = \mathcal{K}(T) K_{\text{равн}}(T). \quad (\text{П}2.15)$$

Хотя это соотношение получено с использованием термодинамического равновесия в системе, оно справедливо и в случае, когда термодинамическое рав-

\*) В частности, в случае равновесия  $e + A^+ \rightleftharpoons A$  константа равновесия согласно распределению Саха (2.14) равна

$$K_{\text{равн}}(T) = \frac{g_e g_{A^+}}{g_A} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-J/T},$$

где  $g_i$  — статистический вес  $i$ -й частицы,  $J$  — потенциал ионизации атома  $A$ .

новесие по процессу (П2.14) отсутствует. Термодинамическое равновесие по этому процессу было использовано нами лишь как прием, позволяющий определить связь между константами скоростей. Поэтому соотношение (П2.15) справедливо при любом соотношении между плотностями частиц в свободном и связанном состоянии, но подразумевает, что функция распределения сталкивающихся частиц по скоростям — максвелловская, отвечающая температуре  $T$ .

### 3. Условия газовой системы частиц и идеальности плазмы

Система частиц является газом, если каждая частица этой системы основное время проводит как свободная. В этом случае потенциал взаимодействия между двумя частицами при расстоянии между ними порядка среднего расстояния между ближайшими частицами  $N^{-1/3}$  ( $N$  — плотность частиц) много меньше средней кинетической энергии частиц, которая порядка тепловой энергии  $T$ . Таким образом, критерий газовой системы частиц имеет вид

$$U(N^{-1/3}) \ll T, \quad (\text{П3.1})$$

$U(R)$  — потенциал взаимодействия двух частиц системы при расстоянии  $R$  между ними.

Подойдем к определению критерия газовой системы по-другому. Введем длину пробега пробной частицы в газе:

$$\lambda \sim \frac{1}{N\sigma}, \quad (\text{П3.2})$$

где  $\sigma$  — сечение рассеяния на большой угол при соударении пробной частицы на частице газа. Длина пробега частицы представляет собой характерное расстояние, которое пробная частица проходит между соседними соударениями с частицами газа. Отсюда газ можно определить как систему частиц с длиной пробега отдельной частицы, много большей характерного расстояния между частицами.  $R_0$ , при котором имеет место сильное взаимодействие между частицами:

$$\lambda \geq R_0, \text{ где } U(R_0) \sim T.$$

Используя определение сечения рассеяния на большой угол (П1.8) и длины свободного пробега (П3.2), получаем отсюда критерий газовой системы частиц

$$N\sigma^{3/2} \ll 1, \quad (\text{П3.3})$$

где  $\sigma$  — сечение рассеяния двух частиц на большой угол при энергии столкновения порядка тепловой энергии частиц  $T$ .

Сравним критерий газовой системы частиц (П3.1) и (П3.3). Будем считать, что потенциал парного взаимодействия частиц  $U(R)$  монотонно убывает с увеличением расстояния  $R$  между ними. Согласно определению сечения рассеяния на большой угол (П1.8) имеем  $U(\sqrt{\sigma}) \sim T$ . Если сравнить это соотношение и соотношение (П3.1), то из неравенства (П3.1) получим, что расстояние  $\sqrt{\sigma}$  много меньше среднего расстояния между частицами  $N^{-1/3}$ . Это совпадает с критерием (П3.3), т. е. критерии газовой системы частиц, определяемые соотношениями (П3.1) и (П3.3), одинаковы.

При рассмотрении плазмы мы будем считать ее идеальной, если взаимодействие заряженных частиц удовлетворяет критерию газовой системы частиц. Будем считать, что плазма состоит из однократно заряженных ионов и электронов. Потенциал взаимодействия заряженных частиц кулоновский и при расстоянии  $R$  между ними равен  $|U(R)| = e^2/R$  ( $e$  — заряд электрона). Используя этот потенциал взаимодействия частиц в критериях газовой системы частиц (П3.1)

и (ПЗ.3), получим следующий критерий идеальности плазмы:

$$\frac{N_e e^6}{T^3} < 1, \quad (\text{ПЗ.4})$$

где  $N_e$  — плотность заряженных частиц. При этом формулы (ПЗ.1) и (ПЗ.3) приводят к одинаковому критерию идеальности плазмы (ПЗ.4).

#### 4. Уширение спектральных линий

Пусть газ состоит из атомов или молекул, для которых возможен излучательный переход между двумя состояниями с разностью энергий  $\hbar\omega_0$ . Введем функцию распределения  $a_\omega$  для испускаемых фотонов по частотам, так что  $a_\omega d\omega$  представляет собой вероятность того, что в процессе излучения испускается фотон с частотой, находящейся в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . В частности, в рассмотренном случае излучательного перехода между двумя состояниями атомной частицы в масштабе частот  $\omega_0$   $a_\omega = \delta(\omega - \omega_0)$ . Это означает, что в результате данного излучательного перехода испускаются фотоны только с энергией  $\hbar\omega_0$ . То же самое относится и к поглощению — при прохождении излучения через данный газ в результате рассматриваемого перехода поглотятся только фотоны с энергией  $\hbar\omega_0$ .

На самом деле из-за различных процессов, протекающих в газе, излучение и поглощение за счет рассматриваемого перехода сосредоточено в некоторой области частот вблизи  $\omega_0$ . Распределение испускаемых или поглощаемых фотонов по частотам, описываемое функцией  $a_\omega$ , определяет характер поглощения и прохождения фотонов через газ. Далее наша задача состоит в выделении наиболее характерных механизмов уширения спектральных линий и определении функции распределения фотонов по частотам для каждого из них. При этом мы будем иметь дело с не очень большими потоками излучения, так что распределение фотонов по частотам не зависит от интенсивности излучения.

Простейший механизм уширения спектральной линии связан с движением атомов и носит название доплеровского уширения спектральной линии. Согласно закону Доплера фотон с частотой  $\omega_0$ , который испускается атомом, движущимся навстречу приемнику излучения со скоростью  $v_x$ , воспринимается им как фотон с частотой  $\omega = \omega_0(1 + v_x/c)$ , где  $c$  — скорость света. Поэтому излучение, испускаемое совокупностью атомов, будет сосредоточено в некотором интервале частот в соответствии с распределением атомов по скоростям.

Пусть  $f(v_x) dv_x$  — вероятность того, что компонента скорости атома сосредоточена в интервале от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ , причем  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) dv_x = 1$ . Тогда, учитывая однозначную связь между скоростью атома и частотой испускаемого фотона, имеем

$$a_\omega d\omega = f(v_x) dv_x,$$

откуда

$$a_\omega = \frac{c}{\omega_0} f\left[\frac{c}{\omega_0}(\omega - \omega_0)\right].$$

В частности, для максвелловской функции распределения атомов по скоростям получим

$$a_\omega = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{Mc^2}{2\pi T}} \exp\left[-\frac{Mc^2}{2T} \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2}\right], \quad (\text{П4.1})$$

где  $M$  — масса излучающих атомов.

Как видно, характерная ширина спектральной линии в данном случае  $\Delta\omega \sim \omega_0 \sqrt{T/Mc^2}$  мала по сравнению с частотой испускаемого фотона, ибо тепловая скорость атомов много меньше скорости света. Рассмотренный механизм уширения спектральной линии называется доплеровским уширением.

Другие механизмы уширения обусловлены взаимодействием излучаемой или поглощающей атомной частицы с окружающими ее частицами газа. Рассмотрим сначала случай, когда сильное взаимодействие излучающей атомной частицы с окружающими частицами газа происходит в течение малого промежутка времени по сравнению со временем, характеризующим уширение. Это имеет место, если на излучающую частицу время от времени налетает возмущающая частица, причем время соударения возмущающей частицы с излучающей атомной частицей много меньше времени между соседними соударениями. Рассматриваемый случай уширения спектральной линии носит название ударного уширения.

Введем амплитуду электромагнитного поля  $\varphi(t)$ , которая представляет собой напряженность электрического или магнитного поля для электромагнитной волны. Фурье-компонента от амплитуды поля  $\varphi_\omega$  характеризует спектральный состав излучения, причем функция распределения фотонов по частотам является квадратичной функцией амплитуды  $a_\omega \sim |\varphi_\omega|^2$ .

Рассмотрим для примера простейший случай, когда данный переход сопровождается слабым затуханием из-за конечного времени жизни состояний, между которыми происходит переход. Тогда получим для амплитуды электромагнитного поля

$$\varphi(t) \sim e^{i\omega_0 t} - \nu t,$$

где  $\omega_0$  — частота рассматриваемого перехода, величина  $\nu$  характеризует затухание, причем  $\nu \ll \omega_0$ . Отсюда

$$\varphi_\omega \sim \frac{1}{\nu + i(\omega - \omega_0)},$$

$$a_\omega \sim \frac{1}{\nu^2 + (\omega - \omega_0)^2}.$$

Из условия нормировки функции распределения фотонов

$$\int a_\omega d\omega = 1$$

находим

$$a_\omega = \frac{\nu}{\pi [\nu^2 + (\omega - \omega_0)^2]}. \quad (\text{П4.2})$$

Полученная форма линии носит название лоренцевской формы линии.

Вернемся к ударному уширению спектральной линии. В этом случае основное время атомная частица излучает как свободная, так что амплитуда возникающей при этом электромагнитной волны с точностью до фазы равна  $e^{i\omega_0 t}$ . В момент соударения происходит сдвиг частоты поля, но поскольку длительность соударения мала, оно в конечном итоге приводит к сдвигу фазы волны. Тем самым амплитуду электромагнитной волны можно представить в виде

$$\varphi(t) \sim \exp \left[ i\omega_0 t + i \sum_k \chi_{k\eta} (t - t_k) \right].$$

Здесь  $\eta(x)$  — единичная функция, т. е.  $\eta(x) = 0$ , если  $x < 0$  и  $\eta(x) = 1$ , если  $x > 0$ ;  $\chi_k$  — изменение фазы в результате  $k$ -го соударения,  $t_k$  — момент  $k$ -го

соударения. Компонента Фурье от этого выражения равна

$$\Phi_{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-i\omega t} dt \sim \sum_k \frac{(1 - e^{i\omega_0 \tau_k})}{(\omega - \omega_0)} \exp \left[ i \left( \sum_{j < k} \chi_j + \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

где  $\tau_k$  — промежуток времени между  $k$ -м и  $(k+1)$ -м соударением.

При нахождении функции распределения фотонов по частотам  $a_{\omega} \sim |\Phi_{\omega}|^2$  усредним ее по фазам  $\chi_k$ , на которые происходит сдвиг в результате данного соударения. Будем считать, что величины  $\chi_k$  носят случайный характер и не малы, так что средняя величина  $\exp i(\chi_k - \chi_j) = \delta_{jk}$ , т. е. равна 0, если  $j \neq k$  и равна 1, если  $j = k$ . Учитывая, что  $|1 - e^{ix}|^2 = 2(1 - \cos x)$ , получим для функции распределения излучаемых фотонов по частотам:

$$a_{\omega} = \frac{C}{(\omega - \omega_0)^2} \langle 1 - \cos(\omega - \omega_0)t \rangle, \quad (\text{П4.3})$$

здесь  $C$  — нормированный множитель,  $t$  — время между соседними соударениями, Угловые скобки означают усреднение по времени между соседними соударениями. Проведем это усреднение.

Введем  $W(t)$  — вероятность того, что первое соударение излучающей частицы с окружающими ее частицами газа произошло через время  $t$  после выделенного начального момента. По своему смыслу эта функция удовлетворяет уравнению  $dW/dt = -vW$  ( $v$  — частота соударений) и в соответствии с начальным условием ( $W(0) = 1$ ) равна  $W(t) = e^{-vt}$ . Отсюда вероятность того, что соударение произойдет в интервал времени от  $t$  до  $t + dt$ , равна  $|dW/dt| dt = e^{-vt} v dt$ , откуда находим, в частности, среднее время между соседними соударениями:

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} t \left| \frac{dW}{dt} \right| dt = \frac{1}{v}.$$

На основе этого формула (П4.3) для функции распределения испускаемых фотонов по частотам с учетом условия ее нормировки преобразуется к виду

$$a_{\omega} = \frac{v}{\pi [v^2 + (\omega - \omega_0)^2]}. \quad (\text{П4.4})$$

Таким образом, ударное уширение, как и уширение при наличии затухания, описывается лоренцевской формой линии. Формулы (П4.2) и (П4.4) совпадают с точностью до определения величины  $v$ .

Параметр  $v$  в формуле (П4.4) по порядку величины равен

$$v \sim Nv\sigma, \quad (\text{П4.5})$$

где  $N$  — плотность частиц газа,  $v$  — характерная скорость соударения,  $\sigma$  — сечение столкновения. Будем считать, что уширение спектральной линии излучения при ударном механизме уширения определяется только верхним состоянием перехода излучающей атомной частицы.

Выясним при этом, какой тип сечения столкновения частиц входит в формулу (П4.5), считая при этом, что сталкивающиеся частицы движутся по классическому закону. Как следует из характера ударного уширения, основной вклад в сечение  $\sigma$  вносят прицельные параметры соударения, при которых сдвиг фазы  $\chi$  порядка единицы. Отсюда  $\sigma \sim \rho_{\Phi\Phi}^2$ , причем при при-

цельном параметре соударения  $\rho_{\text{эфф}}$  имеем

$$\int \frac{U(R) dt}{\hbar} \sim 1,$$

где  $U(R)$  — потенциал взаимодействия возмущающего атома с излучающим атомом в верхнем состоянии. Учитывая прямолинейность траектории при данном прицельном параметре соударения имеем

$$\int \frac{U(R)}{\hbar} dt \sim \frac{\rho U(R)}{\hbar v},$$

т. е. само сечение по порядку величины равно

$$\sigma \sim \rho_{\text{эфф}}^2, \text{ где } \frac{\rho_{\text{эфф}} U(\rho_{\text{эфф}})}{\hbar v} \sim 1.$$

Таким образом, сечение уширения спектральной линии совпадает с полным сечением (П1.10) столкновения излучающей атомной частицы с частицей газа.

Представим критерий применимости для ударного уширения спектральной линии. Необходимо, чтобы время прохождения частицами области размера  $\rho_{\text{эфф}}$ , где происходит рассеяние, было много меньше времени между соседними соударениями, т. е.

$$\frac{\rho_{\text{эфф}}}{v} \ll (N\sigma_{\text{п}})^{-1}.$$

Здесь  $\sigma_{\text{п}}$  — полное сечение соударения. Тогда

$$N\sigma_{\text{п}}^{3/2} \ll 1, \quad (\text{П4.7})$$

что является критерием применимости ударной теории уширения в той области частот, где в основном излучаются фотоны.

Рассмотрим теперь предельно противоположный случай по отношению к ударному уширению спектральной линии, испускаемой находящейся в газе возбужденной атомной частицей. При этом будем считать, что за характерные времена, в течение которых создается рассматриваемое уширение, возмущающие частицы не успевают сдвинуться на заметное расстояние. Тогда возмущающие частицы можно считать неподвижными и наблюдаемый сдвиг спектральной линии получим из соотношения

$$\omega - \omega_0 = \frac{1}{\hbar} \sum_i V(R_i), \quad (\text{П4.8})$$

где  $V$  — разность потенциалов взаимодействия излучающего атома в верхнем и нижнем состояниях с возмущающей частицей,  $R_i$  — координата  $i$ -й частицы, если за начало координат принято ядро излучающего атома.

Формула (П4.8) дает сдвиг спектральной линии при заданной конфигурации возмущающих частиц. Чтобы определить функцию распределения  $a_{\omega}$  испускаемых фотонов по частотам, необходимо усреднить выражение (П4.8) по этим конфигурациям. Поскольку в газе взаимодействие частиц носит парный характер, то из формулы (П4.8) нетрудно оценить характерные величины сдвига и ширины спектральной линии, которые одного порядка. Эти величины представляют собой сдвиг частоты из-за парного взаимодействия излучающей частицы и частицы газа на среднем расстоянии между ними:

$$\nu \sim \frac{1}{\hbar} V(N^{-1/3}). \quad (\text{П4.9})$$

Поскольку вероятность нахождения возмущающей частицы в интервале расстояний от  $R$  до  $R + dR$  от излучающего атома равна  $4\pi R^2 dR N$ , то функция распределения фотонов по частотам на крыле спектральной линии имеет вид

$$a_{\omega} d\omega = 4\pi R^2 dR N. \quad (\text{П4.10a})$$

При этом сдвиг линии  $\omega - \omega_0$  равен

$$\omega - \omega_0 = \frac{1}{\hbar} V(R). \quad (\text{П4.10б})$$

В частности, в случае  $V(R) = CR^{-n}$  формулы (П4.10) приводят к следующему выражению для функции распределения фотонов по частотам на крыле спектральной линии:

$$a_{\omega} d\omega = \frac{4\pi N C^{3/n}}{n} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^{1+3/n}}. \quad (\text{П4.11})$$

Представим критерий применимости статической теории уширения спектральной линии. Мы должны потребовать, чтобы за характерные времена, в течение которых создается уширение, конфигурация частиц не изменилась. В частности, для основной области частот фотонов в этом случае необходимо, чтобы за это время (порядка  $1/\nu$ ) частицы смещались на расстояния, малые по сравнению со средним расстоянием между ними. Это дает

$$\nu N^{1/3} \ll \nu \sim \frac{1}{\hbar} V(N^{-1/3}). \quad (\text{П4.12})$$

Сравним этот критерий с критерием применимости ударной теории уширения. Для этого рассмотрим случай, когда уширение определяется взаимодействием только с возбужденным состоянием излучающей атомной частицы, так что величина  $V$  в формуле (П4.12) совпадает с потенциалом взаимодействия  $U$  в формуле (П4.6) для возбужденного состояния излучающего атома и частицы газа. Представим критерий применимости статической теории уширения (П4.12) в виде

$$\frac{N^{-1/3} U(N^{-1/3})}{\hbar \nu} \gg 1$$

и сравним его с формулами (П1.10) и (П4.8). Как видно, для монотонно убывающего с расстоянием потенциала взаимодействия частиц отсюда следует

$$\sqrt{\sigma_{\Pi}} \gg N^{-1/3}.$$

Таким образом, критерий применимости статической теории уширения спектральной линии может быть представлен в виде

$$N \sigma_{\Pi}^{3/2} \gg 1. \quad (\text{П4.13})$$

Сравнивая это с критерием (П4.7), находим, что ударная и статическая теории уширения спектральных линий описывают диаметрально противоположные случаи уширения за счет взаимодействия излучающей частицы с окружающими ее частицами газа.

## 5. Справочные данные

## 1) Физические константы

Скорость света  
Постоянная Планка

Заряд электрона

Масса электрона

Масса протона

Атомная единица массы (а. е. м.)

Число Авогадро

Постоянная Стефана—Больцмана

$$c = 2,99792 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

$$h = 6,62618 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с},$$

$$\hbar = 1,05459 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$$

$$e = 4,8032 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС},$$

$$e^2 = 2,3071 \cdot 10^{-19} \text{ ед. СГС}$$

$$9,1095 \cdot 10^{-28} \text{ г}$$

$$1,6726 \cdot 10^{-24} \text{ г}$$

$$1,6605 \cdot 10^{-24} \text{ г}$$

$$6,0221 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$$\sigma = 5,669 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/(см}^2 \cdot \text{К}^4)$$

## 2) Переводные множители для единиц энергии

	эрг	эВ	кал/моль
эрг	1	$6,2418 \cdot 10^{11}$	$1,4395 \cdot 10^{16}$
эВ	$1,6021 \cdot 10^{-12}$	1	$2,3063 \cdot 10^4$
кал/моль	$6,9466 \cdot 10^{-17}$	$4,3359 \cdot 10^{-5}$	1
см <sup>-1</sup>	$1,9862 \cdot 10^{-16}$	$1,2398 \cdot 10^{-4}$	2,8592
град	$1,3806 \cdot 10^{-16}$	$8,6170 \cdot 10^{-5}$	1,9873
ридберг (Ry)	$1,1797 \cdot 10^{-11}$	13,605	$3,1377 \cdot 10^5$
	см <sup>-1</sup>	град	ридберг (Ry)
эрг	$5,0346 \cdot 10^{18}$	$7,2432 \cdot 10^{15}$	$4,5878 \cdot 10^{10}$
эВ	$8,0660 \cdot 10^3$	$1,1605 \cdot 10^4$	$7,3501 \cdot 10^{-2}$
кал/моль	0,34973	0,50319	$3,1870 \cdot 10^{-6}$
см <sup>-1</sup>	1	1,4386	$9,1127 \cdot 10^{-6}$
град	0,69509	1	$6,3344 \cdot 10^{-6}$
ридберг (Ry)	$1,0973 \cdot 10^5$	$1,5787 \cdot 10^5$	1



## 3) Простейшие соотношения в удобных единицах

Соотношение	Форма представления	Коэффициент пропорциональности $C$	Единицы измерения параметров
$v = \sqrt{2\varepsilon/M}$ — скорость, $\varepsilon$ — энергия, $M$ — масса частицы	$v = C\sqrt{\varepsilon/M}$ см/с	$5,931 \cdot 10^7$	$\varepsilon$ в эВ, $M$ в единицах массы электрона
$\bar{v} = \sqrt{8T/\mu}$ — средняя относительная скорость, $T$ — температура, $\mu$ — приведенная масса частиц	$\bar{v} = C\sqrt{T/\mu}$	$1,389 \cdot 10^6$ $5,506 \cdot 10^5$	$\varepsilon$ в эВ, $M$ в а. е. м. $\varepsilon$ в градусах К, $M$ в единицах массы электрона
$\omega = \varepsilon/h$ — частота, $\varepsilon$ — энергия фотона	$\omega = C\varepsilon$ с <sup>-1</sup>	$1,289 \cdot 10^4$ $1,455 \cdot 10^4$ $2,404 \cdot 10^5$	$\varepsilon$ в градусах К, $M$ в а. е. м. $T$ в К, $\mu$ в а. е. м. $T = 273$ К, $\mu$ в а. е. м.
$\omega = 2\pi c/\lambda$ — частота, $\lambda$ — длина электромагнитной волны, $c$ — скорость света	$\omega = C/\lambda$ с <sup>-1</sup>	$1,520 \cdot 10^{15}$ $1,885 \cdot 10^{11}$	$\varepsilon$ в эВ $\lambda$ в см
$\omega_0 = (4\pi N e^2/m)^{1/2}$ — плазменная частота электронов, $N$ — плотность электронов, $e$ — заряд, $m$ — масса электрона	$\omega_0 = C\sqrt{N}$ с <sup>-1</sup>	$5,642 \cdot 10^4$	$N$ в см <sup>-3</sup>
$r_D = (T/8\pi N e^2)^{1/2}$ — радиус Дебая — Гюккеля, $N$ — плотность заряженных частиц, $T$ — температура плазмы, $e$ — заряд электрона	$r_D = C\sqrt{T/N}$ см	$525,6$ $4,879$	$N$ в см <sup>-3</sup> , $T$ в эВ $N$ в см <sup>-3</sup> , $T$ в К
$\omega_H = eH/mc$ — ларморовская частота, $e$ — заряд, $m$ — масса электрона, $c$ — скорость света, $H$ — напряженность магнитного поля	$\omega_H = CH$ с <sup>-1</sup>	$1,759 \cdot 10^7$	$H$ в Гс

Соотношение	Форма представления	Коэффициент пропорциональности С	Единицы измерения параметров
$\omega_H = eH/Mc$ — ларморовская частота иона, $M$ — масса иона	$\omega_H = CH/M \text{ с}^{-1}$	9649	$H$ в Гс, $M$ в а.е.м.
$r_H = v/\omega_H$ — ларморовский радиус электрона, $v$ — скорость, $\omega_H$ — ларморовская частота электрона	$r_H = C\sqrt{\epsilon}/H \text{ см}$	3,372	$\epsilon$ в эВ, $H$ в Гс
$r_H = v/\omega_H$ — ларморовский радиус иона, $v$ — скорость, $\omega_H$ — ларморовская частота иона	$r_H = C\sqrt{\epsilon M}/H \text{ см}$	144	$\epsilon$ — энергия иона в эВ $M$ — масса иона в а.е.м. $H$ в Гс
$N = p/T$ — плотность частиц газа, $p$ — давление газа, $T$ — температура	$N = Cp/T \text{ см}^{-3}$	7,340 · 10 <sup>21</sup> 9,658 · 10 <sup>18</sup> 2,689 · 10 <sup>19</sup> 3,538 · 10 <sup>16</sup>	$p$ в атм, $T$ в К $p$ в Тор, $T$ в К $p$ в атм, $T = 273$ К $p$ в Тор, $T = 273$ К
$N_e e^6/T^3$ — параметр идеальности плазмы, $N_e$ — плотность электронов, $e$ — заряд электрона, $T$ — температура плазмы	$CN_e/T^3$	2,986 · 10 <sup>-21</sup> 4,668 · 10 <sup>-9</sup>	$N_e$ в см <sup>-3</sup> , $T$ в эВ, $N_e$ в см <sup>-3</sup> , $T$ в градусах К
$\mathcal{D}N = \frac{3\sqrt{\pi T}}{8\sqrt{2\mu\sigma}}$ ,	$\mathcal{D}N = C \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\mu\sigma}} \frac{1}{\mu\sigma \text{ см} \cdot \text{с}}$ $\mathcal{D} = \frac{C\sqrt{T} \text{ см}^2}{\sqrt{\mu\sigma} \text{ см} \cdot \text{с}}$	4,278 · 10 <sup>19</sup> 1,595	$T$ в К, $\mu$ в а.е.м., $\sigma$ в Å (10 <sup>-16</sup> см <sup>2</sup> ) то же, $N = 2,687 \cdot 10^{19}$ см <sup>-3</sup> — плотность при давлении 1 атм и температуре 0 °С

Соотношение	Форма представления	Коэффициент пропорциональности $C$	Единицы измерения параметров
Соотношение Эйнштейна $K = e\mathcal{D}/T$ , $K$ — подвижность, $\mathcal{D}$ — коэффициент диффузии, $e$ — заряд иона, $T$ — температура газа	$K = C \frac{\mathcal{D}}{T} \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$	11 606 42,51	$\mathcal{D}$ в $\text{см}^2/\text{с}$ , $T$ в $\text{К}$ то же, $T = 273 \text{ К}$
$\eta = \frac{5\sqrt{\pi T M}}{24\sigma_2}$ — вязкость газа в приближении Чепмена — Энского, $T$ — температура газа, $M$ — масса частицы газа, $\sigma_2$ — усредненное сечение,	$\eta = C \frac{\sqrt{T M}}{\sigma_2} \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}$	$5,591 \cdot 10^{-5}$	$T$ в $\text{К}$ , $M$ в а. е. м. $\sigma_2$ в $\text{Å}^2 (10^{-16} \text{ см}^2)$
$\kappa = \frac{25\sqrt{\pi T}}{32\sqrt{M} \sigma_2}$ — теплопроводность газа в приближении Чепмена — Энского, остальные обозначения те же, что и для $\eta$	$\kappa = C \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{M} \sigma_2} \frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{град}}$	$1,743 \cdot 10^{-3}$	$T$ в $\text{К}$ , $M$ в а. е. м. $\sigma_2$ в $\text{Å}^2 (10^{-16} \text{ см}^2)$
$K = \frac{3\sqrt{\pi e}}{8N\sqrt{2T\mu}\sigma}$ — подвижность иона в приближении Чепмена — Энского, $e$ — заряд иона, $N$ — плотность, $T$ — температура газа, $\mu$ — приведенная масса иона и молекулы газа	$K = \frac{C}{\sqrt{T\mu N\sigma}} \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$	$1,850 \cdot 10^4$	$T$ в $\text{К}$ , $\mu$ в а. е. м. $\sigma$ в $\text{Å}^2 (10^{-16} \text{ см}^2)$ , $N$ — плотность газа при давлении 1 атм и температуре $0^\circ\text{C}$
Параметр $\frac{eE}{TN\sigma}$ , $e$ — заряд электрона, $E$ — напряженность поля, $N$ — плотность, $T$ — температура газа, $\sigma$ — сечение соударения	$C = \frac{E}{TN\sigma}$	$1,160 \cdot 10^{20}$ 4,316	$E$ в $\text{В}/\text{см}$ , $T$ в $\text{К}$ , $\sigma$ в $\text{Å}^2$ , $N$ в $\text{см}^{-3}$ то же, $N$ соответствует давлению газа 1 атм и температуре $0^\circ\text{C}$

## 4) Теплоемкость (Дж/г·К) \*)

Газ	Температура, К						
	100	200	300	400	600	800	1000
H <sub>2</sub>	11,2	13,5	14,3	14,5	14,6	14,7	15,0
He	—	5,19	5,19	5,19	5,19	5,19	5,19
CH <sub>4</sub>	—	2,10	2,24	2,54	3,28	4,15	5,06
NH <sub>3</sub>	—	—	2,16	2,29	2,65	—	—
H <sub>2</sub> O	—	—	—	2,00	2,02	2,15	2,29
Ne	—	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03
Co	—	1,04	1,04	1,05	1,09	1,14	1,19
N <sub>2</sub>	1,07	1,04	1,04	1,04	1,08	1,12	1,17
Воздух	1,03	1,01	1,01	1,01	1,05	1,10	1,14
O <sub>2</sub>	0,962	0,915	0,920	0,942	1,00	1,05	1,09
Ar	0,550	0,524	0,522	0,521	0,521	0,520	0,520
CO <sub>2</sub>	—	—	0,851	0,942	1,08	1,17	1,23
Kr	—	—	0,249	0,249	0,248	0,248	0,248
Xe	—	—	0,160	0,159	0,159	0,158	0,158

\*) При давлении 1 атм.

5) Коэффициент теплопроводности (10<sup>-4</sup> Вт/(см·К) \*)

Газ	Температура, К						
	100	200	300	400	600	800	1000
H <sub>2</sub>	6,7	13,1	18,3	22,6	30,5	37,8	44,8
He	7,2	11,5	15,1	18,4	25,0	30,4	35,4
CH <sub>4</sub>	—	2,17	3,41	4,88	8,22	—	—
NH <sub>3</sub>	—	1,53	2,47	6,70	6,70	—	—
H <sub>2</sub> O	—	—	—	2,63	4,59	7,03	9,74
Ne	2,23	3,67	4,89	6,01	7,97	9,71	11,3
CO	0,84	1,72	2,49	3,16	4,40	5,54	6,61
N <sub>2</sub>	0,96	1,83	2,59	3,27	4,46	5,48	6,47
Воздух	0,93	1,83	2,62	3,28	4,69	5,73	6,67
O <sub>2</sub>	0,92	1,83	2,66	3,30	4,73	5,89	7,10
Ar	0,66	1,26	1,77	2,22	3,07	3,74	4,36
CO <sub>2</sub>	—	0,94	1,66	2,43	4,07	5,51	6,82
Kr	—	0,65	1,00	1,26	1,75	2,21	2,62
Xe	—	0,39	0,58	0,74	1,05	1,35	1,64

\*) При давлении 1 атм.

## 6) Коэффициент вязкости \*)

Газ	Температура, К						
	100	200	300	400	600	800	1000
H <sub>2</sub>	4,21	6,81	8,96	10,8	14,2	17,3	20,1
He	9,77	15,4	19,6	23,8	31,4	38,2	44,5
CH <sub>4</sub>	—	7,75	11,1	14,1	19,3	—	—
H <sub>2</sub> O	—	—	—	13,2	21,4	29,5	37,6
Ne	14,8	24,1	31,8	38,8	50,6	60,8	70,2
CO	—	12,7	17,7	21,8	28,6	34,3	39,2
N <sub>2</sub>	6,88	12,9	17,8	22,0	29,1	34,9	40,0
Воздух	7,11	13,2	18,5	23,0	30,6	37,0	42,4
O <sub>2</sub>	7,64	14,8	20,7	25,8	34,4	41,5	47,7
Ar	8,30	16,0	22,7	28,9	38,9	47,4	55,1
CO <sub>2</sub>	—	—	14,9	19,4	27,3	33,8	39,5
Kr	—	—	25,6	33,1	45,7	54,7	64,6
Xe	—	—	23,3	30,8	43,6	54,7	64,6

\*) Вязкость приводится в  $10^{-5}$  пуаз (1 Пу = 1 г/(см·с)) и относится к давлению газа, равному 1 атм. Данные взяты из книги: Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. — М.: Наука, 1972.

7) Коэффициент взаимной диффузии (см<sup>2</sup>/с) \*)

Газ	H <sub>2</sub>	He	CH <sub>4</sub>	NH <sub>3</sub>	H <sub>2</sub> O	Ne	CO	N <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	Ar	CO <sub>2</sub>	Kr	Xe
H <sub>2</sub>	1,3	1,3	0,62	0,74	0,73	0,97	0,65	0,69	0,70	0,70	0,55	0,58	0,50
He	—	1,6	0,58	0,66	0,72	0,94	0,63	0,62	0,64	0,64	0,50	0,56	0,49
CH <sub>4</sub>	—	—	0,20	0,16	0,23	0,30	0,20	0,20	0,21	0,19	0,15	0,16	0,13
NH <sub>3</sub>	—	—	—	0,25	0,26	0,29	0,15	0,21	0,22	0,18	0,15	0,14	0,11
H <sub>2</sub> O	—	—	—	—	0,28	0,35	0,23	0,21	0,23	0,22	0,15	0,17	0,14
Ne	—	—	—	—	—	0,45	0,28	0,32	0,28	0,28	0,23	0,22	0,19
CO	—	—	—	—	—	—	0,18	0,19	0,19	0,16	0,13	0,13	0,11
N <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—	—	0,18	0,19	0,17	0,13	0,13	0,11
O <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—	—	—	0,18	0,16	0,14	0,13	0,10
Ar	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,16	0,13	0,12	0,094
CO <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,096	0,12	0,075
Kr	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,084	0,064
Xe	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,048

\*) При давлении 1 атм и температуре 273 К.

8) Сечение резонансной перезарядки \*) положительного иона на собственном атоме ( $A^+ + A \rightarrow A + A^+$ )

A	$\sigma_0, 10^{-15} \text{ см}^2$	a	A	$\sigma_0, 10^{-15} \text{ см}^2$	a	A	$\sigma_0, 10^{-15} \text{ см}^2$	a	A	$\sigma_0, 10^{-15} \text{ см}^2$	a	A	$\sigma_0, 10^{-15} \text{ см}^2$	a			
H	4,9	0,15	Na	26	0,10	Ti	19	0,11	Ge	7,5	0,16	Ag	17	0,11	Ta	18	0,10
He	2,7	0,15	Mg	16	0,11	V	19	0,11	As	8,0	0,14	Cd	14	0,11	W	17	0,10
Li	23	0,11	Al	13	0,14	Cr	18	0,11	Se	7,3	0,14	In	16	0,13	Re	19	0,10
Be	11	0,12	Si	6,5	0,17	Mn	16	0,11	Br	4,6	0,17	Sn	8,7	0,15	Pt	13	0,11
B	8,3	0,15	P	7,5	0,14	Fe	18	0,10	Kr	5,9	0,13	Sb	9,1	0,14	Au	13	0,11
C	4,3	0,18	S	6,8	0,15	Co	18	0,10	Rb	39	0,10	Te	8,6	0,14	Hg	12	0,11
N	3,8	0,16	Cl	6,1	0,14	Ni	16	0,11	Sr	25	0,10	J	5,6	0,16	Tl	17	0,12
O	3,5	0,18	Ar	4,8	0,14	Cu	16	0,11	Zr	20	0,10	Xe	7,5	0,13	Pb	15	0,12
F	2,5	0,18	K	35	0,10	Zn	13	0,11	Nb	19	0,11	Cs	45	0,09	Bi	16	0,11
Ne	2,5	0,17	Ca	21	0,11	Ga	14	0,13	Mo	17	0,11	Ba	30	0,10			

\*) Сечение резонансной перезарядки определяется формулой  $\sigma(E) = \sigma(E_0) [1 + a \ln(E_0/E)]^2$ , где  $E$  — кинетическая энергия иона при неподвижном атоме,  $E_0 = 1$  эВ. Ион и атом находятся в основных состояниях,  $\sigma(E_0) = \sigma_0$ .

9) Подвижность ( $\text{см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ ) ионов \*)

а. Подвижность положительных атомных ионов в газах

Газ	Ион														
	H+	D+	Li+	N+	O+	Ne+	Na+	Ar+	K+	Kr+	Rb+	Xe+	Cs+	Hg+	U+
He	31	24,3	22,9	19,9	22,5	19,7	22,8	20,7	21,5	19,2	20	16,5	18,3	19,6	16
Ne	22,2	16,1	10,6	—	—	4,1	8,2	—	7,4	—	6,5	—	6,0	6,0	—
Ar	6,0	—	4,6	—	3,4	—	3,1	1,52	2,7	2,16	2,3	—	2,1	1,8	—
Kr	—	—	3,7	—	—	—	2,2	—	1,83	0,94	1,45	—	1,3	—	—
Xe	—	—	2,8	—	—	—	1,7	—	1,35	—	1,0	0,58	0,91	—	—
H <sub>2</sub>	16	—	12,4	—	—	—	12,2	—	13,1	—	13,0	—	12,9	—	—
D <sub>2</sub>	—	11,7	9,6	—	—	—	8,8	—	9,4	—	—	—	—	—	—
CO	—	—	—	—	—	—	—	—	2,3	—	—	—	2,0	—	—
N <sub>2</sub>	—	—	4,15	3,0	—	—	2,85	—	2,53	1,94	2,28	—	2,2	—	—
NO	—	—	—	—	—	—	—	—	2,28	—	—	—	—	—	—
O <sub>2</sub>	—	—	3,96	—	2,0	—	—	—	2,73	—	2,40	—	2,27	—	—
CO <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—	1,63	—	1,45	—	1,23	—	1,13	—	—

\*) Подвижность при температуре 300 К соответствует плотности газа при нормальных условиях ( $2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ ). См. Ellis H. W. et al. — Atomic Data and Nucl. Data Tabl., 1976, v. 17, p. 177; 1978, v. 22, p. 179.

б. Подвижность ( $\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ ) отрицательных атомных ионов в инертных газах

Газ	Ион				
	O <sup>-</sup>	F <sup>-</sup>	Cl <sup>-</sup>	Br <sup>-</sup>	I <sup>-</sup>
He	28,2	29,3	20,3	18,8	16,3
Ne	—	—	8,20	—	—
Ar	—	3,4	2,88	2,46	2,28
Kr	—	2,29	1,86	—	—
Xe	—	1,66	1,34	—	—

в. Подвижность  $K$  положительных молекулярных и кластерных ионов

Ион	Газ	$K$ , $\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	Ион	Газ	$K$ , $\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	Ион	Газ	$K$ , $\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$
ArH <sup>+</sup>	He	19,5	OH <sup>+</sup> ·N <sub>2</sub>	He	17,2	H <sup>+</sup> ·(H <sub>2</sub> O) <sub>4</sub>	Ar	2,0
CO <sup>+</sup>	He	19,8	NH <sub>4</sub> <sup>+</sup>	He	21,9	Xe <sub>3</sub> <sup>+</sup>	Xe	0,55
H <sub>2</sub> <sup>+</sup>	He	24,5	NO <sup>+</sup> ·H <sub>2</sub> O	He	16,8	H <sub>3</sub> <sup>+</sup>	H <sub>2</sub>	11,3
He <sub>2</sub> <sup>+</sup>	He	16,7	CH <sub>5</sub> <sup>+</sup>	He	21,0	D <sub>3</sub> <sup>+</sup>	D <sub>2</sub>	8,1
HeH <sup>+</sup>	He	23,7	CH <sub>3</sub> O <sub>2</sub> <sup>+</sup>	He	17,0	N <sub>2</sub> <sup>+</sup>	N <sub>2</sub>	1,90
N <sub>2</sub> <sup>+</sup>	He	20,9	H <sup>+</sup> ·(H <sub>2</sub> O) <sub>2</sub>	He	17,3	CO <sub>2</sub> <sup>+</sup>	N <sub>2</sub>	2,18
NO <sup>+</sup>	He	21,3	H <sup>+</sup> ·(H <sub>2</sub> O) <sub>3</sub>	He	13,8	H <sup>+</sup> ·N <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	2,12
O <sub>2</sub> <sup>+</sup>	He	21,8	Ne <sub>2</sub> <sup>+</sup>	Ne	6,1	N <sub>3</sub> <sup>+</sup>	N <sub>2</sub>	2,26
CO <sub>2</sub> <sup>+</sup>	He	19,8	N <sub>2</sub> O <sup>+</sup>	Ne	7,2	N <sub>2</sub> O <sup>+</sup>	N <sub>2</sub>	2,29
H <sub>3</sub> <sup>+</sup>	He	31	Ar <sub>2</sub> <sup>+</sup>	Ar	1,83	H <sub>3</sub> O <sup>+</sup>	N <sub>2</sub>	2,76
H <sub>2</sub> O <sup>+</sup>	He	20,8	Li <sup>+</sup> ·Ar	Ar	2,0	K <sup>+</sup> ·H <sub>2</sub> O	N <sub>2</sub>	2,17
He <sub>3</sub> <sup>+</sup>	He	18	O <sub>2</sub> <sup>+</sup>	Ar	2,6	N <sub>4</sub> <sup>+</sup>	N <sub>2</sub>	2,31
H <sup>+</sup> ·CO	He	19,5	CO <sub>2</sub> <sup>+</sup>	Ar	2,14	H <sup>+</sup> ·(H <sub>2</sub> O) <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	2,28
H <sup>+</sup> ·N <sub>2</sub>	He	17,2	H <sup>+</sup> ·CO	Ar	2,50	H <sup>+</sup> ·(H <sub>2</sub> O) <sub>3</sub>	N <sub>2</sub>	2,13
H <sup>+</sup> ·O <sub>2</sub>	He	18,5	N <sub>2</sub> O <sup>+</sup>	Ar	2,30	O <sub>2</sub> <sup>+</sup>	O <sub>2</sub>	2,23
N <sub>2</sub> O <sup>+</sup>	He	19,4	H <sub>3</sub> O <sup>+</sup>	Ar	3,0	O <sub>4</sub> <sup>+</sup>	O <sub>2</sub>	2,08
H <sub>3</sub> O <sup>+</sup>	He	21,5	OH <sup>+</sup> ·N <sub>2</sub>	Ar	2,1	CO <sup>+</sup>	CO	1,74
H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> <sup>+</sup>	He	18,5	H <sup>+</sup> ·(H <sub>2</sub> O) <sub>2</sub>	Ar	2,5	CO <sup>+</sup> ·CO	CO	1,90
NH <sub>3</sub> <sup>+</sup>	He	23,0	H <sup>+</sup> ·(H <sub>2</sub> O) <sub>3</sub>	Ar	2,2	NO <sup>+</sup>	NO	1,90

г. Подвижность  $K$  отрицательных молекулярных и кластерных ионов

Ион	Газ	$K$ , см <sup>2</sup> /(В·с)	Ион	Газ	$K$ , см <sup>2</sup> /(В·с)	Ион	Газ	$K$ , см <sup>2</sup> /(В·с)
$O_2^-$	He	21,5	$ReO_3^-$	Ar	1,94	$O_2^-$	$O_2$	2,17
$OH^-$	He	24,3	$WO_3^-$	Ar	1,96	$O_3^-$	$O_2$	2,6
$NO_2^-$	He	18,6	$ReO_4^-$	Ar	1,67	$CO_3^-$	$O_2$	2,5
$O_3^-$	He	18,6	$SF_5^-$	Ar	2,32	$O_4^-$	$O_2$	2,2
$C_2H_2^-$	He	17,4	$SF_6^-$	Ar	2,39	$CO_4^-$	$O_2$	2,4
$CO_3^-$	He	16,9	$Cl_2^-$	$N_2$	2,4	$SF_5^-$	$O_2$	2,2
$SO_3^-$	He	15,4	$NO_2^-$	$N_2$	2,5	$SF_6^-$	$O_2$	2,0
$SO_2F^-$	He	17,4	$CO_3^-$	$N_2$	2,4	$CO_3^- \cdot CO_2$	$CO_2$	1,3
$SF_5^-$	He	12,0	$NO_3^-$	$N_2$	2,3	$CO_4^- \cdot (CO_2)_6$	$CO_2$	0,99
$SF_6^-$	He	12,0	$NO_2^- \cdot H_2O$	$N_2$	2,4	$CO_4^- \cdot H_2O \cdot (CO_2)_5$	$CO_2$	1,01
$Cl_2^-$	Ar	2,45	$CO_3^- \cdot H_2O$	$N_2$	2,1	$SF_5^-$	$SF_6$	0,60
$ClO^-$	Ar	2,52	$NO_3^- \cdot H_2O$	$N_2$	2,2	$SF_6^-$	$SF_6$	0,54
$BrCl_2^-$	Ar	2,25	$CO_4^- \cdot H_2O$	$N_2$	2,2	$SF_6^- \cdot SF_6$	$SF_6$	0,47
$Cl_3^-$	Ar	2,34	$Cl_2^-$	$O_2$	2,44	$SF_6^- \cdot (SF_6)_2$	$SF_6$	0,42
$O_3^-$	Ar	2,42	$ClO^-$	$O_2$	2,58			
$CO_3^-$	Ar	2,40						

## 10) Параметры электрона, движущегося в постоянном электрическом поле \*)

$E/N$ , $T_d$	Газ													
	He		Ne		Ar		Kr		Xe		$H_2$		$N_2$	
	$w$	$\mathcal{D}_{\perp}/K$	$w$	$\mathcal{D}_{\perp}/K$	$w$	$\mathcal{D}_{\perp}/K$	$w$	$w$	$w$	$w$	$\mathcal{D}_{\perp}/K$	$w$	$\mathcal{D}_{\perp}/K$	
0,03	0,71	0,034	1,3	—	1,2	0,94	0,16	1,0	0,46	0,026	1,1	0,028		
0,05	1,0	0,042	1,6	—	1,4	1,2	0,50	1,2	0,74	0,028	1,6	0,031		
0,1	1,6	0,065	2,1	0,40	1,6	1,5	0,88	1,3	1,4	0,032	2,4	0,042		
0,3	2,8	0,15	3,4	0,91	2,2	2,3	1,1	1,6	3,1	0,046	3,1	0,10		
0,5	3,7	0,24	4,3	1,4	2,5	2,8	1,2	1,7	4,3	0,060	3,5	0,16		
1,0	5,1	0,43	5,8	2,5	3,0	3,8	1,4	2,0	6,2	0,095	4,4	0,27		
3,0	8,8	1,2	15	5,2	4,0	7,2	1,8	3,2	9,8	0,23	7,4	0,61		
5,0	12	2,3	19	6,0	4,9	8,2	—	—	13	0,33	11	0,74		
10	16	3,0	38	6,9	11	7,7	—	—	19	0,51	18	0,93		
30	25	3,7	100	—	26	—	—	—	37	1,05	42	1,2		
50	68	5,3	150	—	42	—	—	—	57	1,7	61	1,4		
100	130	6,6	260	—	74	—	65	—	130	2,7	105	1,9		



Продолжение

E/N, Td	Газ								
	O <sub>2</sub>		CO		NO		CO <sub>2</sub>		H <sub>2</sub> O (пар)
	$w, 10^8$ см/с	$\mathcal{D}_{\perp}/K$	$w, 10^6$ см/с	$\mathcal{D}_{\perp}/K$	$w, 10^6$ см/с	$\mathcal{D}_{\perp}/K$	$w$	$\mathcal{D}_{\perp}/K$	$w$
0,03	0,26	—	—	—	—	—	0,054	0,025	—
0,05	0,37	—	—	—	—	—	0,095	0,025	—
0,10	0,43	—	—	—	—	—	0,19	0,025	—
0,3	0,54	—	0,74	0,045	0,78	—	0,45	0,025	—
0,5	0,73	—	0,77	0,063	0,86	—	0,89	0,025	—
1,0	1,0	0,14	1,0	0,090	1,2	—	1,78	0,026	—
3	2,2	0,30	1,8	0,18	2,6	0,20	5,4	0,030	0,71
5	2,6	0,49	2,2	0,25	3,2	0,23	9,1	0,035	1,2
10	3,1	1,1	2,6	0,42	4,7	0,28	21	0,065	2,3
30	7,2	2,4	3,9	0,82	6,6	0,63	120	0,99	7,5
50	11	2,9	5,2	1,1	8,4	1,1	130	1,7	27
100	16	3,4	9,6	1,6	—	—	130	3,2	120

\*) Температура—комнатная,  $E$ —напряженность электрического поля,  $N$ —плотность атомов или молекул газа,  $1 \text{ Td} = 10^{-17} \text{ В} \cdot \text{см}^2$ ,  $w$ —дрейфовая скорость электрона (приведена в  $10^5 \text{ см/с}$ ),  $\mathcal{D}_{\perp}$ —коэффициент поперечной диффузии электрона,  $K$ —подвижность электрона, величина  $\mathcal{D}_{\perp}/K$  приведена в эВ. Данные: *Dutton J.*—*J. Phys. Chem. Ref. Data*, 1975, v. 4, p. 577.

### 11) Работа выхода $\phi$ (эВ) электрона \*)

Элемент	Li	Be	B	C	Na	Mg	Al	Si	S	K	Ca	
$\phi$	2,38	3,92	4,5	4,7	2,35	3,64	4,25	4,8	6,0	2,22	2,80	
Элемент	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	
$\phi$	3,3	3,92	4,12	4,58	3,83	4,31	4,41	4,50	4,40	4,24	3,96	
Элемент	Ge	As	Se	Rb	Y	Zr	Nb	Mo	Ru	Pd	Ag	
$\phi$	4,76	5,11	4,72	2,35	3,3	3,9	3,99	4,3	4,60	4,8	4,3	
Элемент	Cd	In	Sn	Sb	Te	Cs	Ba	La	Ce	Pr	Nd	Sm
$\phi$	4,1	3,8	4,38	4,08	4,73	1,81	2,49	3,3	2,7	2,7	3,2	2,7
Элемент	Cd	Tb	Dy	Ho	Er		Tm	Hf	Ta	W	Re	
$\phi$	3,1	3,15	3,25	3,22	3,25		3,10	3,53	4,12	4,54	5,0	
Элемент	Os	Ir	Pt	Au	Hg		Tl	Pb	Bi	Th	U	
$\phi$	4,7	4,7	5,32	4,30	4,52		3,7	4,0	4,4	3,3	3,3	

\*) Для простых веществ, находящихся в поликристаллическом состоянии  
*Фоменко В. С.* Эмиссионные свойства материалов. — Киев: Наукова Думка, 1981.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

К главе 1.

1. *Чемпен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов.— М.: ИЛ, 1960.
2. *Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей.— М.: ИЛ, 1961.
3. *Хуанг К.* Статистическая механика.— М.: Мир, 1966.
4. *Гуревич Л. Э.* Основы физической кинетики.— М.: Гостехиздат, 1940.
5. *Силин В. П.* Введение в кинетическую теорию газов.— М.: Наука, 1971.
6. *Эккер Г.* Теория полностью ионизованной плазмы.— М.: Мир, 1974.
7. *Елецкий А. В., Палкина Л. А., Смирнов Б. М.* Явление переноса в слабоионизованной плазме.— М.: Атомиздат, 1975.
8. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах.— М.: Мир, 1976.
9. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика, т. 1, 2.— М.: Мир, 1978.
10. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.
11. *Смирнов Б. М.* Введение в физику плазмы.— М.: Наука, 1982.
12. *Биберман Л. М., Воробьев В. С., Якубов И. Т.* Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы.— М.: Наука, 1982.
13. *Леонтович М. А.* Введение в термодинамику. Статистическая физика.— М.: Наука, 1983.

К главе 2.

1. *Франк-Каменецкий Д. А.* Лекции по физике плазмы.— М.: Атомиздат, 1964.
2. *Спитцер Л.* Физика полностью ионизованного газа.— М.: Мир, 1965.
3. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1965.
4. *Романовский М. К.* Введение в физику высокотемпературной плазмы.— М.: Изд-во МИФИ, 1965.
5. *Трубников Б. А.* Введение в теорию плазмы.— М.: Изд-во МИФИ, 1969.
6. *Силин В. П.* Введение в кинетическую теорию газов.— М.: Наука, 1971.
7. *Бекефи Дж.* Радиационные процессы в плазме.— М.: Мир, 1971.
8. *Арцимович Л. А., Лукьянов С. Ю.* Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях.— М.: Наука, 1972.
9. *Ишимару С.* Основные принципы физики плазмы.— М.: Атомиздат, 1975.
10. *Лукьянов С. Ю.* Горячая плазма и управляемый ядерный синтез.— М.: Наука, 1975.
11. *Швилкин Б. Н.* Газовая электроника и физика плазмы в задачах.— М.: Наука, 1978.
12. *Каулинг Т.* Магнитная гидродинамика.— М.: Атомиздат, 1978.
13. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы.— М.: Высшая школа, 1978.
14. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.
15. *Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З.* Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1979.

16. *Климонтович Ю. Л.* Кинетическая теория электромагнитных процессов.— М.: Наука, 1980.
17. *Храпак А. Г., Якубов И. Т.* Электроны в плотных газах и в плазме.— М.: Наука, 1981.
18. *Смирнов Б. М.* Введение в физику плазмы.— М.: Наука, 1982.
19. *Биберман Л. М., Воробьев В. С., Якубов И. Т.* Кинетика неравновесной плазмы.— М.: Наука, 1982.

К главе 3.

1. *Франк-Каменецкий Д. А.* Лекции по физике плазмы.— М.: Атомиздат, 1964.
2. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая теория неравновесных процессов в плазме.— М.: Изд-во МГУ, 1964.
3. *Ахиезер А. И.* и др. Коллективные колебания в плазме.— М.: Атомиздат, 1964.
4. *Спитцер Л.* Физика полностью ионизованного газа.— М.: Мир, 1965.
5. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1965.
6. *Лонгмайер К.* Физика плазмы.— М.: Атомиздат, 1966.
7. *Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме.— М.: Наука, 1970.
8. *Бекефи Дж.* Радиационные процессы в плазме.— М.: Мир, 1971.
9. *Цытович В. Н.* Теория турбулентной плазмы.— М.: Атомиздат, 1971.
10. *Силин В. П.* Введение в кинетическую теорию газов.— М.: Наука, 1971.
11. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.* Нелинейная теория плазмы.— В сб.: Вопросы теории плазмы /Под ред. М. А. Леонтовича. Вып. 7.— М.: Атомиздат, 1973.
12. *Эккер Г.* Теория полностью ионизованной плазмы.— М.: Мир, 1974.
13. *Ишимару С.* Основные принципы физики плазмы.— М.: Атомиздат, 1975.
14. *Михайловский А. Б.* Теория плазменных неустойчивостей.— М.: Атомиздат, 1975.
15. *Кадолицев Б. Б.* Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
16. *Иванов А. А.* Физика сильнонеравновесной плазмы.— М.: Атомиздат, 1977.
17. *Лукьянов С. Ю.* Горячая плазма и управляемый ядерный синтез.— М.: Наука, 1975.
18. *Каулинг Т.* Магнитная гидродинамика.— М.: Мир, 1978.
19. *Шилкин Б. Н.* Газовая электроника и физика плазмы в задачах.— М.: Наука, 1978.
20. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы.— М.: Высшая школа, 1978.
21. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.
22. *Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З.* Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1979.
23. *Недоспасов А. В., Хаит В. Д.* Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы.— М.: Наука, 1979.
24. *Веденов А. А.* Задачник по физике плазмы.— М.: Атомиздат, 1981.
25. *Незлин М. В.* Динамика пучков в плазме.— М.: Энергониздат, 1982.

К главе 4.

1. *Смирнов Б. М.* Ионы и возбужденные атомы в плазме.— М.: Атомиздат, 1974.
2. *Елецкий А. В., Палкина Л. А., Смирнов Б. М.* Явления переноса в слабоионизованном газе.— М.: Атомиздат, 1975.
3. *Мак-Даниель И., Мэзон Э.* Подвижность и диффузия ионов в газах.— М.: Мир, 1976.
4. *Хаксли Л., Кромптон Р.* Диффузия и дрейф электронов в газах.— М.: Мир, 1977.
5. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.

6. *Смирнов Б. М.* Введение в физику плазмы.— М.: Наука, 1982.
7. *Биберман Л. М., Воробьев В. С., Якубов И. Т.* Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы.— М.: Наука, 1982.

К главе 5.

1. *Чандрасекар С.* Стохастические методы в физике и астрономии.— М.: ИЛ, 1947.
2. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Физматгиз, 1963.
3. *Грим Г.* Спектроскопия плазмы.— М.: Атомиздат, 1969.
4. *Смирнов Б. М.* Введение в физику плазмы.— М.: Наука, 1975.
5. *Елецкий А. В., Палкина Л. А., Смирнов Б. М.* Явления переноса в слабоионизованном газе.— М.: Атомиздат, 1975.
6. *Собелман И. И.* Введение в теорию атомных спектров.— М.: Наука, 1977.
7. *Биберман Л. М., Воробьев В. С., Якубов И. Т.* Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы.— М.: Наука, 1982.

К главе 6.

1. *Энгель А., Штенбек М.* Физика и техника газового разряда.— М.: ОНТИ, 1935.
2. *Лёб Л. Б.* Основные процессы электрических разрядов в газах.— М.: Гостехиздат, 1950.
3. *Мик Д., Крэсс Д.* Электрический пробой в газах.— М.: ИЛ, 1960.
4. *Пеннинг Ф. М.* Электрические разряды в газах.— М.: ИЛ, 1960.
5. *Браун С.* Элементарные процессы в плазме газового разряда.— М.: Атомиздат, 1961.
6. *Лозанский Э. Д., Фирсов О. Б.* Теория искры.— М.: Атомиздат, 1975.
7. *Грановский В. Л.* Электрический ток в газах.
8. *Швилкин Б. Н.* Газовая электроника и физика плазмы в задачах.— М.: Наука, 1978.
9. *Райзер Ю. П.* Основы современной физики газоразрядных процессов.— М.: Наука, 1980.
10. *Храпак А. Г., Якубов И. Т.* Электроны в плотных газах и плазме.— М.: Наука, 1981.
11. *Веденов А. А.* Задачник по физике плазмы.— М.: Атомиздат, 1981.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоионизационные состояния 279  
Адиабатические условия в волне 158, 159  
Альфвеновские волны, альфвеновская скорость 169  
Амбиполярная диффузия 89  
Амбиполярной диффузии коэффициент 90  
Анодное падение 364  
Аномальный скин-эффект 167  
Ассоциативная ионизация 400  
Аэрозолей рекомбинация 284
- Бенара ячейки 57  
Бибермана — Холстейна уравнение 315  
Бланка закон 233  
Больцмана  $H$ -теорема 9  
— распределение 13  
Брейта — Вигнера формула 281  
Бунемана неустойчивость 186  
Бурсиана ток 201
- Вина формула 294  
Вмороженность магнитных силовых линий 151  
Вязкости коэффициент 23  
Вязкость газа кинематическая 49
- Газовости критерий 402  
Гартмана число 59  
Гаусса распределение 74  
Геликон 172  
Гидродинамические неустойчивости 176  
Гомополяр 152  
Грина функция 72
- Давление 16  
Дебая — Гюккеля радиус 87  
Дисперсионное соотношение 154  
Диссипативная неустойчивость 176  
Диссоциативная рекомбинация 287, 400  
Диссоциация 45  
Дифференциальное сечение рассеяния 8, 395
- Диффузии коэффициент 23  
Диффузионное сечение рассеяния 35, 67  
Диффузионный режим разряда 344  
Диэлектрическая проницаемость плазмы 143  
Длина пробега 398  
Домен электрический 199, 214  
Доплера закон 403  
Доплеровское уширение спектральной линии 298, 403  
Драйвейстейна функция распределения 107  
Дрейф электрона в скрещенных полях 117  
Дрейфовая скорость иона 218  
Дрейфовые волны 173  
— неустойчивости 176
- Зажигания разряда условия 379  
Закон трех вторых 393  
Запертое излучение 306  
Захвата сечение 220  
Звука скорость 155  
Звуковая волна 155
- Идеальность плазмы 85, 403  
Излучение слоя 304  
Излучения поток 295  
Интеграл столкновений 7  
Интенсивность перехода 321  
Ионизация константа скорости 257  
— частота 257  
Ионизационная неустойчивость 192, 196  
Ионизация прямая 257  
— ступенчатая 260  
Ионный звук 161
- Квазинейтральность плазмы 85  
Кинетические коэффициенты 23  
— неустойчивости 176  
Кинетическое уравнение Больцмана 7  
Конвекция 53  
Константа равновесия 401  
— скорости процесса 394

- Контракция положительного столба 362  
 Кортевега — де Вриза уравнение 208  
 Коэффициент затухания 177  
 — поглощения 296, 320  
 Критический радиус 266  
 Кулоновский логарифм 132, 394
- Лайтхилла критерий 207, 214  
 Ландау интеграл столкновений 129  
 — затухание 177  
 Ланжевена формула 284  
 Ленгмюровские колебания 157  
 Ленгмюровский слой 376  
 Лефлера — Миттага теорема 335  
 Линейная теория колебаний 154  
 Лоренцевская форма спектральной линии 404  
 Лучистая теплопроводность 311  
 Лучистой теплопроводности коэффициент 311
- Магнитное давление** 151  
 Магнитной гидродинамики уравнения 149  
 Магнитный звук 169  
 Магнитогидродинамические волны 169  
 Максвелла распределение 10  
 МГД-канал 118  
 Модуляционная неустойчивость 177, 206
- Навь** — Стокса уравнения 47  
 Неидеальная плазма 277  
 Непрерывности уравнение 19  
 Неупругое рассеяние частиц 394  
 Неустойчивости плазмы 176  
 Неустойчивость плазменного шнура 190
- Одиночных линий модель 321  
 Оптическая толщина 304
- Параметрическая неустойчивость** 206  
 Пуассона уравнение 87  
 Перегретая неустойчивость 176  
 Переноса уравнения 17  
 Перепад давления в разряде 375, 376  
 Перетяжки неустойчивость 189  
 Плазменные колебания 157  
 Плазменный шнур 151  
 Планка распределение 293  
 — формула 294  
 Поверхностное натяжение плазмы 102
- Подвижность заряженной частицы 217  
 — пылинки 244  
 Полное сечение рассеяния 397  
 Положительный столб газового разряда 344  
 Поляризационное взаимодействие 21  
 Понижение потенциала ионизации 85  
 Принцип детального равновесия 398  
 Прицельный параметр столкновения 395  
 Проводимость плазмы 140  
 Пучковая неустойчивость 177
- Распадная неустойчивость** 206  
 Распределение по оптическим толщинам 323  
 — фотонов по частотам 403  
 Регулярная модель полос 321  
 Резерфорда формула 396  
 Резонансная перезарядка 221  
 Резонансное излучение 297  
 Резонансный фотон 297  
 Рейнольдса число 49  
 Рекомбинации коэффициент 266  
 Рекомбинация тройная 266  
 Релея — Джинса формула 294  
 Релея задача 53  
 — число 55
- Самообращение спектральной линии** 311  
 Самостоятельности разряда условие 379  
 Сах<sub>4</sub> распределение 94  
 Свистящие атмосферники 172, 187  
 Сдвиг спектральной линии 406  
 Сена эффект 221  
 Сечение перехода 394  
 — поглощения излучения 305  
 Скачок потенциала пристеночный 372  
 Скин-слоя толщина 91  
 Скин-эффект 92  
 Случайная модель полос 321  
 Смолуховского уравнение 63, 277  
 Солитоны 177, 209, 213  
 Сонина полиномы 26  
 Спектральная плотность излучения 294  
 Статистическая теория уширения спектральных линий 407  
 Статистический вес 13  
 — непрерывного спектра 92  
 Стефана — Больцмана закон 294  
 — постоянная 295  
 Стокса формула 49

- Таунсенда коэффициенты 378  
— прибор 81  
Тау-приближение 41  
Твердых сфер модель 36, 40, 241, 398  
Темный разряд 378  
Температура 14  
Тензор давлений 19  
— диэлектрической проницаемости 144  
— проводимости 143  
Тепловая неустойчивость 60  
Тепловой баланс планеты 342  
— взрыв 60  
— поток 23  
Теплопроводности коэффициент 23  
Термодинамическое равновесие 9  
Термодиффузии коэффициент 34  
Токово-конвективная неустойчивость 196  
Томсона модель 267  
— формула 258  
Транспортное сечение рассеяния 396  
Тринора распределение 99  
Тройное столкновение 401  
Турбулентность плазмы 177
- Угол рассеяния 395  
Ударное уширение спектральных линий 404  
Упругое рассеяние 394  
Уравнение состояния 17
- Ферми — Дирака распределение 13  
Ферми энергия 15  
Фоккера — Планка уравнение 63
- Фотораспад связанного состояния 400  
Фоторекомбинация 400  
Функция поглощения 319  
— пропускания 320  
— распределения 7
- Характеристическая функция 324  
Химический потенциал 14  
Холодная плазма 167
- Циклотронные волны 188  
Циклотронный резонанс 147
- Челмена — Энскога приближение 26, 225  
Черное излучение 293
- Ширина зоны излучения 325  
— спектральной линии 403
- Эйлера уравнение 19  
Эйнштейна соотношение 71 247  
Эльзассера модель полос 321  
— функция 330  
Энергетический коэффициент Таунсенда 248  
Энскога уравнения переноса 18